УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ),
Т. А. Степанюк (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

ПОРЯДКОВІ ОЦІНКИ НАЙКРАЩИХ ОРТОГОНАЛЬНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ КЛАСІВ ЗГОРТОК ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ НЕВЕЛИКОЇ ГЛАДКОСТІ

We obtain order estimates for the best uniform orthogonal trigonometric approximations of 2π-periodic functions whose (ψ, β)-derivatives belong to unit balls in the spaces L_p, $1 \le p < \infty$, in case where the sequence $\psi(k)$ is such that product $\psi(n)n^{1/p}$ may tend to zero slower than any power function and $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$ for $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ or $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ for $p = 1$. Similar estimates are also established in the L_s-metric, $1 < s \le \infty$, for the classes of summable (ψ, β)-differentiable functions such that $\| f_\beta^\psi \|_1 \le 1$.

Найдены порядковые оценки для наилучших равномерных ортогональных тригонометрических приближений на классах 2π-периодических функций таких, что их (ψ, β)-производные принадлежат единичным шарам пространств L_p, $1 \le p < \infty$, в случае, когда последовательность ψ такова, что произведение $\psi(n)n^{1/p}$, $1 \le p < \infty$, может стремиться к нулю медленнее любой степенной функции и $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$ при $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ или $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ при $p = 1$. Аналогичные оценки получены для приближений в L_s-метриках, $1 < s \le \infty$, для классов (ψ, β)-дифференцируемых функций таких, что $\|f_\beta^\psi\|_1 \le 1$.

Позначимо через L_p, $1 \le p < \infty$, простір 2π-періодичних сумовних в p-му степені на $[0, 2\pi)$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

а через L_∞ простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

Розглянемо множини 2π-періодичних дійснозначних функцій L_β^ψ, які означаються таким чином.

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функція із L_1, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt. \tag{1}$$

Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних чисел і β — фіксоване дійсне число. Тоді якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}/\{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i(kx+\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{sign} k)}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ із L_1, то цю функцію називають (див., наприклад, [1, с. 132]) (ψ,β)-похідною функції f і позначають через f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, які мають (ψ,β)-похідну, позначають через L^{ψ}_{β}.

Розглянемо одиничну кулю B_p у просторі дійснозначних функцій з L_p, тобто множину функцій $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таких, що $\|\varphi\|_p \le 1$, $1\le p\le\infty$. Якщо $f\in L^{\psi}_{\beta}$ і водночас $f^{\psi}_{\beta}\in B_p$, то будемо записувати $f\in L^{\psi}_{\beta,p}$.

Як показано в [1, с. 136], якщо послідовність $\psi(k)$ монотонно прямує до нуля при $k\to\infty$ і $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\psi(k)}{k}<\infty$, то елементи $f(x)$ множини $L^{\psi}_{\beta,p}$, $\beta\in\mathbb{R}$, майже при всіх $x\in\mathbb{R}$ можна зобразити у вигляді згортки

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi_{\beta}(x-t)\varphi(t)dt, \qquad a_0\in\mathbb{R}, \quad \varphi\in B_p, \quad \varphi\perp 1, \tag{2}$$

з сумовним ядром Ψ_{β}, ряд Фур'є якого має вигляд

$$\frac{1}{2}\sum_{\mathbb{Z}/\{0\}}\psi(|k|)e^{-i(kt+\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{sign} k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right).$$

При цьому функція φ майже скрізь збігається з f^{ψ}_{β}.

Якщо послідовність $\psi(k)$ монотонно спадає і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{q}(k)k^{q-2}<\infty, \quad 1<q<\infty,$$

то, згідно з лемою 12.6.6 з монографії [2, с. 193], має місце включення $\Psi_{\beta}\in L_{q'}$, $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'}=1$.

З твердження 3.8.1 із [1, с. 137] і твердження 1.5.5 з [3, с. 43] випливає, що при

$$\psi(k)\downarrow 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}<\infty$$

справедливі вкладення $L^{\psi}_{\beta,p}\subset L_{\infty}$, $L^{\psi}_{\beta,1}\subset L_{p'}$, $1<p<\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, а з твердження 3.8.1 із [1, с. 137] випливає, що при $\psi(k)>0$ і $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$ виконується вкладення $L^{\psi}_{\beta,1}\subset L_{\infty}$.

Будемо вважати, що послідовності $\psi(k)$, $k\in\mathbb{N}$, які задають класи $L^{\psi}_{\beta,p}$, є звуженнями на множину натуральних чисел деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій $\psi(t)$, заданих на $[1,\infty)$, що задовольняють умову $\lim_{t\to\infty}\psi(t)=0$. Множину всіх таких функцій ψ позначатимемо через $\mathfrak{M}$.

Для класифікації функцій ψ із $\mathfrak{M}$ за їхньою швидкістю спадання до нуля важливу роль відіграє характеристика

$$\alpha(\psi;t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) := \psi'(t+0). \tag{3}$$

З її допомогою з множини $\mathfrak{M}$ виділяють такі підмножини (див., наприклад, [1, с. 160, 161]):

$$\mathfrak{M}_0 := \left\{\psi \in \mathfrak{M} \colon \exists K > 0 \ \ \forall t \geq 1 \ \ 0 < K \leq \alpha(\psi;t)\right\}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{M}_C := \left\{\psi \in \mathfrak{M} \colon \exists K_1, K_2 > 0 \ \ \forall t \geq 1 \ \ K_1 \leq \alpha(\psi;t) \leq K_2 < \infty\right\}. \tag{5}$$

В (4) і (5) величини K, K_1, K_2 можуть залежати від ψ. Очевидно, що $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$.

Через γ_m, $m \in \mathbb{N}$, будемо позначати довільні набори із m цілих чисел. Покладемо

$$S_{\gamma_m}(f;x) = \sum_{k\in\gamma_m} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k)$ — коефіцієнти Фур'є функції f вигляду (1).

Величину

$$e_m^{\perp}(f)_s = \inf_{\gamma_m} \|f(\cdot) - S_{\gamma_m}(f;\cdot)\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty, \tag{6}$$

називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції $f \in L_s$ у метриці простору L_s, а величину

$$e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_s = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}} e_m^{\perp}(f)_s, \quad 1 \leq p, s \leq \infty, \tag{7}$$

— найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ у метриці простору L_s.

Метою даної роботи є знаходження точних порядкових оцінок величин $e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_s$, $\beta \in \mathbb{R}$, при $1 \leq p < \infty$ і $s = \infty$, а також при $p = 1$ і $1 < s \leq \infty$.

У випадку, коли $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, є відомими класами Вейля – Надя $W^r_{\beta,p}$. Для цих класів порядкові оцінки величин (7) при $1 < p, s < \infty$, є відомими (див. [4, 5]). Точні порядки величин $e_n^{\perp}(W^r_{\beta,p})_s$, $\beta \in \mathbb{R}$, встановлено також при $1 < p < \infty$, $s = \infty$ для всіх $r > \dfrac{1}{p}$, при $p = 1$, $1 < s < \infty$ для всіх $r > \dfrac{1}{s'}$ та при $s = \infty$, $p = 1$, $r > 1$ і $\beta = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$ (див. [6; 5, с. 137, 140]).

У випадку, коли $\psi \in B \cap \Theta^*_p$, де B — множина незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що $\dfrac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq K$, $t \geq 1$, а Θ^*_q — множина незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, для яких існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(k)k^{1/q+\varepsilon}$ не зростає, в [7] знайдено точні порядкові оцінки величин $e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty$, $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$. Якщо ж $\psi \in B \cap \Theta^*_{s'}$ і $\dfrac{1}{\psi(t)}$ опукла, то в роботі [8] встановлено точні порядкові оцінки величин $e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, $1 < s < \infty$, для довільних $\beta \in \mathbb{R}$.

Зазначимо, що при довільних $1 < p, s < \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$ точні порядки величин $e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ також є відомими (див., наприклад, [9, 10]).

У даній роботі знайдено двосторонні оцінки для величин $e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$, $1 \leq p < \infty$, у випадку, коли функція $g_p(t) = \psi(t)t^{1/p}$ належить до множини $\mathfrak{M}_0$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty \quad \text{при} \quad 1 < p < \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty \quad \text{при} \quad p = 1.$$

Крім того, знайдено двосторонні оцінки для величин $e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_s$ у випадку, коли $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} < \infty$, $1 < s < \infty$, $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$. При цьому константи в отриманих оцінках будуть виражені через параметри класів у явному вигляді.

Позначимо через $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ точні верхні межі наближень сумами Фур'є функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у метриках просторів L_s, тобто величини вигляду

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_s, \qquad 1 \leq p, s \leq \infty, \tag{8}$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинні суми Фур'є порядку $n-1$ функції f.

З означень величин (7) і (8) випливає очевидна нерівність

$$e_{2n-1}^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_s \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s, \qquad 1 \leq p, s \leq \infty. \tag{9}$$

Тому величини $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ природно використовувати для оцінки зверху найкращих ортогональних тригонометричних наближень вигляду (7). Встановленню точних порядкових оцінок величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ при $1 \leq p < \infty$ і $s = \infty$ та $p = 1$ і $1 < s \leq \infty$ присвячено роботи [11–16].

Щоб сформулювати основні результати роботи, введемо наступні позначення. Для кожного $1 < s < \infty$ покладемо

$$\xi(s) := \max\left\{ 4\left(\frac{\pi}{s-1}\right)^{1/s},\ 14(8\pi)^{1/s} s \right\}, \tag{10}$$

а для будь-якої функції $\psi \in \mathfrak{M}$ через $\underline{\alpha}_n(\psi)$ і $\overline{\alpha}_n(\psi)$, $n \in \mathbb{N}$, будемо позначати величини

$$\underline{\alpha}_n(\psi) := \inf_{t \geq n} \alpha(\psi;t), \tag{11}$$

$$\overline{\alpha}_n(\psi) := \sup_{t \geq n} \alpha(\psi;t), \tag{12}$$

де характеристику $\alpha(\psi;t)$ означено формулою (3). У прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *а функція* $g_p(t) = \psi(t)t^{1/p}$ *така, що* $g_p \in \mathfrak{M}_0$ *і* $\underline{\alpha}_1(g_p) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g_p;t) > p'$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$K_{\psi,p}^{(1)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{1/p'} \leq e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_{\infty} \leq$$

$$\leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_{\infty} \leq K_{\psi,p}^{(2)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{1/p'}, \tag{13}$$

в яких

$$K_{\psi,p}^{(1)} = \frac{1}{3\xi(p)} \left(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_1(g_p)} \right)^{1/p} \left(1 - \frac{p'}{\underline{\alpha}_1(g_p)} \right), \tag{14}$$

$$K_{\psi,p}^{(2)} = \frac{1}{\pi} \xi(p') \left(\frac{p' + \underline{\alpha}_1(g_p)}{\underline{\alpha}_1(g_p)} \right)^{1/p'}. \tag{15}$$

Доведення. Згідно з теоремою 1 з роботи [12] при виконанні умов $\psi(t)t^{1/p} \in \mathfrak{M}_0$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, справджується оцінка

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^{\psi})_{\infty} \leq K_{\psi,p}^{(2)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{1/p'}, \tag{16}$$

в якій величини $K_{\psi,p}^{(2)}$ означено формулою (15). Враховуючи нерівності (9) і (16), отримуємо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_{\infty} \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_{\infty} \leq K_{\psi,p}^{(2)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{1/p'}. \tag{17}$$

Встановимо оцінку знизу величини $e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_{\infty}$. Розглянемо функцію

$$f_p^*(t) = f_p^*(\psi;n;t) := \frac{\lambda}{\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{1/p}} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \cos kt, \tag{18}$$

де

$$\lambda = \lambda(\psi;p;n) := \frac{1}{\xi(p)} \left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_n(g_p)} \right)^{1/p}, \qquad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{19}$$

У статті [12] було показано, що при виконанні умови $g_p \in \mathfrak{M}_0$ функція f_p^* належить до $L_{\beta,p}^{\psi}$, $1 < p < \infty$. Покажемо, що

$$e^{\perp}_{2n}(f^*_p)_\infty \geq K^{(1)}_{\psi,p}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}. \tag{20}$$

Нехай

$$\Phi_s(x) := \int_x^\infty \psi^s(t)t^{s-2}dt \tag{21}$$

і

$$A_s(l;n) = A_s(\psi;l;n) := \left[\Phi_s^{-1}\left(\frac{1}{2l}\,\Phi_s(n)\right)\right] + 2n, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

де $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α, Φ_s^{-1} — функція, обернена до Φ_s.

Розглянемо величину

$$I_1 := \inf_{\gamma_{2n}}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f^*_p(t) - S_{\gamma_{2n}}(f^*_p;t))V_{A_{p'}(l;n)}(t)dt\right|, \tag{23}$$

де $V_{A_{p'}(l;n)}$ — ядра Валле Пуссена V_m (див., наприклад, [1, с. 31]),

$$V_m(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m}\cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1}\left(1 - \frac{k}{2m}\right)\cos kt, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

при $m = A_{p'}(l;n)$.

Згідно з твердженням Д.1.1 з [3, с. 391],

$$I_1 \leq \inf_{\gamma_{2n}}\|f^*_p(t) - S_{\gamma_{2n}}(f^*_p;t)\|_\infty\|V_{A_{p'}(l;n)}\|_1 = e^{\perp}_{2n}(f^*_p)_\infty\|V_{A_{p'}(l;n)}\|_1. \tag{25}$$

Оскільки (див., наприклад, [13, с. 247])

$$\|V_m\|_1 \leq 3\pi, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{26}$$

то з (25) і (26) випливає оцінка

$$e^{\perp}_{2n}(f^*_p)_\infty \geq \frac{1}{3\pi}\,I_1. \tag{27}$$

Ядра V_m вигляду (24) можна записати у вигляді

$$V_m(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{m}e^{ikt} + \sum_{k=-m}^{-1}e^{ikt} + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1}\left(1 - \frac{k}{2m}\right)e^{ikt} + \right.$$

$$\left. + \, 2\sum_{k=-2m+1}^{-m-1}\left(1 - \frac{|k|}{2m}\right)e^{ikt}\right). \tag{28}$$

Крім того,

$$f_p^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_p^*;t) = \frac{\lambda}{2\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p}} \sum_{\substack{|k|\geq n\\ k\notin\gamma_{2n}}} \psi^{p'}(|k|)|k|^{p'-2}e^{ikt}. \tag{29}$$

Оскільки

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{imt}dt = \begin{cases} 0, & k+m\neq 0, \\ 2\pi, & k+m=0, \end{cases} \qquad k,m\in\mathbb{Z}, \tag{30}$$

то з урахуванням (28) маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{\substack{|k|\geq n\\ k\notin\gamma_{2n}}} \psi^{p'}(|k|)|k|^{p'-2}e^{ikt}V_{A_{p'}(l;n)}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\substack{k\geq n\\ k\notin\gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}e^{ikt} + \sum_{\substack{k\leq -n\\ k\notin\gamma_{2n}}} \psi^{p'}(|k|)|k|^{p'-2}e^{ikt} \right) \times$$

$$\times \left(1 + \sum_{k=1}^{A_{p'}(l;n)} e^{ikt} + \sum_{k=-A_{p'}(l;n)}^{-1} e^{ikt} + 2\sum_{k=A_{p'}(l;n)+1}^{2A_{p'}(l;n)-1} \left(1 - \frac{k}{2A_{p'}(l;n)}\right) e^{ikt} + \right.$$

$$\left. +2\sum_{k=-2A_{p'}(l;n)+1}^{-A_{p'}(l;n)-1} \left(1 - \frac{|k|}{2A_{p'}(l;n)} e^{ikt}\right) \right) dt =$$

$$= \pi \left(\sum_{\substack{n\leq k\leq A_{p'}(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} + \sum_{\substack{-A_{p'}(l;n)\leq k\leq -n\\ k\notin\gamma_{2n}}} \psi^{p'}(|k|)|k|^{p'-2} + \right.$$

$$+2 \sum_{\substack{A_{p'}(l;n)+1\leq k\leq 2A_{p'}(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{k}{2A_{p'}(l;n)}\right) \psi^{p'}(k)k^{p'-2} +$$

$$\left. + 2 \sum_{\substack{-2A_{p'}(l;n)+1\leq k\leq -A_{p'}(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{|k|}{2A_{p'}(l;n)}\right) \psi^{p'}(|k|)|k|^{p'-2} \right) >$$

$$> \pi \left(\sum_{\substack{n \le k \le A_{p'}(l;n) \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} + \sum_{\substack{-A_{p'}(l;n) \le k \le -n \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(|k|)|k|^{p'-2} \right) =$$

$$= \pi \sum_{\substack{n \le |k| \le A_{p'}(l;n) \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}. \qquad (31)$$

Згідно з (23), (29) і (31)

$$I_1 > \frac{\pi\lambda}{2\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}\right)^{1/p}} \inf_{\gamma_{2n}} \sum_{\substack{n \le |k| \le A_{p'}(l;n) \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}. \qquad (32)$$

Оскільки при $g_p \in \mathfrak{M}_0$ функція $\psi^{p'}(t) t^{p'-2}$ монотонно спадає, то

$$\inf_{\gamma_{2n}} \sum_{\substack{n \le |k| \le A_{p'}(l;n) \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} = \sum_{\substack{2n \le |k| \le A_{p'}(l;n) \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} = 2 \sum_{k=2n}^{A_{p'}(l;n)} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}. \qquad (33)$$

Покажемо, що за умови, коли функція $g_{s'}(t) = \psi(t) t^{1/s'}$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, така, що $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$, для довільних $l, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=2n}^{A_s(l;n)} \psi^s(k) k^{s-2} > \left(1 - \frac{1}{2l} - \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2}. \qquad (34)$$

Запишемо $\sum_{k=2n}^{A_s(l;n)} \psi^s(k) k^{s-2}$ у вигляді

$$\sum_{k=2n}^{A_s(l;n)} \psi^s(k) k^{s-2} = \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} - \sum_{k=n}^{2n-1} \psi^s(k) k^{s-2} - \sum_{k=A_s(l;n)+1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2}. \qquad (35)$$

З (22) та властивості спадання функції $\Phi_s(\cdot)$ вигляду (21) випливає оцінка

$$\sum_{k=A_s(l;n)+1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \le \int\limits_{A_s(l;n)}^{\infty} \psi^s(t) t^{s-2} dt =$$

$$= \Phi_s(A_s(l;n)) < \frac{1}{2l} \Phi_s(n) \le \frac{1}{2l} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2}. \qquad (36)$$

Встановимо оцінку зверху для суми $\sum_{k=n}^{2n-1} \psi^s(k) k^{s-2}$. Для цього скористаємось лемою 3 з роботи [12].

Лема 1. *Нехай* $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} < \infty$, $1 < s < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді якщо функція* $g_{s'} := := \psi(t)t^{1/s'} \in \mathfrak{M}_0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *така, що* $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$, *то виконується нерівність*

$$\psi^s(n)n^{s-1} \le \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}, \tag{37}$$

якщо ж $g_{s'} \in \mathfrak{M}_C$, *то має місце співвідношення*

$$\frac{s}{\overline{\alpha}_n(g_{s'})} \frac{n\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{s + n\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} \le \psi^s(n)n^{s-1} \le \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}. \tag{38}$$

Враховуючи, що при $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ функція $\psi^s(t)t^{s-2}$ спадає, та використовуючи нерівність (37), одержуємо

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \psi^s(k)k^{s-2} \le \psi^s(n)n^{s-1} \le \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}. \tag{39}$$

Із (35), (36) і (39) отримуємо нерівність (34).

Застосовуючи нерівність (34) при $s = p'$, на підставі формул (27), (32) і (33) для довільних $l \in \mathbb{N}$ одержуємо оцінку

$$e_{2n}^{\perp}(f^*)_\infty \ge \frac{\lambda}{3}\left(1 - \frac{1}{2l} - \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\right)\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'} =$$

$$= \frac{1}{3\xi(p)}\left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_n(g_p)}\right)^{1/p}\left(1 - \frac{1}{2l} - \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\right)\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}. \tag{40}$$

Переходячи до границі в нерівності (40) при $l \to \infty$, отримуємо (20). Із (17) і (20) випливає (13).

Теорему 1 доведено.

Неважко переконатись, що умови теореми 1 задовольняють, наприклад, функції

$$\psi(t) = t^{-r}, \quad \frac{1}{p} < r < 1, \tag{41}$$

$$\psi(t) = t^{-\frac{1}{p}} \ln^{-\gamma}(t + K), \quad \gamma > \frac{1}{p'}, \quad K \ge e^{\gamma p'} - 1, \tag{42}$$

$$\psi(t) = t^{-1/p} \ln^{-\gamma}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\delta}, \quad \gamma \ge \frac{1}{p'}, \quad \delta > \frac{1}{p'}, \qquad K_2 \ge K_1 e^{\max\{(\gamma+\delta)p', e\}} - 1. \tag{43}$$

Теорема 2. *Нехай* $1 < s < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} < \infty$, $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$, *а функція* $g_p(t) = = \psi(t)t^{1/p}$ *така, що* $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ *і* $\underline{\alpha}_1(g_{s'}) = \inf_{t \ge 1} \alpha(g_{s'}; t) > s$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$\frac{4}{3}\,K^{(1)}_{\psi,s'}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{1/s}\le e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,1})_s\le e^{\perp}_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_s\le K^{(2)}_{\psi,s'}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{1/s}, \quad (44)$$

де $K^{(1)}_{\psi,s'}$ *і* $K^{(2)}_{\psi,s'}$ *означено формулами* (14) *і* (15) *відповідно.*

Згідно з теоремою 1 з роботи [13, с. 245], при виконанні умов $g_{s'}\in\mathfrak{M}_0$ і $\sum_{k=1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}<<\infty$, $1<s<\infty$, $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=1$, $n\in\mathbb{N}$, $\beta\in\mathbb{R}$, має місце нерівність

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s\le K^{(2)}_{\psi,s'}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{1/s}. \quad (45)$$

Тому, враховуючи (9) і (45), отримуємо оцінку

$$e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,1})_s\le e^{\perp}_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_s\le K^{(2)}_{\psi,s'}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{1/s}. \quad (46)$$

Залишилось показати, що

$$e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,1})_s\ge\frac{4}{3}\,K^{(1)}_{\psi,s'}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{1/s}. \quad (47)$$

При довільному $m\in\mathbb{N}$ покладемо

$$f_m(t)=f_m(\psi;\beta;t):=$$

$$:=\frac{1}{4\pi}\left(\sum_{k=1}^{m}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)+2\sum_{k=m+1}^{2m-1}\left(1-\frac{k}{2m}\right)\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{8\pi}\left(e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{k=1}^{m}\psi(k)e^{ikt}+e^{i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{k=-m}^{-1}\psi(|k|)e^{ikt}+\right.$$

$$\left.+\,2e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{k=m+1}^{2m-1}\left(1-\frac{k}{2m}\right)\psi(k)e^{ikt}+2e^{i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{k=-2m+1}^{m-1}\left(1-\frac{|k|}{2m}\right)\psi(|k|)e^{ikt}\right). \quad (48)$$

У статті [13, с. 246, 247] було встановлено, що $f_m\in L^{\psi}_{\beta,1}$ при будь-яких $m\in\mathbb{N}$.

Покажемо, що при $m=A_s(l;n)$, де $A_s(l;n)$ означено рівністю (22), має місце нерівність

$$e^{\perp}_{2n}(f_{A_s(l;n)})_s\ge$$

$$\ge\frac{1}{4\xi(s')}\left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{s+\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\right)^{1/s'}\left(1-\frac{1}{2l}-\frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\right)\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{1/s},\quad l,n\in\mathbb{N}. \quad (49)$$

Покладемо

$$I_2 := \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f_{A_s(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{A_s(l;n)};t)) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right|. \qquad (50)$$

Використавши твердження 3.8.1 з роботи [1, с. 137], запишемо

$$I_2 \le \inf_{\gamma_{2n}} \|f_{A_s(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{A_s(l;n)};t)\|_s \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{s'} =$$

$$= e_{2n}^{\perp}(f_{A_s(l;n)})_s \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{s'}, \quad 1 < s < \infty. \qquad (51)$$

Згідно з формулою (25) з роботи [13, с. 249],

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{s'} \le$$

$$\le \xi(s') \left(1 + \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\right)^{1/s'} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s}(k) k^{s-2} \right)^{1/s'}, \quad 1 < s < \infty. \qquad (52)$$

З урахуванням (48) має місце рівність

$$f_{A_s(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{A_s(l;n)};t) =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left(e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{1 \le k \le A_s(l;n) \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(k) e^{ikt} + e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{-A_s(l;n) \le k \le -1 \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(|k|) e^{ikt} + \right.$$

$$+ 2e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{A_s(l;n)+1 \le k \le 2A_s(l;n)-1 \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{k}{2A_s(l;n)}\right) \psi(k) e^{ikt} +$$

$$\left. + 2e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{-2A_s(l;n)+1 \le k \le A_s(l;n)-1 \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{|k|}{2A_s(l;n)}\right) \psi(|k|) e^{ikt} \right). \qquad (53)$$

Крім того,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} e^{ikt} + e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{-n} \psi^{s-1}(|k|) |k|^{s-2} e^{ikt} \right). \qquad (54)$$

Використовуючи (30), (53) і (54), одержуємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_{A_s(l;n)}(t)-S_{\gamma_{2n}}(f_{A_s(l;n)};t))\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{s-1}(k)k^{s-2}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\sum_{\substack{n\le k\le A_s(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(k)k^{s-2}+\sum_{\substack{-A_s(l;n)\le k\le -n\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(|k|)|k|^{s-2}+\right.$$

$$+2\sum_{\substack{A_s(l;n)+1\le k\le 2A_s(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\left(1-\frac{k}{2A_s(l;n)}\right)\psi^s(k)k^{s-2}+$$

$$\left.+\,2\sum_{\substack{-2A_s(l;n)+1\le k\le -A_s(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\left(1-\frac{|k|}{2A_s(l;n)}\right)\psi^s(|k|)|k|^{s-2}\right)>$$

$$>\frac{1}{8}\left(\sum_{\substack{n\le k\le A_s(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(k)k^{s-2}+\sum_{\substack{-A_s(l;n)\le k\le -n\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(|k|)|k|^{s-2}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{\substack{n\le |k|\le A_s(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(k)k^{s-2}. \tag{55}$$

Отже, згідно з (50) і (55)

$$I_2>\frac{1}{8}\inf_{\gamma_{2n}}\sum_{\substack{n\le |k|\le A_s(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(k)k^{s-2}. \tag{56}$$

Враховуючи, що при $g_{s'}\in\mathfrak{M}_0$ функція $\psi^s(t)t^{s-2}$ спадає, маємо

$$\inf_{\gamma_{2n}}\sum_{\substack{n\le |k|\le A_s(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(k)k^{s-2}=2\sum_{k=2n}^{A_s(l;n)}\psi^s(k)k^{s-2}. \tag{57}$$

З (34), (56) і (57) випливає нерівність

$$I_2>\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2l}-\frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}. \tag{58}$$

На підставі формул (51), (52) і (58) отримуємо (49).

З того, що $f_{A_s(l;n)}\in L^{\psi}_{\beta,1}$, випливає

$$e^{\perp}_{2n}(f_{A_s(l;n)})_s\ge e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,1})_s,\quad l\in\mathbb{N}.$$

Тоді при $l\to\infty$ з останньої нерівності і нерівності (49) отримуємо (47).

Теорему 2 доведено.

Оскільки, згідно зі співвідношенням (38),

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \asymp \psi^{p'}(n)n^{p'-1} \qquad \text{при} \quad g_p \in \mathfrak{M}_C,$$

то з теорем 1 і 2 випливає наступне твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$ *і*

$$\underline{\alpha}_1(g_p) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g_p; t) > p',$$

де $g_p(t) = \psi(t)(t)t^{1/p}$, $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Тоді якщо* $g_p \in \mathfrak{M}_0$, *то для довільного* $\beta \in \mathbb{R}$

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{p'} \asymp \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}, \tag{59}$$

якщо ж $g_p \in \mathfrak{M}_C$, *то для довільного* $\beta \in \mathbb{R}$

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{p'} \asymp \psi(n)n^{1/p}. \tag{60}$$

Зауважимо, що коли $g_p \in \mathfrak{M}_0$ і

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(g_p; t) = \infty, \tag{61}$$

то порядкові рівності (60) не справджуються, оскільки в цьому випадку виконується оцінка

$$\psi(n)n^{1/p} = o\left(\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}\right), \quad n \to \infty,$$

яка є наслідком нерівності (37). Прикладом функцій ψ, які задовольняють умови наслідку 1 і для яких виконується умова (61), є функції вигляду (42) і (43).

Застосувавши наслідок 1 до функцій ψ вигляду (42) і (43), отримаємо наступне твердження.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\psi(t) = t^{-1/p}\ln^{-\gamma}(t+K)$, $\gamma > \dfrac{1}{p'}$, $K \geq e^{\gamma p'} - 1$, $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{p'} \asymp \psi(n)n^{1/p}\ln^{1/p'} n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

***Наслідок* 3.** *Нехай* $\psi(t) = t^{-1/p}\ln^{-1/p'}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\delta}$, $\delta > \dfrac{1}{p'}$, $K_2 \geq K_1 \geq$ $\geq e^{\max\{(\gamma+\delta)p', e\}} - 1$, $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{p'} \asymp \psi(n)n^{1/p}(\ln n)^{1/p'}(\ln\ln n)^{1/p'}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$$

Теорема 3. *Нехай* $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, *а функція* $g(t) = \psi(t)t$ *така, що* $g \in \mathfrak{M}_0$ *і* $\underline{\alpha}_1(g) = = \inf_{t\geq 1}\alpha(g;t) > 1$. *Тоді якщо* $\cos\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, *то для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{12\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \leq e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{62}$$

Доведення. Згідно з теоремою 2 з роботи [13, с. 255], за умови $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$ справджується нерівність

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{63}$$

Із (9) і (63) маємо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{64}$$

Встановимо оцінку знизу величини $e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty}$. Покладемо

$$\Psi(x) := \int_x^{\infty}\psi(t)dt,$$

$$D(l;n) = D(\psi;l;n) := \left[\Psi^{-1}\left(\frac{1}{2l}\Psi(n)\right)\right] + 2n, \quad l, n \in \mathbb{N}, \tag{65}$$

і

$$I_3 := \inf_{\gamma_{2n}}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f_{D(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{D(l;n)};t))V_{D(l;n)}(t)dt\right|, \tag{66}$$

де функцію $f_{D(l;n)}(t)$ означено формулою (48) при $m = D(l;n)$.

Використовуючи твердження Д.1.1 з [3, с. 391] та формулу (26), можемо записати оцінку

$$I_3 \leq \inf_{\gamma_{2n}}\|f_{D(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{D(l;n)};t)\|_{\infty}\|V_{D(l;n)}\|_1 =$$

$$= e_{2n}^{\perp}(f_{D(l;n)})_{\infty}\|V_{D(l;n)}\|_1 \leq 3\pi e_{2n}^{\perp}(f_{D(l;n)})_{\infty}. \tag{67}$$

Згідно з (48)

$$f_{D(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{D(l;n)};t) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left(e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{1\leq k\leq D(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)e^{ikt} + e^{i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{-D(l;n)\leq k\leq -1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)e^{ikt} + \right.$$

$$+2e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{D(l;n)+1\leq k\leq 2D(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\left(1-\frac{k}{2D(l;n)}\right)\psi(k)e^{ikt}+$$

$$\left.+\,2e^{i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{-2D(l;n)+1\leq k\leq -D(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\left(1-\frac{|k|}{2D(l;n)}\right)\psi(|k|)e^{ikt}\right). \tag{68}$$

Із (28) при $m=D(l;n)$ маємо

$$V_{D(l;n)}(t)=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{k=1}^{D(l;n)}e^{ikt}+\sum_{-D(l;n)\leq k\leq -1}e^{ikt}+2\sum_{k=D(l;n)}^{2D(l;n)-1}\left(1-\frac{k}{2D(l;n)}\right)e^{ikt}+\right.$$

$$\left.+\,2\sum_{k=-2D(l;n)+1}^{-D(l;n)-1}\left(1-\frac{|k|}{2D(l;n)}\right)e^{ikt}\right). \tag{69}$$

Із (30), (68) і (69) випливає

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_{D(l;n)}(t)-S_{\gamma_{2n}}(f_{D(l;n)};t))V_{D(l;n)}(t)dt\right|=$$

$$=\frac{1}{8}\left|e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{1\leq k\leq D(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)+e^{i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{-D(l;n)\leq k\leq -1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)+\right.$$

$$+2e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{D(l;n)+1\leq k\leq 2D(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\left(1-\frac{k}{2D(l;n)}\right)^2\psi(k)+$$

$$\left.+\,2e^{i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{-2D(l;n)+1\leq k\leq -D(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\left(1-\frac{|k|}{2D(l;n)}\right)^2\psi(|k|)\right|=$$

$$=\frac{1}{8}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\sum_{\substack{1\leq k\leq D(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)+\sum_{\substack{-D(l;n)\leq k\leq -1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)+\right.$$

$$+2\sum_{\substack{D(l;n)+1\leq k\leq 2D(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\left(1-\frac{k}{2D(l;n)}\right)^2\psi(k)+$$

$$\left.+\,2\sum_{\substack{-2D(l;n)+1\leq k\leq -D(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\left(1-\frac{|k|}{2D(l;n)}\right)^2\psi(|k|)\right)+$$

$$+i\sin\frac{\beta\pi}{2}\left(-\sum_{\substack{1\le k\le D(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)+\sum_{\substack{-D(l;n)\le k\le -1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)-\right.$$

$$-2\sum_{\substack{D(l;n)+1\le k\le 2D(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\left(1-\frac{k}{2D(l;n)}\right)^2\psi(k)+$$

$$\left.\left.+\,2\sum_{\substack{-2D(l;n)+1\le k\le -D(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\left(1-\frac{|k|}{2D(l;n)}\right)^2\psi(|k|)\right)\right|\ge$$

$$\ge\frac{1}{8}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\sum_{\substack{1\le k\le D(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)+\sum_{\substack{-D(l;n)\le k\le -1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)+\right.$$

$$+2\sum_{\substack{D(l;n)+1\le k\le 2D(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\left(1-\frac{k}{2D(l;n)}\right)^2\psi(k)+$$

$$\left.+\,2\sum_{\substack{-2D(l;n)+1\le k\le -D(l;n)-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\left(1-\frac{|k|}{2D(l;n)}\right)^2\psi(|k|)\right)>$$

$$>\frac{1}{8}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\sum_{\substack{1\le k\le D(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)+\sum_{\substack{-D(l;n)\le k\le -1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)\right). \tag{70}$$

На підставі (66) і (70) отримуємо оцінку

$$I_3>\frac{1}{8}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\inf_{\gamma_{2n}}\left(\sum_{\substack{1\le k\le D(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)+\sum_{\substack{-D(l;n)\le k\le -1\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\inf_{\gamma_{2n}}\sum_{\substack{1\le |k|\le D(l;n)\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)=\frac{1}{4}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\sum_{k=n+1}^{D(l;n)}\psi(k)=$$

$$=\frac{1}{4}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\psi(n)-\sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty}\psi(k)\right). \tag{71}$$

З (65) випливає, що для довільних $l\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty} \psi(k) \leq \int\limits_{D(l;n)}^{\infty} \psi(t)dt = \Psi(D(l;n)) < \frac{1}{2l}\Psi(n) \leq \frac{1}{2l}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{72}$$

Далі нам буде корисним наступне твердження з роботи [13, с. 259].

Лема 2. *Нехай* $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$. *Тоді якщо функція* $g(t) = \psi(t)t$ *така, що* $g \in \mathfrak{M}_0$, *то для довільних* $n \in \mathbb{N}$

$$\psi(n)n \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{73}$$

Якщо ж $g \in \mathfrak{M}_C$, *то*

$$\frac{1}{\overline{\alpha}_n(g)}\frac{n\underline{\alpha}_n(g)}{1+n\underline{\alpha}_n(g)}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \leq \psi(n)n \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{74}$$

З урахуванням формул (71) – (73) маємо

$$I_3 > \frac{1}{4}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)n}-\frac{1}{2l}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k), \quad l \in \mathbb{N}. \tag{75}$$

З (67) та (75) за умови $\cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$ отримуємо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \geq e_{2n}^{\perp}(f_{D(l;n)})_{\infty} \geq \frac{1}{3\pi}I_3 >$$

$$> \frac{1}{12\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)n}-\frac{1}{2l}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{76}$$

Переходячи у формулі (76) до границі при $l \to \infty$, одержуємо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \geq \frac{1}{12\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)n}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{77}$$

Об'єднуючи (64) і (77), отримуємо (62).

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай* $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, *а функція* $g(t) = \psi(t)t$ *така, що* $g \in \mathfrak{M}_0$ *і*

$$\underline{\alpha}_1(g) = \inf_{t \geq 1}\alpha(g;t) > 1. \tag{78}$$

Тоді якщо $\cos\frac{\beta\pi}{2} = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, *то для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *виконуються нерівності*

$$\frac{1}{60\pi}\left(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right)\psi(n)n \leq e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \left(1+\frac{2}{\pi}\right)\psi(n)n. \tag{79}$$

Доведення. Згідно з теоремою 4 з [13, с. 262], при виконанні умов $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, $g \in \mathfrak{M}_0$, $\cos\dfrac{\beta\pi}{2} = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, справджується оцінка

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \le e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \le \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \le \left(1+\frac{2}{\pi}\right)\psi(n)n. \qquad (80)$$

Встановимо оцінку знизу величини $e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty}$. Розглянемо функцію

$$f_n^*(t) = f_n^*(\psi;t) := \frac{1}{5\pi n}\left(\sum_{k=1}^{n} k\psi(k)\cos kt + \sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\psi(k)\cos kt\right). \qquad (81)$$

У статті [13, с. 263 – 265] показано, що f_n^* належить класу $L_{\beta,1}^{\psi}$. Доведемо, що

$$e_{2n}^{\perp}(f_n^*)_{\infty} \ge \frac{1}{60\pi}\left(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right)\psi(n)n. \qquad (82)$$

Покладемо

$$I_4 := \inf_{\gamma_{2n}}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_n^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_n^*;t))V_{2n}(t)dt\right|, \qquad (83)$$

де V_m — суми Валле Пуссена вигляду (24).

Використавши твердження Д.1.1 з [3, с. 391] та нерівність (26), отримаємо

$$I_4 \le \inf_{\gamma_{2n}}\|f_n^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_n^*;t)\|_{\infty}\|V_{2n}\|_1 \le 3\pi\, e_{2n}^{\perp}(f_n^*)_{\infty}. \qquad (84)$$

Оскільки згідно з формулою (81) має місце рівність

$$f_n^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_n^*;t) = \frac{1}{10\pi n}\left(\sum_{\substack{1\le k\le n\\ k\notin\gamma_{2n}}} k\psi(k)e^{ikt} + \sum_{\substack{-n\le k\le -1\\ k\notin\gamma_{2n}}} |k|\psi(|k|)e^{ikt} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{n+1\le k\le 2n\\ k\notin\gamma_{2n}}}(2n+1-k)\psi(k)e^{ikt} + \sum_{\substack{-2n\le k\le -n-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}(2n+1-k)\psi(|k|)e^{ikt}\right),$$

а згідно з (28) — рівність

$$V_{2n}(t) = \frac{1}{2}\left(1+\sum_{k=1}^{2n}e^{ikt} + \sum_{k=-2n}^{-1}e^{ikt} + 2\sum_{k=2n+1}^{4n-1}\left(1-\frac{k}{2n}\right)e^{ikt} + 2\sum_{k=-4n+1}^{-2n-1}\left(1-\frac{|k|}{2n}\right)e^{ikt}\right),$$

то, застосовуючи формули (30), знаходимо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_n^*(t)-S_{\gamma_{2n}}(f_n^*;t))V_{2n}(t)dt=\frac{1}{10n}\left(\sum_{\substack{1\le k\le n\\ k\notin\gamma_{2n}}}k\psi(k)+\sum_{\substack{-n\le k\le -1\\ k\notin\gamma_{2n}}}|k|\psi(|k|)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{n+1\le k\le 2n\\ k\notin\gamma_{2n}}}(2n+1-k)\psi(k)+\sum_{\substack{-2n\le k\le -n-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}(2n+1-|k|)\psi(|k|)\right). \tag{85}$$

Враховуючи формули (83) і (85), монотонне спадання функції g та виконуючи елементарні перетворення, записуємо оцінку величини I_4:

$$I_4=\frac{1}{10n}\inf_{\gamma_{2n}}\left(\sum_{\substack{1\le k\le n\\ k\notin\gamma_{2n}}}k\psi(k)+\sum_{\substack{-n\le k\le -1\\ k\notin\gamma_{2n}}}|k|\psi(|k|)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{n+1\le k\le 2n\\ k\notin\gamma_{2n}}}(2n+1-k)\psi(k)+\sum_{\substack{-2n\le k\le -n-1\\ k\notin\gamma_{2n}}}(2n+1-|k|)\psi(|k|)\right)>$$

$$>\frac{1}{5n}\sum_{k=n+1}^{2n}\psi(k)(2n+1-k)\ge\frac{\psi(2n)}{5n}\sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)=$$

$$=\psi(2n)\frac{n+1}{10}>\frac{1}{10}\,\psi(2n)n. \tag{86}$$

Використовуючи співвідношення (84) і (86), отримуємо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty}\ge e_{2n}^{\perp}(f_n^*)_{\infty}\ge\frac{1}{3\pi}\,I_4\ge\frac{1}{30\pi}\,\psi(n)n\,\frac{\psi(2n)}{\psi(n)}=\frac{1}{60\pi}\,\psi(n)n\,\frac{g(2n)}{g(n)}. \tag{87}$$

Оскільки, як показано в [13, с. 266], за умови (78) виконується нерівність

$$\frac{g(2n)}{g(n)}>1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)},$$

то з (87) випливає оцінка (82). Із (80) і (82) випливає (79).

Теорему 4 доведено.

Оскільки $g\in\mathfrak{M}_0$, де $g(t)=\psi(t)t$, то згідно з [1, с. 175] виконується нерівність $\dfrac{g(2n)}{g(n)}>K_1$. Тоді з (87) отримуємо оцінку

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty}\ge K_2\psi(n)n,\quad \cos\frac{\beta\pi}{2}=0,\quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{88}$$

Крім того, очевидно, що при достатньо великих n справджується нерівність $\underline{\alpha}_1(g)n>K_3>1$. Тоді з (77) маємо

$$e_{2n}^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \geq K_4 \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \qquad \cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{89}$$

Згідно зі співвідношенням (74), якщо $g \in \mathfrak{M}_C$, то

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \asymp \psi(n)n. \tag{90}$$

Із (64), (80), (88) – (90) випливає наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай* $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді якщо функція* $g(t) = \psi(t)t$ *така, що* $g \in \mathfrak{M}_0$, *то*

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \begin{cases} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), & \cos\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n)n, & \cos\dfrac{\beta\pi}{2} = 0, \end{cases}$$

якщо ж $g \in \mathfrak{M}_C$, *то*

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \psi(n)n.$$

Неважко переконатись, що умови теореми 5 задовольняють, наприклад, функції

$$\psi(t) = t^{-r}, \quad r > 1, \tag{91}$$

$$\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t+K), \quad K > 0, \quad \gamma > 1, \tag{92}$$

$$\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\delta}, \quad \gamma \geq 1, \quad \delta > 1, \quad K_1 > 0, \quad K_2 > e-1. \tag{93}$$

Зауважимо, що коли $g \in \mathfrak{M}_0$, $g(t) = \psi(t)t$ і

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(g;t) = \infty, \tag{94}$$

то виконується оцінка

$$\psi(n)n = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\right), \quad n \to \infty,$$

яка є наслідком нерівності (73).

Прикладом функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови теореми 5 і для яких виконується умова (94), є функції вигляду (92) та (93).

Наведемо порядкові оцінки величин $e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}$ для функцій вигляду (91) – (93).

***Наслідок* 4.** *Нехай* $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 1$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(W^{r}_{\beta,1})_{\infty} \asymp n^{-r+1}. \tag{95}$$

При $\beta = 2l+1$, $l \in \mathbb{Z}$, порядкову рівність (95) знайдено в [6, с. 260].

***Наслідок* 5.** *Нехай* $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t+K)$, $\gamma > 1$, $K > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \asymp \begin{cases} \psi(n)n\ln n, & \cos\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n)n, & \cos\dfrac{\beta\pi}{2} = 0. \end{cases}$$

***Наслідок* 6.** *Нехай* $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-1}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\delta}$, $\delta > 1$, $K_1 > 0$, $K_2 > e-1$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \asymp \begin{cases} \psi(n)n\ln n\ln(\ln n), & \cos\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n)n, & \cos\dfrac{\beta\pi}{2} = 0. \end{cases}$$

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**. – Ч. I. – 427 с.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
4. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 2002. – **71**, №1. – С. 109 – 121.
5. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93**. – 352 с.
6. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. – 2007. – **81**, № 2. – С. 247 – 261.
7. *Шкапа В. В.* Оцінки найкращих M-членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ у рівномірній метриці // Диференціальні рівняння та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 305 – 317.
8. *Шкапа В. В.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L_{\beta,1}^{\psi}$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 3. – С. 315 – 329.
9. *Федоренко А. С.* Про найкращі m-членні тригонометричні та ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1719 – 1721.
10. *Федоренко О. С.* Наближення (ψ,β)-диференційовних функцій тригонометричними поліномами: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2001. – 16 с.
11. *Грабова У. З., Сердюк А. С.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ,β)-диференційовних функцій // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 9. – С. 1186 – 1197.
12. *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Порядкові оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 12. – С. 1658 – 1675.
13. *Степанюк Т. А.* Оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості в інтегральних метриках // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 3. – С. 241 – 269.
14. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**. – Ч. II. – 468 с.
15. *Романюк В. С.* Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 131 – 135.
16. *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій// Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 255 – 282.
17. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic function. – New York: Nova Sci. Publ., 1993. – 419 p.

Одержано 09.10.14