

Б. В. Бондарев, Е. Е. Ковтун (Донецк. нац. ун-т)

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С БЫСТРЫМ ВРЕМЕНЕМ

We study the procedure of averaging in the Cauchy problem for an ordinary differential equation perturbed by some ergodic Markov process. We establish some estimates of the rate of convergence of solutions of the initial problem to solutions of averaged problem.

Вивчається процедура усереднення у задачі Коші для звичайного диференціального рівняння, збуреного деяким ергодичним марковським процесом. Встановлено деякі оцінки швидкості збіжності розв'язків початкової задачі до розв'язків усередненої.

1. Оценка скорости сближения непрерывных мартингалов с семейством винеровских процессов. Известно, что любой непрерывный локальный мартингал, квадратическая вариация которого стремится с вероятностью единица к бесконечности, заменой времени может быть преобразован в броуновское движение. Сформулируем в виде леммы следующий результат.

Лемма (теорема 9.3 [1]). Пусть $\{\mu_t, \mathfrak{S}_0^t, t \geq 0\}$ — непрерывный локальный мартингал, такой, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} [\mu, \mu]_t = +\infty$, и для каждого t $\tau_t = \inf\{s > 0: [\mu, \mu]_s > t\}$. Тогда процесс μ_{τ_t} неотличим от броуновского движения $W_t, t \geq 0$. Здесь $[\mu, \mu]_t, t \geq 0$, — квадратическая вариация мартингала $\{\mu_t, \mathfrak{S}_0^t, t \geq 0\}$.

В силу того, что [2, с. 120] в случае непрерывного квадратично интегрируемого мартингала квадратическая вариация совпадает с характеристикой $\langle \mu, \mu \rangle_t, t \geq 0$, в дальнейшем будем использовать характеристику $\langle \mu, \mu \rangle_t, t \geq 0$, вместо квадратической вариации $[\mu, \mu]_t, t \geq 0$. Отметим также, что $\tau_t = \inf\{s > 0: [\mu, \mu]_s > t\}$ — марковский момент относительно семейства $\{\mathfrak{S}_0^t, t \geq 0\}$. Этот факт следует из соотношения $\{\tau_t \leq s\} = \{t \leq \langle \mu, \mu \rangle_s\}$ и того, что $\langle \mu, \mu \rangle_s, s \geq 0$, — \mathfrak{S}_0^s -измеримая величина.

Введем процесс $\zeta_t = \mu_t - \mu_{\tau_t}$. Выясним, имеет ли этот процесс мартингаловое свойство относительно некоторых потоков σ -алгебр. Рассмотрим сначала поток $\{\mathfrak{S}_0^t, t \geq 0\}$.

Следует отметить, что, например, в разложении Д. О. Чикина [3, 4] мартингал $\mu_t, t \geq 0$, — квадратично интегрируемый и представим в виде

$$\mu_t = \int_0^{+\infty} M\{\eta(s) / \mathfrak{S}_0^t\} ds - \rho_0 = M\left\{\int_0^{+\infty} \eta(s) ds / \mathfrak{S}_0^t\right\} - \rho_0,$$

т. е. мартингал $\mu_t, t \geq 0$, является регулярным, в силу теоремы 2.7 [5] — равномерно интегрируемым и в силу замечания к теореме 2.9 [5] имеет свойство

$$M\{\mu_\tau / \mathfrak{S}_0^\sigma\} = \mu_{\min(\tau, \sigma)}. \quad (1)$$

В силу свойства (1)

$$M\{\zeta_t / \mathfrak{S}_0^s\} = \mu_s - \mu_{\min(\tau_t, s)} \neq \zeta_s,$$

т. е. случайный процесс ζ_t , $t \geq 0$, не является мартингалом относительно неубывающего семейства $\{\mathfrak{S}_0^t, t \geq 0\}$.

Естественно рассмотреть также поток $\{\mathfrak{S}_0^{\min(t, \tau_t)}, t \geq 0\}$. В данном случае очевидно, что

$$M\left\{\zeta_t / \mathfrak{S}_0^{\min(s, \tau_s)}\right\} = M\left[M\left\{\zeta_t / \mathfrak{S}_0^{\min(t, \tau_t)}\right\} \mathfrak{S}_0^{\min(s, \tau_s)}\right] = 0 \neq \zeta_s,$$

т. е. мартингаловое свойство как относительно потока $\{\mathfrak{S}_0^t, t \geq 0\}$, так и относительно потока $\{\mathfrak{S}_0^{\min(t, \tau_t)}, t \geq 0\}$ не имеет места. Таким образом, стремление получить оценки сходимости в супремумной метрике, основываясь на неравенствах типа неравенства А. Н. Колмогорова, в общем случае вряд ли обосновано.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$|\zeta_t| = |\mu_t - \mu_{\tau_t}| = |\mu_{\max(t, \tau_t)} - \mu_{\min(t, \tau_t)}|. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $\chi(\tau_t \geq t)$ — индикатор события $(\tau_t \geq t)$, $\chi(\tau_t < t)$ — индикатор события $(\tau_t < t)$. Тогда

$$\begin{aligned} |\mu_t - \mu_{\tau_t}| &= [\chi(\tau_t \geq t) + \chi(\tau_t < t)] [\mu_t - \mu_{\tau_t}] = \\ &= |\mu_t \chi(\tau_t \geq t) + \mu_{\tau_t} \chi(\tau_t < t) - \mu_{\tau_t} \chi(\tau_t \geq t) - \mu_t \chi(\tau_t < t)| = \\ &= |\mu_{\min(t, \tau_t)} \chi(\tau_t \geq t) + \mu_{\max(t, \tau_t)} \chi(\tau_t < t) - \mu_{\max(t, \tau_t)} \chi(\tau_t \geq t) - \mu_{\min(t, \tau_t)} \chi(\tau_t < t)| \leq \\ &\leq (\tau_t \geq t) |\mu_{\max(t, \tau_t)} - \mu_{\min(t, \tau_t)}| + \chi(\tau_t < t) |\mu_{\max(t, \tau_t)} - \mu_{\min(t, \tau_t)}| = \\ &= |\mu_{\max(t, \tau_t)} - \mu_{\min(t, \tau_t)}| \end{aligned}$$

и обратно

$$\begin{aligned} |\mu_{\max(t, \tau_t)} - \mu_{\min(t, \tau_t)}| &= |\mu_{\max(t, \tau_t)} - \mu_{\min(t, \tau_t)}| [\chi(\tau_t \geq t) + \chi(\tau_t < t)] = \\ &= |\mu_{\min(t, \tau_t)} \chi(\tau_t \geq t) + \mu_{\max(t, \tau_t)} \chi(\tau_t < t) - \mu_{\max(t, \tau_t)} \chi(\tau_t \geq t) - \mu_{\min(t, \tau_t)} \chi(\tau_t < t)| = \\ &= |\mu_t \chi(\tau_t \geq t) + \mu_{\tau_t} \chi(\tau_t < t) - \mu_{\tau_t} \chi(\tau_t \geq t) - \mu_t \chi(\tau_t < t)| \leq \\ &\leq [\chi(\tau_t \geq t) + \chi(\tau_t < t)] |\mu_t - \mu_{\tau_t}| = |\mu_t - \mu_{\tau_t}|, \end{aligned}$$

откуда и следует (2).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $\tau_t = \inf\{s > 0: [\mu, \mu]_s > \sigma^2 t\}$, тогда справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M |\mu_t - \mu_{\tau_t}|^2 \leq \sup_{0 \leq t \leq T} M |\langle \mu, \mu \rangle_t - \sigma t|. \quad (3)$$

Доказательство. Согласно лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} M |\mu_t - \mu_{\tau_t}|^2 &= M |\mu_{\max(t, \tau_t)} - \mu_{\min(t, \tau_t)}|^2 = \\ &= M \mu_{\max(t, \tau_t)}^2 - 2M \mu_{\max(t, \tau_t)} \mu_{\min(t, \tau_t)} + M \mu_{\min(t, \tau_t)}^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= M\mu_{\max(t, \tau_t)}^2 - 2M\left[M\left\{ \mu_{\max(t, \tau_t)} \mu_{\min(t, \tau_t)} / \mathfrak{S}_0^{\min(t, \tau_t)} \right\} \right] + M\mu_{\min(t, \tau_t)}^2 = \\
 &= M\mu_{\max(t, \tau_t)}^2 - 2M\left[\mu_{\min(t, \tau_t)} M\left\{ \mu_{\max(t, \tau_t)} / \mathfrak{S}_0^{\min(t, \tau_t)} \right\} \right] + M\mu_{\min(t, \tau_t)}^2 = \\
 &= M\mu_{\max(t, \tau_t)}^2 - 2M\left[\mu_{\min(t, \tau_t)}^2 \right] + M\mu_{\min(t, \tau_t)}^2 = \\
 &= M\mu_{\max(t, \tau_t)}^2 - M\mu_{\min(t, \tau_t)}^2.
 \end{aligned}$$

В силу того, что $\min(t, \tau_t)$ и $\max(t, \tau_t)$ — марковские моменты относительно потока $\{\mathfrak{S}_0^t, t \geq 0\}$, из представления $\mu_t^2 = \langle \mu, \mu \rangle_t + v_t$, где случайный процесс v_t измерим относительно потока $\{\mathfrak{S}_0^t, t \geq 0\}$ и является мартингалом с нулевым средним, имеем

$$\begin{aligned}
 \mu_{\max(t, \tau_t)}^2 &= \langle \mu, \mu \rangle_{\max(t, \tau_t)} + v_{\max(t, \tau_t)}, \\
 \mu_{\min(t, \tau_t)}^2 &= \langle \mu, \mu \rangle_{\min(t, \tau_t)} + v_{\min(t, \tau_t)},
 \end{aligned}$$

а отсюда в силу сохранения мартингалового свойства в марковские моменты времени центрированным процессом v_t

$$M\mu_{\max(t, \tau_t)}^2 - M\mu_{\min(t, \tau_t)}^2 = M\langle \mu, \mu \rangle_{\max(t, \tau_t)} - M\langle \mu, \mu \rangle_{\min(t, \tau_t)}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 &M\langle \mu, \mu \rangle_{\max(t, \tau_t)} - M\langle \mu, \mu \rangle_{\min(t, \tau_t)} \leq M\left| \langle \mu, \mu \rangle_{\max(t, \tau_t)} - \langle \mu, \mu \rangle_{\min(t, \tau_t)} \right| = \\
 &= M\left| \langle \mu, \mu \rangle_{\max(t, \tau_t)} - \langle \mu, \mu \rangle_{\min(t, \tau_t)} \right| \left[\chi(\tau_t \geq t) + \chi(\tau_t < t) \right] \leq \\
 &\leq M\left| \langle \mu, \mu \rangle_{\max(t, \tau_t)} \chi(\tau_t \geq t) - \langle \mu, \mu \rangle_{\min(t, \tau_t)} \chi(\tau_t \geq t) \right| + \\
 &+ M\left| \langle \mu, \mu \rangle_{\max(t, \tau_t)} \chi(\tau_t < t) - \langle \mu, \mu \rangle_{\min(t, \tau_t)} \chi(\tau_t < t) \right| \leq \\
 &\leq M\left| \langle \mu, \mu \rangle_{\tau_t} \chi(\tau_t \geq t) - \langle \mu, \mu \rangle_t \chi(\tau_t \geq t) \right| + \\
 &+ M\left| \langle \mu, \mu \rangle_t \chi(\tau_t < t) - \langle \mu, \mu \rangle_{\tau_t} \chi(\tau_t < t) \right| = M\left| \langle \mu, \mu \rangle_{\tau_t} - \langle \mu, \mu \rangle_t \right|. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Из (4) в силу того, что $\langle \mu, \mu \rangle_t = \sigma^2 t$, имеем (3).

Введем „быстрое” время t/ε ($\varepsilon > 0$ — малая величина). Пусть $\mu_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \mu_{t/\varepsilon}$, $W_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon}$ — семейство стандартных винеровских процессов, полученных из броуновского движения W_t , $t \geq 0$, которое, в свою очередь, получается из мартингала при соответствующей замене времени.

Из лемм 1 и 2 вытекает следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\{\mu_t, \mathfrak{S}_0^t, t \geq 0\}$ — непрерывный локальный мартингал, такой, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} [\mu, \mu]_t = +\infty$ и, кроме того, $\tau_t = \inf\{s > 0: [\mu, \mu]_s > \sigma^2 t\}$ для каждого t . Тогда выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
 \sup_{0 \leq t \leq T} M\left| \mu_t^\varepsilon - \sigma W_t^\varepsilon \right|^2 &= \sup_{0 \leq t \leq T} M\left| \sqrt{\varepsilon} \mu_{t/\varepsilon} - \sigma \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon} \right|^2 \leq \\
 &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} M\left| \varepsilon \langle \mu, \mu \rangle_{t/\varepsilon} - \sigma^2 t \right|. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Доказательство необходимо провести лишь для случая $\sigma^2 > 0$, $\sigma^2 \neq 1$, так как при $\sigma^2 = 1$ все уже обосновано. Случай $\sigma^2 > 0$, $\sigma^2 \neq 1$ получаем, если сначала вместо мартингала μ_t рассмотреть мартингал $\bar{\mu}_t = \mu_t / \sigma$, для которого все условия, достаточные для справедливости теоремы 1, имеют место, т. е. в данном случае справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \mu_t^\varepsilon - W_t^\varepsilon \right|^2 &= \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \sqrt{\varepsilon} \mu_{t/\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon} \right|^2 \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon \langle \mu, \mu \rangle_{t/\varepsilon} - \sigma t \right|. \end{aligned}$$

Из последнего умножением на $\sigma^2 > 0$, $\sigma^2 \neq 1$, получаем (5).

Теорема доказана.

2. Усреднение в стохастических системах. Оценка скорости сходимости. Рассмотрим уравнение

$$d\xi_\varepsilon(t) = \varepsilon a(\xi_\varepsilon(t)) f(\eta(t)) dt, \quad \xi_\varepsilon(0) = \xi_0. \quad (6)$$

Здесь процесс $\eta(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяет уравнению

$$d\eta(t) = b(\eta(t)) + \sigma(\eta(t)) dW(t), \quad \eta(0) = \eta_0. \quad (7)$$

Будем считать выполненными следующие условия:

А) коэффициенты уравнения (6) удовлетворяют теореме существования и единственности решения [6]; кроме того, имеет место оценка

$$|a(x)| \leq \tilde{C} < +\infty,$$

существует производная $a'_x(x)$, для всех x определены $g(x) = \int_0^x \frac{dy}{a(y)}$ и $g^{-1}(x)$;

Б) относительно коэффициентов $b(x)$, $\sigma(x)$ будем предполагать, что существуют непрерывные производные $b'_x(x)$, $\sigma'_x(x)$, $b''_{xx}(x)$, $\sigma''_{xx}(x)$, причем производные старших порядков ограничены, а также выполняются условия

$$\begin{aligned} b'_x(x) &\leq -\lambda, \quad 0 < \lambda < +\infty, \\ 0 < \gamma &\leq \sigma^2(x) \leq \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma \in (0, 1]. \end{aligned}$$

Пусть $U(x)$ — решение уравнения

$$f(x) - \bar{f} = b(x) \frac{dU(x)}{dx} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2U(x)}{dx^2}, \quad (8)$$

где $\rho(x)$ — решение сопряженного уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{2} \sigma^2(x) \rho(x) \right] - \frac{d}{dx} [b(x) \rho(x)] = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (9)$$

Здесь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \rho(x) dx = \bar{f}. \quad (10)$$

Из (9) следует

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{2} \sigma^2(x) \rho(x) \right] - \frac{d}{dx} \left[\frac{2b(x)}{\sigma^2(x)} \frac{1}{2} \sigma^2(x) \rho(x) \right] = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (11)$$

Пусть

$$V(x) = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \rho(x),$$

тогда из (11) имеем

$$\frac{d}{dx} [V(x)] - \left[\frac{2b(x)}{\sigma^2(x)} V(x) \right] = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1,$$

откуда

$$\rho(x) = \frac{2C}{\sigma^2(x)} \exp \left\{ \int_0^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right\}.$$

Нормируя последнее соотношение, окончательно получаем

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp \left\{ \int_0^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right\} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp \left\{ \int_0^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right\} dx \right]^{-1}.$$

Из (10) в силу теоремы Фредгольма [7] следует, что решение (8) существует.

Пусть $\rho(x, t, y)$ — плотность вероятности перехода (при наложенных ограничениях на коэффициенты она существует (см. [2])), причем $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x, t, y) = \rho(y)$. Действительно, эргодичность в силу условий Б) следует из результатов работы [8], так как при $|x| \geq R > |b(0)|/\lambda$ имеем $xb(x) \leq -\lambda x^2 + |b(0)||x| \leq -(\lambda R - |b(0)|)|x|$, т. е. условия соответствующей теоремы из работы [8] выполнены.

Нетрудно заметить, что решением уравнения (8) является функция [3]

$$U(x) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(y) - \bar{f}] \rho(x, t, y) dy dt = \int_0^{+\infty} M[f(\eta_x(t)) - \bar{f}] dt,$$

где

$$\eta_x(t) = x + \int_0^t b(\eta_x(s)) ds + \int_0^t \sigma(\eta_x(s)) dW(t). \quad (12)$$

Поскольку для плотности $\rho(x, t, y)$ справедливо соотношение (обратное уравнение Колмогорова)

$$\frac{\partial \rho(x, t, y)}{\partial t} = b(x) \frac{\partial \rho(x, t, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2 \rho(x, t, y)}{\partial x^2},$$

то

$$\begin{aligned} b(x) \frac{dU(x)}{dx} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} &= - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(y) - \bar{f}] \frac{\partial \rho(x, t, y)}{\partial t} dt dy = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} [f(y) - \bar{f}] \rho(y) dy + [f(x) - \bar{f}] = [f(x) - \bar{f}]. \end{aligned}$$

Пусть $f(x)$ имеет ограниченную производную, тогда

$$U'_x(x) = - \int_0^{+\infty} M[f'_x(\eta_x(t))] \frac{d\eta_x(t)}{dx} dt. \quad (13)$$

Дифференцируя (12) по x , имеем [9]

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_x(t)}{dx} = \\ = \exp \left\{ \int_0^t b'_x(\eta_x(s)) ds - \frac{1}{2} \int_0^t [\sigma'_x(\eta_x(s))]^2 ds + \int_0^t \sigma'_x(\eta_x(s)) dW(s) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получаем

$$\begin{aligned} U'_x(x) = - \int_0^{+\infty} M[f'_x(\eta_x(t))] \times \\ \times \exp \left\{ \int_0^t b'_x(\eta_x(s)) ds - \frac{1}{2} \int_0^t [\sigma'_x(\eta_x(s))]^2 ds + \int_0^t \sigma'_x(\eta_x(s)) dW(s) \right\} dt. \end{aligned}$$

В силу того, что $|f'_x(x)| \leq C < +\infty$, и в силу условия Б) $b'_x(x) \leq -\lambda$, $\lambda > 0$, имеем

$$\begin{aligned} |U'_x(x)| \leq \\ \leq \int_0^{+\infty} CM \exp \left\{ -\lambda \int_0^t ds - \frac{1}{2} \int_0^t [\sigma'_x(\eta_x(s))]^2 ds + \int_0^t \sigma'_x(\eta_x(s)) dW(s) \right\} dt \leq \frac{\bar{C}}{\lambda}, \end{aligned} \quad (15)$$

так как

$$M \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t [\sigma'_x(\eta_x(s))]^2 ds + \int_0^t \sigma'_x(\eta_x(s)) dW(s) \right\} = 1.$$

Покажем, что в сделанных относительно коэффициентов предположениях существует равномерная по $t \geq 0$ оценка сверху для

$$m(t) = M\eta^2(t).$$

Используя формулу Ито, находим

$$\eta^2(t) = \eta_0^2 + \int_0^t 2\eta(s)b(\eta(s))ds + \int_0^s \sigma^2(\eta(s))ds + \int_0^s 2\eta(s)\sigma(\eta(s))dW(s).$$

Отсюда

$$m(t) = \eta_0^2 + \int_0^t 2M\eta(s)b(\eta(s))ds + \int_0^s M\sigma^2(\eta(s))ds$$

и

$$\begin{aligned} dm(t) &= 2M\eta(t)b(\eta(t))dt + M\sigma^2(\eta(t))dt \leq \\ &\leq -2\lambda m(t)dt + 2\lambda|b(0)|M|\eta(t)| + M\sigma^2(\eta(t))dt \leq \\ &\leq -2\lambda m(t)dt + 2\lambda|b(0)|\sqrt{m(t)}dt + \frac{1}{\gamma}dt. \end{aligned}$$

Умножая обе части последнего неравенства на $\exp\{-2\lambda t\}$, получаем

$$dl^{2\lambda t}m(t) \leq l^{2\lambda t} \left[2\lambda |b(0)| \sqrt{m(t)} + \frac{1}{\gamma} \right] dt,$$

откуда

$$\begin{aligned} l^{2\lambda t}m(t) &\leq M\eta_0^2 + 2\lambda |b(0)| \int_0^t l^{2\lambda s} \sqrt{m(s)} ds + \frac{l^{2\lambda t} - 1}{2\gamma\lambda} \leq \\ &\leq M\eta_0^2 + 2\lambda |b(0)| \int_0^t l^{\lambda s} \sqrt{m(s)l^{2\lambda s}} ds + \frac{l^{2\lambda t} - 1}{2\gamma\lambda}. \end{aligned}$$

Пусть $V(t) = l^{2\lambda t}m(t)$, тогда из последнего неравенства имеем

$$V(t) \leq M\eta_0^2 + \frac{l^{2\lambda t} - 1}{2\gamma\lambda} + 2\lambda |b(0)| \int_0^t l^{\lambda s} \sqrt{V(s)} ds.$$

Пусть

$$Z(t) = M\eta_0^2 + \frac{l^{2\lambda t} - 1}{2\gamma\lambda} + 2\lambda |b(0)| \int_0^t l^{\lambda s} \sqrt{V(s)} ds,$$

тогда

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{l^{2\lambda t}}{\gamma} + 2\lambda |b(0)| l^{\lambda t} \sqrt{V(t)} \leq \frac{l^{2\lambda t}}{\gamma} + 2\lambda |b(0)| l^{\lambda t} \sqrt{Z(t)}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} \frac{dZ(t)}{2\sqrt{Z(t)}} &\leq \frac{l^{2\lambda t}}{2\gamma\sqrt{Z(t)}} + \lambda |b(0)| l^{\lambda t} \leq \frac{l^{2\lambda t}}{2\gamma\sqrt{M\eta_0^2 + (l^{2\lambda t} - 1)/(2\gamma\lambda)}} + \lambda |b(0)| l^{\lambda t} \leq \\ &\leq \frac{l^{\lambda t}}{2\gamma\sqrt{M\eta_0^2 l^{-2\lambda t} + (1 - l^{-2\lambda t})/(2\gamma\lambda)}} + \lambda |b(0)| l^{\lambda t} \leq \\ &\leq \frac{l^{\lambda t}}{2\gamma\sqrt{M\eta_0^2}} + \lambda |b(0)| l^{\lambda t}, \end{aligned}$$

если $M\eta_0^2 \leq 1/(2\lambda\gamma)$, и

$$\frac{dZ(t)}{2\sqrt{Z(t)}} \leq l^{\lambda t} \sqrt{\frac{\lambda}{2\gamma}} + \lambda |b(0)| l^{\lambda t},$$

если $M\eta_0^2 > 1/(2\lambda\gamma)$.

Таким образом, в случае, когда $M\eta_0^2 \leq 1/(2\lambda\gamma)$, имеем

$$\sqrt{Z(t)} \leq \sqrt{M\eta_0^2} + \left(\frac{1}{2\gamma\sqrt{M\eta_0^2}} + 2\lambda |b(0)| \right) \frac{l^{\lambda t} - 1}{\lambda},$$

откуда

$$M\eta^2(t) \leq V(t)l^{-2\lambda t} \leq Z(t)l^{-2\lambda t} \leq$$

$$\leq l^{-2\lambda t} \left[\sqrt{M\eta_0^2} + \left(\frac{1}{2\gamma\sqrt{M\eta_0^2}} + 2\lambda|b(0)| \right) \frac{l^{\lambda t} - 1}{\lambda} \right]^2 \leq$$

$$\leq \left[\sqrt{M\eta_0^2} + \left(\frac{1}{2\gamma\sqrt{M\eta_0^2}} + 2\lambda|b(0)| \right) \frac{1}{\lambda} \right]^2 \leq \left[\sqrt{M\eta_0^2} + \frac{1}{2\gamma\lambda\sqrt{M\eta_0^2}} + 2|b(0)| \right],$$

либо

$$M\eta^2(t) \leq V(t)l^{-2\lambda t} \leq Z(t)l^{-2\lambda t} \leq$$

$$\leq l^{-2\lambda t} \left[\sqrt{M\eta_0^2} + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2\gamma}} + 2\lambda|b(0)| \right) \frac{l^{\lambda t} - 1}{\lambda} \right]^2 \leq \left[\sqrt{M\eta_0^2} + \sqrt{\frac{1}{2\lambda\gamma}} + 2|b(0)| \right]^2,$$

если $M\eta_0^2 > 1/(2\lambda\gamma)$.

Из полученных оценок очевидным образом следует оценка

$$M\eta^2(t) \leq 4 \left[\sqrt{M\eta_0^2} + 2|b(0)| \right]^2 = C_0 < +\infty. \quad (16)$$

Для процесса $\eta(t)$, у которого начальное распределение совпадает с эргодическим, очевидно

$$M\eta_0^2 = M\eta^2(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp \left\{ \int_0^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right\} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp \left\{ \int_0^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right\} dx \right]^{-1} dx =$$

$$= C_1 < +\infty. \quad (17)$$

Если коэффициент $a(x)$ уравнения (6) такой, что

$$|a(x)| \leq \tilde{C} < +\infty, \quad g(x) = \int_0^x \frac{dy}{a(y)},$$

причем для всех x функции $g(x)$ и $g^{-1}(x)$ определены, то нетрудно заметить, что

$$dg \left(\xi_\varepsilon \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right) = \bar{f} dt + \left[f \left(\eta \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right) - \bar{f} \right] dt \quad (18)$$

с начальным условием $g(\xi_0)$.

Рассмотрим наряду с (18) дифференциал

$$dg(Z_0(t)) = \bar{f} dt \quad (19)$$

с начальным условием $g(\xi_0)$. Из (18) и (19) имеем

$$g \left(\xi_\varepsilon \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right) - g(Z_0(t)) = \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(t)) - \bar{f}] dt.$$

Если

$$Y_\varepsilon \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) = g \left(\xi_\varepsilon \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right), \quad V_0(t) = g(Z_0(t)),$$

то

$$\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = g^{-1}\left(Y_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right), \quad Z_0(t) = g^{-1}(V_0(t)),$$

откуда при $0 \leq \theta \leq 1$ получаем

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - Z_0(t) &= g^{-1}\left(Y_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - g^{-1}(V_0(t)) = \\ &= a\left(g^{-1}\left(V_0(t) + \theta\left[Y_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - V_0(t)\right]\right)\right)\left[Y_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - V_0(t)\right], \end{aligned}$$

а так как

$$|a(x)| \leq \tilde{C} < +\infty,$$

то

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - Z_0(t) \right|^2 &\leq \tilde{C}^2 M \sup_{0 \leq t \leq T} \left| g\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - g(Z_0(t)) \right|^2 \leq \\ &\leq \tilde{C}^2 M \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(t)) - \bar{f}] dt \right]^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть $g^{-1}(Y_0(t)) = Z_0(t)$, тогда

$$dZ_0(t) = dg^{-1}(Y_0(t)) = \frac{\bar{f}}{g'_x(g^{-1}(Y_0(t)))} dt = a(Z_0(t))\bar{f} dt, \quad Z_0(0) = x.$$

Из рассуждений, приведенных выше, вытекает следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполнены условия А) и Б). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - Z_0(t) \right|^2 &\leq \\ &\leq \tilde{C}^2 \left(\varepsilon^2 4 \frac{\bar{C}^2}{\lambda^2} \left[M\eta_0^2 + 4 \left[\sqrt{M\eta_0^2} + |b(0)| \right]^2 \right] + \varepsilon T \frac{\bar{C}^2}{\gamma\lambda^2} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

если верно (16), либо

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - Z_0(t) \right|^2 \leq \tilde{C}^2 \left(\varepsilon^2 4 C_1 \frac{\bar{C}^2}{\lambda^2} + \varepsilon T \frac{\bar{C}^2}{\gamma\lambda^2} \right), \quad (22)$$

если верно (17). Здесь $Z_0(t)$ — решение задачи

$$dZ_0(t) = a(Z_0(t))\bar{f} dt, \quad Z_0(0) = \xi_0.$$

Доказательство. Применяя формулу Ито к функции $U(x)$, после интегрирования имеем

$$U\left(\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - U(\eta(0)) = \int_0^{t/\varepsilon} LU(\eta(s)) ds + \int_0^{t/\varepsilon} \sigma(\eta(s))U'_x(\eta(s))dW(s),$$

откуда с учетом (8)

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(t)) - \bar{f}] dt &= \varepsilon \left[U(\eta(0)) - U\left(\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) \right] + \\ &+ \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} \sigma(\eta(s))U'_x(\eta(s))dW(s). \end{aligned} \quad (23)$$

Из (23) с учетом (13) и (14) получаем оценку

$$\begin{aligned} & M \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(t)) - \bar{f}] dt \right]^2 \leq \\ & \leq \varepsilon^2 4 \frac{\bar{C}^2}{\lambda^2} \left[M\eta_0^2 + 4 \left[\sqrt{M\eta_0^2} + |b(0)| \right]^2 \right] + \varepsilon T \frac{\bar{C}^2}{\gamma \lambda^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

а с учетом (15), (17) имеем

$$M \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(t)) - \bar{f}] dt \right]^2 \leq \varepsilon^2 4 C_1 \frac{\bar{C}^2}{\lambda^2} + \varepsilon T \frac{\bar{C}^2}{\gamma \lambda^2}. \quad (25)$$

Из (24) и (20) следует (21) (аналогично из (25) и (20) следует (22)).

Исследование системы уравнений типа (6), (7) представляет интерес на временном интервале порядка $1/\varepsilon^2$. Так, если на временном интервале порядка $1/\varepsilon$ предельным значением будет неслучайный процесс $Z_0(t)$, то во времени t/ε^2 предельным процессом для системы вида (6) уже будет некоторый стохастический процесс. Предположим следующее. Пусть дана система

$$d\xi_\varepsilon(t) = a(\xi_\varepsilon(t))\eta(t)dt, \quad \xi_\varepsilon(0) = 0, \quad (26)$$

где эргодический процесс $\eta(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяет уравнению

$$d\eta(t) = b(\eta(t)) + \sigma(\eta(t))dW(t), \quad \eta(0) = \eta_0. \quad (27)$$

Здесь η_0 — независимая от $\eta(t)$ случайная величина, распределение которой совпадает с эргодическим распределением.

Относительно коэффициента $\sigma(x)$ будем предполагать выполненными условия: существуют непрерывные производные $\sigma'_x(x)$, $\sigma''_{xx}(x)$, причем производные старших порядков ограничены,

$$b(x) = -\lambda x, \quad \lambda > 0,$$

$$0 < \gamma \leq \sigma^2(x) \leq \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma \in (0, 1].$$

Пусть $U(x)$ — решение уравнения

$$x = -\lambda x \frac{dU(x)}{dx} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2U(x)}{dx^2}. \quad (28)$$

Плотность инвариантного распределения, очевидно, имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp \left\{ \int_0^x \frac{-2\lambda y}{\sigma^2(y)} dy \right\} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp \left\{ \int_0^x \frac{-2\lambda y}{\sigma^2(y)} dy \right\} dx \right]^{-1}.$$

Очевидно также, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x) dx = 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$U(x) = - \int_0^{+\infty} M \eta_x(t) dt = - \frac{x}{\lambda}.$$

Действительно,

$$M\eta_x(t) = x - \lambda \int_0^t M\eta_x(s) ds,$$

откуда $M\eta_x(t) = x e^{-\lambda t}$. Из (26) следует

$$\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) = \int_0^t a\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right) \varepsilon \eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) dt. \quad (29)$$

Пусть снова

$$g(x) = \int_0^x \frac{dy}{a(y)},$$

тогда из (29) имеем

$$g\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) = \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \eta(s) ds.$$

Оценим скорость сближения процесса

$$\zeta_\varepsilon(t) = \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \eta(s) ds$$

с некоторым семейством винеровских процессов. Аналогично (23) с учетом (28) имеем

$$\zeta_\varepsilon(t) = \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \eta(s) ds = \varepsilon \eta_0 - \varepsilon \eta\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) - \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \sigma(\eta(s)) \frac{1}{\lambda} dW(s). \quad (30)$$

Аналогично (8) рассмотрим уравнение

$$\frac{\sigma^2(x) - \sigma_0^2}{\lambda^2} = -\lambda x \frac{dU(x)}{dx} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2U(x)}{dx^2}, \quad (31)$$

$$\sigma_0^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2(x) \rho(x) dx.$$

Решение (31) запишем в виде

$$U(x) = \int_0^{+\infty} M \frac{\sigma^2(\eta_x(t)) - \sigma_0^2}{\lambda^2} dt.$$

По предположению существует $\sigma'_x(x)$, $|\sigma'_x(x)| \leq C < +\infty$, тогда

$$|U'_x(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{C}{\sqrt{\gamma}} M \exp\left\{-\lambda \int_0^t ds - \frac{1}{2} \int_0^t [\sigma'_x(\eta_x(s))]^2 ds + \int_0^t \sigma'_x(\eta_x(s)) dW(s)\right\} dt \leq \frac{C}{\lambda \sqrt{\gamma}}.$$

Очевидно также, что

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} |\eta(t)| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \rho(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp \left\{ \int_0^x \frac{-2\lambda y}{\sigma^2(y)} dy \right\} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp \left\{ \int_0^x \frac{-2\lambda y}{\sigma^2(y)} dy \right\} dx \right]^{-1} dx = \bar{C}_1 < +\infty. \end{aligned}$$

Применяя формулу Ито к функции $U(x)$, после интегрирования получаем

$$U\left(\eta\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) - U(\eta(0)) = \int_0^{t/\varepsilon^2} LU(\eta(s)) ds + \int_0^{t/\varepsilon^2} \sigma(\eta(s)) U'_x(\eta(s)) dW(s),$$

откуда с учетом (31)

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \frac{\sigma^2(\eta(t)) - \sigma_0^2}{\lambda^2} dt &= \varepsilon^2 \left[U(\eta(0)) - U\left(\eta\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \sigma(\eta(s)) U'_x(\eta(s)) dW(s). \end{aligned} \quad (32)$$

Из (32) с учетом стационарности процесса $\eta(t)$ и полученных оценок имеем

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \frac{\sigma^2(\eta(t)) - \sigma_0^2}{\lambda^2} dt \right| \leq 2\varepsilon^2 \bar{C}_1 + \varepsilon T \frac{C}{\lambda\gamma}.$$

Из (30) в силу теоремы следует оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \zeta_\varepsilon(t) - \frac{\sigma_0}{\lambda} W_\varepsilon(t) \right|^2 \leq 2\varepsilon^2 \bar{C}_1 + \varepsilon \left(\frac{TC}{\lambda\gamma} + 2\bar{C}_1 \right).$$

Теорема 3. Пусть для коэффициентов уравнения (26) выполнено условие А), а относительно коэффициентов $b(x)$, $\sigma(x)$ уравнения (27) будем предполагать выполненными условия: $b(x) = -\lambda x$, $\lambda > 0$, существуют непрерывные производные $\sigma'_x(x)$, $\sigma''_{xx}(x)$, причем производные старших порядков ограничены,

$$0 < \gamma \leq \sigma^2(x) \leq \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma \in (0, 1], \quad \sigma_0^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2(x) \rho(x) dx,$$

кроме того, начальное распределение процесса $\eta(t)$ совпадает с эргодическим. Тогда справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) - Z_\varepsilon^0(t) \right| \leq 4\varepsilon^2 \tilde{C} \left(\frac{C^2}{\lambda^2} + C_1 \right) + 2\varepsilon T \frac{C\tilde{C}}{\lambda\gamma}, \quad (33)$$

где

$$dZ_\varepsilon^0(t) = a'_x(Z_\varepsilon^0(t)) a(Z_\varepsilon^0(t)) \frac{\sigma_0^2}{2\lambda^2} dt + \frac{\sigma_0}{\lambda} a(Z_\varepsilon^0(t)) dW_\varepsilon(t), \quad Z_\varepsilon^0(0) = 0.$$

Доказательство. Пусть снова

$$g(x) = \int_0^x \frac{dy}{a(y)},$$

кроме того,

$$Y_\varepsilon(t) = g\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right), \quad V_\varepsilon^0(t) = g(Z_\varepsilon^0(t)),$$

где

$$g\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) = \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \eta(s) ds, \quad g(Z_\varepsilon^0(t)) = \frac{\sigma_0}{\lambda} W_\varepsilon(t).$$

Тогда, очевидно, имеет место оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M \left| g\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) - g(Z_\varepsilon^0(t)) \right| \leq 2\varepsilon^2 \bar{C}_1 + \varepsilon \left(\frac{TC}{\lambda\gamma} + 2C_1 \right).$$

Поскольку

$$\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) = g^{-1}(Y_\varepsilon(t)), \quad Z_\varepsilon^0(t) = g^{-1}(V_\varepsilon^0(t)),$$

то

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) - Z_\varepsilon^0(t) \right| &= \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| g^{-1}(Y_\varepsilon(t)) - g^{-1}(V_\varepsilon^0(t)) \right| \leq \\ &\leq \tilde{C} \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| g\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) - g(Z_\varepsilon^0(t)) \right| \leq \tilde{C} \left[2\varepsilon^2 \bar{C}_1 + \varepsilon \left(\frac{TC}{\lambda\gamma} + 2C_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} dZ_\varepsilon^0(t) &= dg^{-1}(V_\varepsilon^0(t)) = a'_x(g^{-1}(V_\varepsilon^0(t))) a(g^{-1}(V_\varepsilon^0(t))) \frac{\sigma_0^2}{2\lambda^2} dt + \\ &+ \frac{\sigma_0}{\lambda} a(g^{-1}(V_\varepsilon^0(t))) dW_\varepsilon(t) = a'_x(Z_\varepsilon^0(t)) a(Z_\varepsilon^0(t)) \frac{\sigma_0^2}{2\lambda^2} dt + \frac{\sigma_0}{\lambda} a(Z_\varepsilon^0(t)) dW_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

то (33) также имеет место.

Теорема 3 доказана.

3. Усреднение в периодических средах.

Рассмотрим уравнение

$$d\xi_\varepsilon(t) = \varepsilon a(\xi_\varepsilon(t)) f(\eta(t)) dt, \quad \xi_\varepsilon(0) = \xi_0. \quad (34)$$

Будем считать выполненными условия:

A₁) коэффициенты уравнения (34) удовлетворяют теореме существования и единственности решения [6, с. 26], кроме того, имеет место оценка

$$|a(x)| \leq \tilde{C} < +\infty, \quad \int_0^x \frac{dy}{|a(y)|} < +\infty, \quad |x| < +\infty,$$

и существует производная $a'_x(x)$.

Пусть

$$d\eta(t) = b(\eta(t)) dt + \sigma(\eta(t)) dW(t), \quad t \geq 0, \quad (35)$$

с неслучайным начальным условием η_0 . Относительно коэффициентов уравнения (35) будем предполагать выполненными условия:

$$B_1) \gamma \leq \sigma^2(x) \leq \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma \in (0, 1],$$

функции $b(x)$, $\sigma(x)$ периодичны с периодом 1, коэффициенты $b(x)$, $\sigma^2(x)$ имеют ограниченные гельдеровы производные.

Функция $f(x)$ периодична по x с периодом 1. Будем также предполагать, что $|f(x)| \leq C < +\infty$, производные первого порядка функции $f(x)$ ограничены постоянной K и равномерно непрерывны по x . Эти ограничения назовем условием (С). Заметим, что при выполнении условия B_1) существует плотность вероятности перехода у процесса $\eta(s)$ [10, с. 371] и имеет место экспоненциально быстрая сходимость к эргодическому распределению [10, с. 373], а именно, имеет место оценка

$$\sup_{\eta_0} \left| M f(\eta(t)) - \int_0^1 f(x) \rho(x) dx \right| \leq K C t^{-\delta t}, \quad (36)$$

где положительные постоянные K, δ зависят от коэффициентов $b(x), \sigma(x)$.

Рассмотрим задачу

$$\frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2 U}{dx^2} + b(x) \frac{dU}{dx} = f(x) - \bar{f}, \quad (37)$$

$$U(x) = U(x+1), \quad U'(x) = U'(x+1).$$

Пусть

$$\vartheta(x) = \exp \left\{ \int_0^x \frac{2b(y)dy}{\sigma^2(y)} \right\},$$

$$\int_0^1 \frac{b(y)dy}{\sigma^2(y)} \neq 0,$$

тогда

$$\rho(x) = \frac{\vartheta(x)\vartheta(x+1) \int_x^{x+1} \vartheta^{-1}(y)dy}{\sigma^2(x)[\vartheta(x) - \vartheta(x+1)]} \left[\int_0^1 \frac{\vartheta(x)\vartheta(x+1) \int_x^{x+1} \vartheta^{-1}(y)dy}{\sigma^2(x)[\vartheta(x) - \vartheta(x+1)]} dx \right]^{-1} \quad (38)$$

будет плотностью эргодической меры, соответствующей решению уравнения (35), причем $\rho(x)$ -решение периодической задачи

$$L^* \rho = \frac{1}{2} \frac{d^2(\rho(x)\sigma^2(x))}{dx^2} - \frac{d(\rho(x)b(x))}{dx} = 0,$$

$$\rho(x) = \rho(x+1),$$

однозначно определяется условием нормировки

$$\int_0^1 \rho(x) dx = 1.$$

Пусть

$$\int_0^1 \frac{b(y)dy}{\sigma^2(y)} = 0,$$

тогда

$$\rho(x) = \frac{\vartheta(x)}{\sigma^2(x)} \left[\int_0^1 \frac{\vartheta(y)dy}{\sigma^2(y)} \right]^{-1}. \quad (39)$$

Пусть

$$\int_0^1 f(x)\rho(x)dx = \bar{f}.$$

Поскольку

$$\int_0^1 [f(x) - \bar{f}]\rho(x)dx = \bar{f} - \bar{f} = 0,$$

где $\rho(x)$ определено либо в (38), либо в (39) в зависимости от того, имеет место

$$\int_0^1 \frac{b(y)dy}{\sigma^2(y)} \neq 0 \quad \text{или} \quad \int_0^1 \frac{b(y)dy}{\sigma^2(y)} = 0,$$

в силу теоремы Фредгольма [7] решение $U(x)$ задачи (37) существует и, как нетрудно заметить, производная от решения

$$\Psi(x) = \frac{dU}{dx}(x) = \frac{\int_x^{x+1} (2\vartheta(y)[f(y) - \bar{f}]/\sigma^2(y))dy}{\vartheta(x+1) - \vartheta(x)}, \quad \text{если} \quad \int_0^1 \frac{b(y)dy}{\sigma^2(y)} \neq 0, \quad (40)$$

либо

$$\Psi(x) = C\vartheta^{-1}(x) + \Psi_0(x), \quad \text{если} \quad \int_0^1 \frac{b(y)dy}{\sigma^2(y)} = 0,$$

где $\Psi_0(x)$ — некоторое частное решение (37).

Заметим, что если

$$\int_0^1 \Psi(x)dx = 0,$$

то нахождение в явном виде функции $U(x)$ необязательно, достаточно знать лишь оценку ее модуля, которая непосредственно следует из неравенства

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |U(x)| \leq \int_0^1 |\Psi(x)|dx \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |\Psi(x)| = D_1 < +\infty. \quad (41)$$

В силу (37) имеем

$$\varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(s)) - \bar{f}]ds = \varepsilon \rho \left[U(\eta_0) - U\left(\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) \right] + \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} \sigma(\eta(s))\Psi(\eta(s))dW(s),$$

откуда

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(s)) - \bar{f}]ds \right| &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} \sigma(\eta(s))\Psi(\eta(s))dW(s) \right| + \varepsilon 2D_1 \leq \\ &\leq \varepsilon 2D_1 + T \frac{D_1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

В силу (37) также имеем

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(s)) - \bar{f}] ds = \\ & = \sqrt{\varepsilon} \left[U(\eta_0) - U\left(\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) \right] + \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \sigma(\eta(s)) \psi(\eta(s)) dW(s), \end{aligned}$$

т. е.

$$\sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(s)) - \bar{f}] ds = \rho_t^\varepsilon + \mu_t^\varepsilon.$$

В силу (41) очевидно, что

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |\rho_t^\varepsilon| \leq \sqrt{\varepsilon} 2D_1.$$

Таким образом,

$$\left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(s)) - \bar{f}] ds - \mu_t^\varepsilon \right| \leq \sqrt{\varepsilon} 2D_1, \quad (42)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(s)) - \bar{f}] ds \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \left(2D_1 \sqrt{\varepsilon} + D_1 \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\gamma}} \right). \quad (43)$$

Поскольку

$$\mu_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \sigma(\eta(s)) \psi(\eta(s)) dW(s),$$

то

$$\langle \mu, \mu \rangle_t = \int_0^t [\sigma(\eta(s)) \psi(\eta(s))]^2 ds \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty,$$

с вероятностью 1. Последнее очевидно, так как в силу условия (36) с вероятностью 1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon \langle \mu, \mu \rangle_{1/\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} [\sigma(\eta(s)) \psi(\eta(s))]^2 ds = \\ &= \int_0^1 \sigma^2(x) \psi^2(x) \rho(x) dx. \end{aligned}$$

В справедливости последнего можно также убедиться путем следующих рассуждений. Для функции $f(x) = \sigma^2(x) \psi^2(x)$ найдем решение задачи

$$\frac{d\bar{\Psi}}{dx} + \frac{2b(x)}{\sigma^2(x)} \bar{\Psi}(x) = \frac{2[\sigma^2(x) \psi^2(x) - \bar{\sigma}_0^2]}{\sigma^2(x)}, \quad \bar{\sigma}_0^2 = \int_0^1 \sigma^2(x) \psi^2(x) \rho(x) dx, \quad (44)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \bar{\Psi}(x+1).$$

Очевидно, что оно будет иметь вид (40), а именно

$$\bar{\Psi}(x) = \frac{d\bar{U}}{dx}(x) = \frac{\int_x^{x+1} (2\vartheta(y) [\sigma^2(x)\psi^2(x) - \bar{\sigma}_0^2] / \sigma^2(y)) dy}{\vartheta(x+1) - \vartheta(x)},$$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\bar{\Psi}(x)| = D_2. \quad (45)$$

Далее из (37), применяя формулу Ито и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \int_0^n [\sigma^2(\eta(s))\psi^2(\eta(s)) ds - \bar{\sigma}_0^2] ds = \\ & = \frac{\bar{U}(\eta(n)) - \bar{U}(\eta_0)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^n \sigma(\eta(s)) \frac{d\bar{U}(\eta(s))}{ds} dW(s). \end{aligned}$$

В силу условия (36) имеем

$$M\eta^4(n) + \eta_0^4 \leq \eta_0^4 + \int_0^1 x^4 \rho(x) dx + Kl^{-\delta n},$$

откуда в силу того, что

$$M \left[\frac{1}{n} \int_0^n \sigma(\eta(s)) \frac{d\bar{U}(\eta(s))}{ds} dW(s) \right]^4 \leq \frac{\text{const}}{n^2},$$

окончательно находим

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \int_0^n [\sigma^2(\eta(s))\psi^2(\eta(s)) ds - \bar{\sigma}_0^2] ds \right| > \varepsilon \right\} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{const}}{n^2 \varepsilon^4} < +\infty,$$

т. е. имеет место стремление величины

$$\int_0^n \sigma^2(\eta(s))\psi^2(\eta(s)) ds$$

к бесконечности при $n \rightarrow +\infty$ с вероятностью 1.

Из (37), применяя формулу Ито и интегрируя, также имеем

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} [\sigma^2(\eta(s))\psi^2(\eta(s)) ds - \bar{\sigma}_0^2] ds = \\ & = \varepsilon \left[\bar{U}\left(\eta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{U}(\eta_0) \right] - \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} \sigma(\eta(s)) \frac{d\bar{U}(\eta(s))}{ds} dW(s). \end{aligned}$$

Отсюда в силу того, что при выполнении условия (36)

$$M \left| \eta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right| + |\eta_0| \leq |\eta_0| + \int_0^1 |x| \rho(x) dx + Kl^{-\delta/\varepsilon},$$

а

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\bar{\Psi}(x)| = D_2 < +\infty,$$

получаем

$$M \left| \varepsilon \left[\bar{U} \left(\eta \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right) - \bar{U}(\eta_0) \right] \right| \leq \varepsilon D_2 \left| |\eta_0| + \int_0^1 |x| \rho(x) dx + Kl^{-\delta/\varepsilon} \right|$$

и

$$\begin{aligned} M \left| \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} \sigma(\eta(s)) \frac{d\bar{U}(\eta(s))}{ds} dW(s) \right| &\leq \sqrt{\varepsilon} \frac{D_2}{\sqrt{\gamma}}, \\ M \left| \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} \left[\sigma^2(\eta(s)) \psi^2(\eta(s)) ds - \bar{\sigma}_0^2 \right] ds \right| &= \\ = \varepsilon D_2 \left| |\eta_0| + \int_0^1 |x| \rho(x) dx + Kl^{-\delta/\varepsilon} \right| + \sqrt{\varepsilon} \frac{D_2}{\sqrt{\gamma}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Теорема 4. Пусть коэффициенты уравнения (35) удовлетворяют условиям A_1 , B_1 , функция $f(x)$ непрерывная, 1-периодическая. Тогда если

$$\int_0^1 \psi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \bar{\psi}(x) dx = 0,$$

то справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq 1} M \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(s)) - \bar{f}] ds - \bar{\sigma}_0 \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon} \right| &\leq \\ \leq \sqrt{D_2} \sqrt{\varepsilon} \left| |\eta_0| + \int_0^1 |x| \rho(x) dx + Kl^{-\delta/\varepsilon} \right|^{1/2} + \sqrt[4]{\varepsilon} \frac{\sqrt{D_2}}{\sqrt[4]{\gamma}} + \sqrt{\varepsilon} 2D_1, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\int_0^1 \sigma^2(x) \bar{\psi}^2(x) \rho(x) dt = \bar{\sigma}_0^2,$$

функции $\bar{\psi}(x)$ и $\psi(x)$ выписаны в соотношениях (40) и (45), постоянные D_1 , D_2 определены в (41), (45),

$$\bar{f} = \int_0^1 f(x) \rho(x) dx, \quad \bar{\sigma}_0^2 = \int_0^1 \sigma^2(x) \bar{\psi}^2(x) \rho(x) dt,$$

$\rho(x)$ определено в (38) либо в (39).

Справедливость оценки (47) следует из оценок (42), (46) и теоремы 1.

Пусть

$$\xi_\varepsilon \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) = \xi_0 + \int_0^t a \left(\xi_\varepsilon \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) f \left(\eta \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) ds, \quad (48)$$

$|a(x)| \leq C < +\infty$, для любого x определена функция $g(x)$ и обратная к ней $g^{-1}(x)$:

$$g(x) = \int_0^x \frac{dy}{a(y)}, \quad Y_\varepsilon(t) = g \left(\xi_\varepsilon \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right), \quad \xi_\varepsilon \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) = g^{-1}(Y_\varepsilon(t)).$$

Из (48) следует

$$dY_\varepsilon(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dt$$

или

$$Y_\varepsilon(t) = g(\xi_0) + \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} f(\eta(s))ds. \quad (49)$$

Наряду с (49) рассмотрим процесс

$$Y_0(t) = g(\xi_0) + \int_0^t \bar{f} ds, \quad (50)$$

а также уравнение

$$\xi_0(t) = \xi_0 + \int_0^t a(\xi_0(s))\bar{f} ds.$$

Нетрудно заметить, что

$$Y_0(t) = g(\xi_0(t)), \quad \xi_0(t) = g^{-1}(Y_0(t)).$$

Из (49) и (50) в силу (43) следует оценка

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} M |Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)| &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} f(\eta(s))ds - \int_0^t \bar{f} ds \right| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(s)) - \bar{f}] ds \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \left(2D_1\sqrt{\varepsilon} + D_1 \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\gamma}} \right). \end{aligned}$$

Далее, очевидно, что имеет место оценка скорости сходимости к усредненному уравнению

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \xi_0(t) \right| &= \sup_{0 \leq t \leq T} M |g^{-1}(Y_\varepsilon(t)) - g^{-1}(Y_0(t))| \leq \\ &\leq C \sup_{0 \leq t \leq T} M |Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)| \leq C\sqrt{\varepsilon} \left(2D_1\sqrt{\varepsilon} + D_1 \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\gamma}} \right). \end{aligned}$$

Известно, что в стохастическом варианте принципа усреднения Н. Н. Боголюбова особое значение имеет второе приближение [11 – 13]. При довольно широких ограничениях показано, что нормированная разность $\frac{\xi_\varepsilon(t/\varepsilon) - \xi_0(t)}{\sqrt{\varepsilon}}$ в сла-

бом смысле сходится к некоторому гауссовскому процессу. Представляет интерес оценка скорости сходимости в такой процедуре. Запишем интегральное соотношение для $\zeta_\varepsilon(t)$. Нетрудно убедиться в том, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \xi_0(t) &= g^{-1}(Y_\varepsilon(t)) - g^{-1}(Y_0(t)) = \\ &= a\left(g^{-1}(Y_0(t)) + \theta[Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)]\right)[Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)], \\ \frac{\xi_\varepsilon(t/\varepsilon) - \xi_0(t)}{\sqrt{\varepsilon}} &= \frac{[Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)]}{\sqrt{\varepsilon}} a g^{-1}(Y_0(t)) + \\ &+ \frac{[Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)]}{\sqrt{\varepsilon}} \left[a\left(g^{-1}(Y_0(t)) + \theta[Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)]\right) - a g^{-1}(Y_0(t)) \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{[Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)]}{\sqrt{\varepsilon}} \left[a(g^{-1}(Y_0(t)) + \theta[Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)]) - a g^{-1}(Y_0(t)) \right] \right| \leq \\ & \leq LC \frac{[Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)]^2}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Наряду с (51) рассмотрим равенство

$$V_\varepsilon(t) = \bar{\sigma}_0 \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon} a(\xi_0(t)). \quad (52)$$

Из (51) и (52) следует

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \frac{\xi_\varepsilon(t/\varepsilon) - \xi_0(t)}{\sqrt{\varepsilon}} - V_\varepsilon(t) \right| = \\ & = \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \frac{[Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)]}{\sqrt{\varepsilon}} - \bar{\sigma}_0 \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon} \right| |a(\xi_0(t))| + LC \sup_{0 \leq t \leq T} M \frac{[Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)]^2}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Поскольку

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\psi(x)| = D_1, \quad \sup_{0 \leq x \leq 1} |\bar{\psi}(x)| = D_2, \quad \bar{f} = \int_0^1 f(x) \rho(x) dx,$$

а

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(s)) - \bar{f}] ds = \\ & = \sqrt{\varepsilon} \left[U\left(\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - U(\eta_0) \right] - \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} \sigma(\eta(s)) \frac{dU(\eta(s))}{dx} dW(s), \end{aligned} \quad (54)$$

и в силу ограниченности $\sigma^2(x)$, $\frac{dU(x)}{dx}$ имеем

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M \left[\varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} \sigma(\eta(s)) \frac{dU(\eta(s))}{dx} dW(s) \right]^2 \leq \varepsilon T D_1^2 \frac{1}{\gamma}, \quad (55)$$

то из (54) и (55) получаем

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} [f(\eta(s)) - \bar{f}] ds \right|^2 \leq \varepsilon^2 \left(4D_1^2 + T D_1^2 \frac{1}{\gamma} \right). \quad (56)$$

Из (53) и (56) следует

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \frac{\xi_\varepsilon(t/\varepsilon) - \xi_0(t)}{\sqrt{\varepsilon}} - V_\varepsilon(t) \right| \leq \\ & \leq \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \frac{[Y_\varepsilon(t) - Y_0(t)]}{\sqrt{\varepsilon}} - \bar{\sigma}_0 \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon} \right| C + LC \varepsilon^2 \left(4D_1^2 + T D_1^2 \frac{1}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Из приведенных выкладок следует такая теорема.

Теорема 5. Пусть для коэффициентов уравнений (34) и (35) выполнены условия A_1), B_1),

$$\bar{f} = \int_0^1 f(x)\rho(x)dx, \quad \int_0^1 \sigma^2(x)\bar{\psi}^2(x)\rho(x)dt = \bar{\sigma}_0^2,$$

функции $\bar{\psi}(x)$ и $\psi(x)$ выписаны в соотношениях (44) и (40),

$$\int_0^1 \psi(x)dx = 0, \quad \int_0^1 \bar{\psi}(x)dx = 0,$$

постоянные D_1, D_2 определены соотношениями (41), (44), $\rho(x)$ определено в (38). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \frac{\xi_\varepsilon(t/\varepsilon) - \xi_0(t)}{\sqrt{\varepsilon}} - \bar{\sigma}_0 \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon} a(\xi_0(t)) \right| \leq \\ \leq \sqrt[4]{\varepsilon} C_1(\varepsilon) C + LC\varepsilon^2 \left(4D_1^2 + TD_1^2 \frac{1}{\gamma} \right) + \\ + \sqrt{D_2} \sqrt{\varepsilon} \left| |\eta_0| + \int_0^1 |x| \rho(x) dx + Kl^{-\delta/\varepsilon} \right|^{1/2} + \sqrt[4]{\varepsilon} \frac{\sqrt{D_2}}{\sqrt[4]{\gamma}} + \sqrt{\varepsilon} 2D_1, \end{aligned} \quad (58)$$

где неслучайный процесс $\xi_0(t)$ является решением уравнения

$$\xi_0(t) = \xi_0 + \int_0^t a(\xi_0(s)) \bar{f} ds.$$

Неравенство (58) следует из (57) с учетом (47).

В заключение отметим, что полученный результат не противоречит известному факту [13], в силу которого нормированная разность

$$\zeta_\varepsilon(t) = \frac{\xi_\varepsilon(t/\varepsilon) - \xi_0(t)}{\sqrt{\varepsilon}}$$

слабо сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторому гауссовскому процессу, стохастический дифференциал которого имеет вид

$$d\zeta(t) = \gamma(t)\zeta(t)dt + \alpha(t)dW_t, \quad \zeta(0) = 0. \quad (59)$$

Действительно, пусть

$$V_\varepsilon(t) = \bar{\sigma}_0 \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon} a(\xi_0(t)),$$

тогда

$$\begin{aligned} dV_\varepsilon(t) &= \bar{\sigma}_0 \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon} da(\xi_0(t)) + a(\xi_0(t)) d\bar{\sigma}_0 \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon} = \\ &= a'_x(\xi_0(t)) a(\xi_0(t)) \bar{f} \bar{\sigma}_0 \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon} dt + a(\xi_0(t)) d\bar{\sigma}_0 \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon}, \end{aligned}$$

откуда

$$dV_\varepsilon(t) = a'_x(\xi_0(t)) \bar{f} V_\varepsilon(t) dt + \bar{\sigma}_0 a(\xi_0(t)) d\sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon}, \quad V_\varepsilon(0) = 0,$$

т. е. (59) имеет место.

Как отмечалось в [12, с. 303], в случае, если $\bar{f} = 0$, за время $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ процесс $\xi_\varepsilon(t)$ не отойдет на заметное расстояние от начального положения. Оказывается, что в этом случае перемещения порядка 1 происходят за временные интервалы порядка $1/\varepsilon^2$. По-видимому, на этот факт впервые было обращено внимание в работе Р. Л. Стратоновича [13]. Там же на физическом уровне строгости было установлено, что семейство процессов $\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)$ при некоторых условиях сходится к некоторому диффузионному процессу, и вычислены характеристики предельного процесса. Строгое обоснование этого утверждения было дано Р. З. Хасьминским [14]. При существенно менее ограничительных предположениях доказательство приведено в работе А. Н. Бородина [15].

Итак, пусть $\bar{f} = 0$, тогда решение предельного уравнения имеет вид $\xi_0(t) = \xi_0$. Из уравнения (34) следует

$$\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) = \xi_0 + \int_0^t a\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right) \frac{1}{\varepsilon} f\left(\eta\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right) ds. \quad (60)$$

Пусть $|a(x)| \leq \tilde{C} < +\infty$. Предположим также, что для любого x определена функция $g(x)$ и обратная к ней $g^{-1}(x)$:

$$g(x) = \int_0^x \frac{dy}{a(y)}, \quad Y_\varepsilon(t) = g\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right), \quad \xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) = g^{-1}(Y_\varepsilon(t)).$$

Из (60) следует

$$dY_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) dt,$$

или

$$Y_\varepsilon(t) = g(\xi_0) + \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} f(\eta(s)) ds. \quad (61)$$

Наряду с (61) рассмотрим

$$Y_0^\varepsilon(t) = g(\xi_0) + \bar{\sigma}_0 \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon^2} \quad (62)$$

и, соответственно,

$$\xi_0^\varepsilon(t) = g^{-1}(Y_0^\varepsilon(t)). \quad (63)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) - \xi_0^\varepsilon(t) \right| &= \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| g^{-1}(Y_0^\varepsilon(t)) - g^{-1}(Y_\varepsilon(t)) \right| \leq \\ &\leq \tilde{C} \sup_{0 \leq t \leq T} M |Y_\varepsilon(t) - Y_0^\varepsilon(t)| \leq \sqrt{\varepsilon} \tilde{C} \left(2D_1 \sqrt{\varepsilon} + D_1 \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\gamma}} \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Дифференцируя (62) с учетом (63), имеем

$$\begin{aligned} d\xi_0^\varepsilon(t) &= dg^{-1}(Y_0^\varepsilon(t)) = \\ &= \frac{a'_x(g^{-1}(Y_0^\varepsilon(t)))}{a^2(g^{-1}(Y_0^\varepsilon(t)))} a^3(g^{-1}(Y_0^\varepsilon(t))) \frac{\bar{\sigma}_0^2}{2} dt + a(g^{-1}(Y_0^\varepsilon(t))) \bar{\sigma}_0 \varepsilon W_{t/\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$d\xi_0^\varepsilon(t) = a'_x(\xi_0^\varepsilon(t))a(\xi_0^\varepsilon(t))\frac{\bar{\sigma}_0^2}{2}dt + a(\xi_0^\varepsilon(t))\bar{\sigma}_0 d\varepsilon W_{t/\varepsilon^2}. \quad (65)$$

Теорема 6. В условиях теоремы 1 при $\bar{f} = 0$ случайный процесс $\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сближается с диффузионным процессом $\xi_0^\varepsilon(t)$, являющимся решением (65), причем скорость сближения задается неравенством (64).

1. Чжун К., Уильямс Р. Введение в стохастическое интегрирование. – М.: Мир, 1987. – 152 с.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 611 с.
3. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Мартингалы и предельные теоремы для случайных процессов // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления. – 1989. – **45**. – С. 159 – 251.
4. Чикин Д. О. Функциональная предельная теорема для стационарных процессов: мартингальный подход // Теория вероятностей и ее применения. – 1989. – **14**, № 4. – С. 731 – 741.
5. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
6. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
7. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 351 с.
8. Веретенников А. Ю. Об оценках скорости перемешивания для стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. – 1987. – **32**, № 2. – С. 299 – 308.
9. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
10. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. – North-Holland Publ. Comp., 1978. – 700 p.
11. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
12. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под воздействием малых случайных возмущений. – М.: Наука, 1979. – 434 с.
13. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применения в теории оптимального управления. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1966. – 319 с.
14. Хасьминский Р. З. О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Теория вероятностей и ее применения. – 1966. – **11**, № 2. – С. 240 – 259.
15. Бородин А. Н. Предельная теорема для решения дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Там же. – 1977. – **22**, № 3. – С. 498 – 511.

Получено 03.11.2003