УДК 517.5

В. И. Рукасов, О. А. Новиков, В. И. Бодрая (Славян. пед. ун-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ $\bar{\psi}$-ИНТЕГРАЛОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ ИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

We obtain asymptotic equalities for deviations of rectangular linear means of Fourier series on classes of $\bar{\psi}$-integrals of multivariable functions

Одержано асимптотичні рівності для відхилень прямокутних лінійних середніх рядів Фур'є на класах $\bar{\psi}$-інтегралів функцій багатьох змінних.

Классы $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций одной переменной были введены в 1996 г. А. И. Степанцом (см. [1]) следующим образом.

Пусть L — пространство суммируемых 2π-периодических функций, $f \in L$ и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x)$$

— ряд Фурье функции f. Пусть, далее, $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара произвольных фиксированных систем чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, таких, что $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$, $\bar{\psi}(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)} \neq 0$, $k \in N$, и $\tilde{A}_k(f; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$.

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \tilde{A}_k(f; x)\right)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, то эту функцию обозначают $f^{\bar{\psi}}$ и называют $\bar{\psi}$-производной функции f. Функцию f при этом называют $\bar{\psi}$-интегралом функции $f^{\bar{\psi}}$.

Если функция f непрерывна и выполнено условие $\operatorname{ess\,sup}\left|f^{\bar{\psi}}(x)\right| \leq 1$, то полагают $f \in C_{\infty}^{\bar{\psi}}$.

Исследованию аппроксимативных свойств классов $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ посвящен обширный круг работ (см., например, [1 – 6]). В работах [2, 5] можно найти библиографию по вопросам, примыкающим к этой тематике. В то же время вопросы приближения классов $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных изучены в меньшей мере. Здесь следует отметить работы [7, 8], в которых изучается поведение уклонений прямоугольных сумм Фурье на этих классах. В данной статье получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений различных прямоугольных линейных средних рядов Фурье, взятых по классам $\bar{\psi}$-интегралов функций m переменных. В частности, найдены асимптотические равенства, которые обеспечивают решение задачи Колмогорова – Никольского (см. [2, с. 8]) на этих классах для прямоугольных сумм Валле Пуссена.

Классы (ψ, β)-дифференцируемых функций m переменных и $\bar{\psi}$-интегралов функций m переменных вводятся в работе [7, с. 545, 546] (см. также [8, с. 911, 912]). Приведем определение классов $\bar{\psi}$-интегралов 2π-периодических функций m переменных, следуя [7], однако, с некоторыми изменениями, необходимыми в данном изложении.

Пусть R^m — пространство m-мерных векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $T^m = \prod_{i=1}^{m}[-\pi; \pi]$ — m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m = \{ \vec{x} \in R^m \,|\, x_i \in N,\ i = 1, 2, \ldots, m \},$$

$$N_*^m = \{ \vec{x} \in R^m \,|\, x_i \in N_* = N \cup \{0\},\ i = 1, 2, \ldots, m \}.$$

Через E^m обозначим множество точек из R^m, координаты которых принимают одно из двух значений: 0 или 1. Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной, суммируемых на кубе периодов T^m функций $f(\vec{x}) = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Следуя [7, с. 546], каждой паре точек $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие коэффициент Фурье функции f

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2} \right) dx_i. \tag{1}$$

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие гармонику

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2} \right). \tag{2}$$

Следуя [7, с. 545], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}), \tag{3}$$

где $q(\vec{k})$ — количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $\overline{m} = \{1, 2, \ldots, m\}$ и μ — произвольное подмножество из $\overline{m}$. Обозначим через $|\mu|$ количество элементов множества μ и через $\mu(r)$ — r-элементное подмножество из $\overline{m}$ $(|\mu(r)| = r)$.

Для каждого $\mu \subset \overline{m}$ введем понятие гармоники, сопряженной с $A_{\vec{k}}(f; \vec{x})$ по переменным x_i, $i \in \mu$, следующим соотношением:

$$A_{\vec{k}}^{\mu}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i \in \overline{m} \setminus \mu} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2} \right) \prod_{j \in \mu} \cos\left(k_j x_j - \frac{(s_j + 1)\pi}{2} \right).$$

Понятие $\bar{\psi}$-производных функций многих переменных введем по аналогии с одномерным случаем (см. [1]). Поскольку наличие частных производных по отдельным переменным не всегда влечет за собой наличие смешанных частных производных по этим же переменным и этих же порядков, будем использовать два набора систем чисел: один для определения частных производных по отдельным переменным, второй для определения смешанных частных производных.

Пусть $\bar{\psi}_i = (\psi_{i1}(k), \psi_{i2}(k))$, $\bar{\Psi}_i = (\Psi_{i1}(k), \Psi_{i2}(k))$, $i \in \overline{m}$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — наборы систем чисел таких, что для всех $i \in \overline{m}$, $k \in N$ выполняются условия

$$\begin{gathered} \psi_{i1}(0) = 1, \quad \Psi_{i1}(0) = 1, \quad \psi_{i2}(0) = 0, \quad \Psi_{i2}(0) = 0, \\ \bar{\psi}_i^2(k) = \psi_{i1}^2(k) + \psi_{i2}^2(k) \neq 0, \quad \bar{\Psi}_i^2(k) = \Psi_{i1}^2(k) + \Psi_{i2}^2(k) \neq 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Если для фиксированного $r \in \overline{m}$ существует функция $f^{\overline{\psi}_r}(\vec{x}) \in L(T^m)$ такая, что

$$S[f^{\overline{\psi}_r}] = \sum_{\vec{k} \in N_r^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}\overline{\psi}_r^2(k_r)} \left(\psi_{r1}(k_r) A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) - \psi_{r2}(k_r) A_{\vec{k}}^{\{r\}}(f; \vec{x})\right), \tag{5}$$

где N_r^m — множество точек $\vec{k} \in N_*^m$, у которых $k_r \neq 0$, то будем говорить, что $f^{\overline{\psi}_r}(\vec{x})$ является частной $\overline{\psi}_r$-производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_r. Для функции $f^{\overline{\psi}_r}(\vec{x})$ будем иногда использовать естественное для частных производных обозначение $\dfrac{\partial^{\overline{\psi}_r} f(\vec{x})}{\partial x_r}$.

Для фиксированного набора $\mu \subset \overline{m}$, $\mu = (r_1, r_2, \ldots, r_{|\mu|})$, смешанной $\overline{\Psi}_\mu$-производной по переменным x_i, $i \in \mu$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, будем называть функцию $f^{\overline{\Psi}_\mu}$, ряд Фурье которой является результатом последовательного применения формулы (5) к ряду Фурье функции f, но с использованием вместо систем чисел $\psi_{ij}(k)$ соответственно $\Psi_{ij}(k)$, $i \in \mu$, $j = 1, 2$:

$$f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_{r_{|\mu|}}} \partial^{\overline{\Psi}_{r_{|\mu|-1}}} \ldots \partial^{\overline{\Psi}_{r_1}} f(\vec{x})}{\partial x_{r_{|\mu|}} \partial x_{r_{|\mu|-1}} \ldots \partial x_{r_1}}.$$

Множество функций $f \in L(T^m)$ таких, что существуют $\overline{\psi}_i$-производные $f^{\overline{\psi}_i}$ для любых $i \in \overline{m}$ и смешанные $\overline{\Psi}_\mu$-производные $f^{\overline{\Psi}_\mu}$ для всех $\mu \subset \overline{m}$, будем обозначать $L^{m\overline{\Psi}}$, а подмножество непрерывных функций из $L^{m\overline{\Psi}}$ — $C^{m\overline{\Psi}}$. Множество функций из $C^{m\overline{\Psi}}$, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{ess\,sup} \left| f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) \right| \leq 1, \qquad \operatorname{ess\,sup} \left| f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) \right| \leq \mathcal{K} < \infty, \qquad i \in \overline{m}, \quad \mu \subset \overline{m},$$

будем обозначать $C_\infty^{m\overline{\Psi}}$.

В случае, когда $m = 2$ и существуют системы чисел $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ и числа β_i, β_i^* такие, что $\psi_{i1}(k) = \psi_i(k) \cos \dfrac{\beta_i \pi}{2}$, $\psi_{i2}(k) = \psi_i(k) \sin \dfrac{\beta_i \pi}{2}$, $\Psi_{i1}(k) = \Psi_i(k) \cos \dfrac{\beta_i^* \pi}{2}$, $\Psi_{i2}(k) = \Psi_i(k) \sin \dfrac{\beta_i^* \pi}{2}$, $i = 1, 2$, $C_\infty^{m\overline{\Psi}}$ является классом (ψ, β)-дифференцируемых функций двух переменных, которые были введены в работе [9]. Если, кроме того, для чисел $r > 0$, $s > 0$, $r_1 \geq r$, $s_1 \geq s$ выполнены условия $\Psi_1(k) = k^{-r}$, $\Psi_2(k) = k^{-s}$, $\psi_1(k) = k^{-r_1}$, $\psi_2(k) = k^{-s_1}$, то классы $C_\infty^{m\overline{\Psi}}$ совпадают с классами $W_{r_1, s_1}^{r, s}$. В работе [10] (см. также [3, 11]) изучены вопросы приближения классов $W_{r_1, s_1}^{r, s}$ прямоугольными суммами Фурье

$$S_{\vec{n}}(f; x) = S_{n_1, n_2}(f; x) = \sum_{k_1 = 0}^{n_1} \sum_{k_2 = 0}^{n_2} 2^{-q(\vec{k})} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}).$$

Там же (см. [10, с. 604]) для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье $S_{\vec{n}}(f; \vec{x})$, взятых по классам $W_{r_1, s_1}^{r, s}$,

$$\mathscr{E}(W^{r,s}_{r_1,s_1}; S_{\vec{n}}) = \sup_{f \in W^{r,s}_{r_1,s_1}} \| f(\cdot) - S_{\vec{n}}(f;\cdot) \|_C$$

при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2$, получено асимптотическое равенство

$$\mathscr{E}(W^{r,s}_{r_1,s_1}; S_{\vec{n}}) = \frac{4\ln n_1}{\pi^2 n_1^{r_1}} + \frac{4\ln n_2}{\pi^2 n_2^{s_1}} + O(1)\left(\frac{\ln n_1 \ln n_2}{n_1^r n_2^s} + \frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{s_1}} \right). \tag{6}$$

Следуя [3] (см. также [2, 9]), прямоугольные линейные средние рядов Фурье определим следующим образом.

Пусть $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m)$— фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i = \{\lambda^{(n_i)}_{k_i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\vec{n} \in N^m$, $\vec{k} \in N^m_*$, $\lambda^{(n_i)}_0 = 1$ и $\lambda^{(n_i)}_{k_i} = 0$ для $k_i \geq n_i$. Пусть, далее, $\lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}} = \prod_{i=1}^{m} \lambda^{(n_i)}_{k_i}$ и $G_{\vec{n}} = \prod_{i=1}^{m} [0; n_i - 1]$ — прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n} \in N^m$. Понятно, что $\lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}} = 0$ для любых $\vec{k} \notin G_{\vec{n}}$.

Функции $f \in L(T^m)$, имеющей ряд Фурье (3), поставим в соответствие семейство тригонометрических полиномов

$$U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = \sum_{\vec{k} \in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})} \lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}). \tag{7}$$

При $\lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}} \equiv 1$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = S_{\vec{n}}(f; \vec{x})$ являются прямоугольными частичными суммами ряда Фурье.

Если величины $\lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}}$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, $\vec{n} \in N^m$, задаются соотношениями

$$\lambda^{(n_i)}_{k_i} = \begin{cases} 1, & 0 \leq k_i \leq n_i - p_i, \\ 1 - \dfrac{k_i - n_i + p_i}{p_i}, & n_i - p_i \leq k_i \leq n_i - 1, \quad p_i \in N, \quad p_i \leq n_i, \quad i \in \overline{m}, \end{cases}$$

то многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) \equiv V_{\vec{n},\vec{p}}(f; \vec{x})$ будем называть прямоугольными суммами Валле Пуссена.

Величины $\delta_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda)$ являются уклонениями многочленов $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda)$, $\vec{n} \in N^m$, от функции $f(\vec{x})$.

Целью данной работы является исследование асимптотического поведения величин

$$\mathscr{E}(C^{m\overline{\psi}}_\infty; U_{\vec{n}}) = \sup_{f \in C^{m\overline{\psi}}_\infty} \| \delta_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) \|_C$$

при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Найдем интегральные представления величин $\delta_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda)$. Для этого воспользуемся приемами, предложенными в [2, с. 52 – 56].

Через $\{\lambda_{n_i}(v)\}$, $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in N^m$, обозначим семейство заданных и непрерывных на $[0; 1]$ функций таких, что $\lambda^{(n_i)}_{k_i} = \lambda_{n_i}\left(\dfrac{k_i}{n_i}\right)$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$.

Введем функции

$$\tau_{ij}(v) = \begin{cases} (1-\lambda_{n_i}(v))\psi_{ij}(n_i v), & \frac{1}{n_i} \le v \le 1, \\ \psi_{ij}(n_i v), & 1 \le v, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \end{cases} \tag{8}$$

$$T_{ij}(v) = \begin{cases} (1-\lambda_{n_i}(v))\Psi_{ij}(n_i v), & \frac{1}{n_i} \le v \le 1, \\ \Psi_{ij}(n_i v), & 1 \le v, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \end{cases} \tag{9}$$

которые на $\left[0; \frac{1}{n_i}\right]$ заданы так, что $\tau_{ij}(v)$, $T_{ij}(v)$ непрерывны на положительной полуоси и выполнено условие $\tau_{ij}(0) = 0$; $T_{ij}(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2$.

Для $i \in \overline{m}$, $j = 1, 2$ положим

$$\hat{\tau}_{ij}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_{ij}(v)\cos\left(vt - \frac{(j-1)\pi}{2}\right)dv,$$

$$\hat{T}_{ij}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty T_{ij}(v)\cos\left(vt - \frac{(j-1)\pi}{2}\right)dv,$$

$$A(\tau_i) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^\infty (\tau_{i1}(v)\cos vt + \tau_{i2}(v)\sin vt)dv\right|dt,$$

$$a(\tau_{ij}) = \int_{|t|\ge \pi n_i/2} \left|\hat{\tau}_{ij}(t)\right|dt.$$

Используя рассуждения работы [12, с. 259 – 262], несложно получить следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функции* $\tau_{ij}(v)$, $T_{ij}(v)$ *определены соотношениями* (8), (9) *и имеют суммируемые на* R *преобразования Фурье*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{\tau}_{ij}(t)\right|dt < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{T}_{ij}(t)\right|dt < \infty, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \qquad j = 1, 2.$$

Тогда для любой функции $f \in C_\infty^{m\overline{\Psi}}$ *в каждой точке* $\vec{x} \in T^m$ *выполняется равенство*

$$\delta_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\Psi}_k}\left(\vec{x} - \frac{t}{n_k}\vec{e}_k\right)\int_0^\infty (\tau_{k1}(v)\cos vt + \tau_{k2}(v)\sin vt)dv\,dt +$$

$$+ \sum_{r=2}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\frac{1}{\pi^r}\int_{R^r} f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x} - \sum_{j\in\mu(r)}\frac{t_j}{n_j}\vec{e}_j\right)\times$$

$$\times \prod_{\nu\in\mu(r)}\int_0^\infty (T_{\nu 1}(v_\nu)\cos v_\nu t_\nu + T_{\nu 2}(v_\nu)\cos v_\nu t_\nu)dv_\nu\,dt_\nu.$$

В качестве следствия из теоремы 1 можно получить следующее утверждение, которое является m-мерным аналогом известной леммы Теляковского [13].

Теорема 2. *Пусть функции* $\tau_{ij}(x)$, $T_{ij}(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2$, *заданы соотношениями* (8), (9) *и выполнены условия*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{\tau}_{ij}(t)\right|dt \;<\; \infty, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{T}_{ij}(t)\right|dt \;<\; \infty, \qquad i \;=\; 1, 2, \ldots, m, \qquad j \;=\; 1, 2.$$

Тогда при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}(C_\infty^{m\bar{\psi}}; U_{\vec{n}}) \;=\; \sum_{i=1}^{m} A(\tau_i) \;+\; O(1)\left[\sum_{i\in\bar{m};\, j=1,2} a(\tau_{ij}) + \sum_{i=2}^{m}\;\sum_{\mu(i)\subset\bar{m}}\;\prod_{j\in\mu(i)} A(T_j)\right]. \tag{10}$$

Следуя [1], введем множества $\mathfrak{M}$, F. Будем полагать, что функции $\psi_{ij}(v)$, $\Psi_{ij}(v)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2$, являются функциями непрерывного аргумента $v \ge 0$, совпадающими при $v \in N$ с элементами одноименных систем чисел $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, которые использовались выше для определения $\bar{\psi}_i$- и $\bar{\Psi}_\mu$-производных.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество функций $\psi(x)$, непрерывных при $x \ge 0$, монотонно убывающих, выпуклых вниз при $x \ge 1$ и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = 0$.

Функции $\psi(x)$ поставим в соответствие функцию $\eta(x) = \eta(\psi, x)$, связанную при $x \ge 1$ с $\psi(x)$ соотношением $\psi(\eta(x)) = \dfrac{1}{2}\psi(x)$.

Через F обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $\eta'(t) = \eta'(\psi, t) \le \mathrm{const}$, $t \ge 1$, $\eta'(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \eta'(t+0)$.

С помощью теоремы 2 изучение величин $\mathcal{E}(C_\infty^{m\bar{\psi}}; U_{\vec{n}})$ сводится к вычислению одномерных несобственных интегралов $A(\tau)$. В частности, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\Psi_{ij} \in F$, $\psi_{ij} \in F$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2$, *и* $(\eta(\bar{\psi}_i, n_i) - n_i)^{-1} = O(1)$, $(\eta(\bar{\Psi}_i, n_i) - n_i)^{-1} = O(1)$. *Пусть, далее, существуют числа* $r_1^{(i)}$, $r_2^{(i)}$ *такие, что* $\eta(\bar{\psi}_i, n_i - r_1^{(i)}) = n_i$, $\eta(\bar{\Psi}_i, n_i - r_2^{(i)}) = n_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Положим* $r_0^{(i)} = \min\{r_1^{(i)}, r_2^{(i)}\}$ *и* $p_i \in [1, r_0^{(i)}]$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Тогда при* $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}(C_\infty^{m\bar{\psi}}; V_{\vec{n},\vec{p}}) \;=\; \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^{m}\bar{\psi}_i(n_i)\ln\frac{r_1^{(i)}}{p_i} \;+$$

$$+\; O(1)\left[\sum_{i=1}^{m}\bar{\psi}_i(n_i) + \sum_{r=2}^{m}\;\sum_{\mu(r)\subset\bar{m}}\;\prod_{j\in\mu}\bar{\Psi}_j(n_j)\ln\frac{r_2^{(j)}}{p_j}\right]. \tag{11}$$

Доказательство. Из результатов работы [6] следует, что при выполнении условий данной теоремы имеют место асимптотические равенства

$$A(\tau_i) \;=\; \frac{4}{\pi^2}\,\bar{\psi}_i(n_i)\ln\frac{r_1^{(i)}}{p_i} \;+\; O(1)\bar{\psi}_i(n_i),$$

$$A(T_i) \;=\; O(1)\bar{\Psi}_i(n_i)\ln\frac{r_2^{(i)}}{p_i}, \qquad a(\tau_i) \;=\; O(1)\bar{\psi}_i(n_i).$$

Объединяя эти равенства и соотношение (10), непосредственно убеждаемся в справедливости формулы (11).

Теорема доказана.

Заметим, что в случае, когда $m = 2$, для прямоугольных сумм Фурье $(p_i =$

$= 1,\ i = 1, 2, \ldots, m)$ на классах $W^{r,s}_{r_1,s_1}$ соотношение (11) принимает вид равенства (6), полученного в работе [10].

1. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069 – 1113.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
4. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 1. – С. 101 – 136.
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002.
6. *Рукасов В. И., Новиков О. А., Чайченко С. О.* Приближение классов $C^{\bar{\psi}}_{\infty}$ суммами Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та її застосування: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. – С. 396 – 406.
7. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 545 – 555.
8. *Ласурия Р. А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\bar{\psi}$-дифференцируемых функций // Там же. – 2003. – **55**, № 7. – С. 911 – 918.
9. *Задерей П. В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. / Отв. ред. В. К. Дзядык. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 16 – 28.
10. *Степанец А. И.* Приближение некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных суммами Фурье // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 5. – С. 599 – 609.
11. *Степанец А. И.* Исследование по экстремальным задачам теории суммирования рядов Фурье: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1974. – 305 с.
12. *Рукасов В. И., Новиков О. А., Бодрая В. И.* Приближение классов $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. О. І. Степанець. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – **1**, № 1. – С. 250 – 269.
13. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 61 – 97.

Получено 16.04.2003,
после доработки — 17.01.2005