УДК 517.51

В. К. Маслюченко (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича),
О. В. Маслюченко (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича; Помор. академія, Польща),
О. Д. Мироник (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ВЛАСТИВОСТІ ДОБУТКУ СІДРА

We study the properties of the Ceder product $X \times_b Y$ of topological spaces X and Y with $b \in Y$ recently introduced by the authors. Important examples of the Ceder product are the Ceder plane and the Alexandroff double circle. In particular, for $i = 0, 1, 2, 3,$ we establish necessary and sufficient conditions for the Ceder product to be a T_i-space. It is shown that the Ceder product $X \times_b Y$ is metrizable if and only if the spaces X and $\dot{Y} = Y \setminus \{b\}$ are metrizable, X is σ-discrete, and the set $\{b\}$ is closed in Y. If X is a nondiscrete space, then the point b has a countable base of closed neighborhoods in Y.

Изучаются свойства введенного авторами понятия произведения Сидра $X \times_b Y$ для топологических пространств X и Y, а также точки $b \in Y$, примерами которого являются плоскость Сидра и двойная окружность Александрова. В частности, для $i = 0, 1, 2, 3$ получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы произведение Сидра было T_i-пространством. Установлено, что произведение Сидра $X \times_b Y$ будет метризуемым тогда и только тогда, когда пространства X и $\dot{Y} = Y \setminus \{b\}$ метризуемые, X — σ-дискретное пространство и множество $\{b\}$ замкнуто в Y. В случае, когда X — недискретное пространство, точка b должна иметь счетную базу замкнутых окрестностей в Y.

1. Вступ. У тезах [1] введено поняття добутку Сідра $X \times_b Y$ для топологічних просторів X, Y і точки $b \in Y$, частинними випадками якого є площина Сідра $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times_0 \mathbb{R}^+$ (див. [2], приклад 9.1) і подвійне коло Александрова [3, с. 204], і анонсовано теорему про те, що добуток Сідра $X \times_b Y$ двох метризовних просторів X і Y буде вичерпним. В статті [4] доведено, що якщо одноточкова множина $\{b\}$ замкнена в Y і простори X та Y вичерпні, то і добуток Сідра $X \times_b Y$ буде вичерпним. Крім того, відомо [2], що площина Сідра $\mathbb{M}$ — це неметризовний простір.

У даній статті ми вивчаємо подальші властивості добутку Сідра. Перша група властивостей пов'язана з аксіомами відокремленості T_i, $i = 0, 1, 2, 3$. Встановлено необхідні і достатні умови для того, щоб у добутку Сідра $X \times_b Y$ виконувались ці аксіоми, зокрема показано, що добуток Сідра $X \times_b Y$ буде регулярним при $X \neq \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли X і $\dot{Y} = Y \setminus \{b\}$ регулярні, множина $\{b\}$ замкнена в Y і у випадку, коли X недискретний, точка b має базу замкнених околів у просторі Y.

Далі ми наводимо критерій метризовності добутку Сідра $X \times_b Y$, в якому використовується σ-дискретність простору X (теорема 2), з якого випливає неметризовність площини Сідра.

2. Добуток Сідра і аксіоми відокремленості. Нехай X і Y — топологічні простори і $b \in Y$. Розглянемо декартів добуток $P = X \times Y$, що складається з точок $p = (x, y)$, де $x \in X$ і $y \in Y$. Наділимо його топологічною структурою таким чином: околом точки $p = (x, y)$, $y \neq b$, вважається будь-яка підмножина W добутку P, що містить множину $\{x\} \times V$, де V — окіл точки y в Y, а околом точки $p = (x, b)$ вважається будь-яка множина $W \subseteq P$, що містить множину $U \overset{x}{\times} V = (U \times V) \setminus (\{x\} \times \dot{V})$, де U — окіл точки x в X, V — окіл точки b в Y і $\dot{V} = V \setminus \{b\}$. Топологічний простір P з таким чином уведеною топологічною структурою називається *добутком Сідра* і позначається $P = X \times_b Y$.

Спочатку дослідимо коли добуток Сідра задовольняє аксіоми відокремленості T_i, $i = 0, 1, 2, 3$ [3, с. 69].

Теорема 1. *Нехай X і Y — топологічні простори, $X \neq \varnothing$, $b \in Y$, $\dot{Y} = Y \setminus \{b\}$ і $P = X \times_b Y$ — добуток Сідра. Тоді справджуються такі еквівалентності*:

(0) *P – T_0-простір $\Leftrightarrow$ X і $\dot{Y}$ — T_0-простори*;

(1) *P – T_1-простір $\Leftrightarrow$ X і $\dot{Y}$ — T_1-простори і $\{b\}$ — замкнена множина в Y*;

(2) *P – гаусдорфовий простір $\Leftrightarrow$ X і $\dot{Y}$ — гаусдорфові простори і $\{b\}$ — замкнена множина в Y*;

(3) *P — регулярний простір $\Leftrightarrow$ X і $\dot{Y}$ — регулярні простори, $\{b\}$ — замкнена множина в Y і у випадку, коли X — недискретний простір, точка b має базу із замкнених околів у просторі Y.*

Доведення. *Необхідність.* Зауважимо, що простори X і $\dot{Y}$ гомеоморфні до підпросторів $X \times \{b\}$ і $\{a\} \times \dot{Y}$ простору P, де a — деяка точка з X. Тому якщо P є T_i-простором при $i = 0, 1, 2, 3$, то і X та $\dot{Y}$ будуть T_i-просторами.

Нехай P — T_1-простір. Доведемо, що $\{b\}$ — замкнена підмножина Y. Для цього досить показати, що множина $\dot{Y}$ є відкритою в Y. Візьмемо $y \in \dot{Y}$ і зафіксуємо деяку точку $a \in X$. Позначимо $p = (a, y)$ і $q = (a, b)$. Оскільки P є T_1-простором, то існує окіл W точки p в P, який не містить точки q. Але $y \neq b$, тому існує окіл V точки y в Y такий, що $\{a\} \times V \subseteq W$. Тоді $q \notin \{a\} \times V$, а отже, $b \notin V$. Таким чином, $V \subseteq \dot{Y}$, а тому $\dot{Y}$ є околом точки y. Отже, $\dot{Y}$ — відкрита множина в Y.

Нехай P — регулярний простір, а X — недискретний простір. Тоді X містить якусь неізольовану точку a. Покажемо, що тоді точка b має базу із замкнених околів в Y. Візьмемо деякий окіл V_0 точки b в Y. Тоді $W_0 = X \overset{a}{\times} V_0$ є околом точки $p_0 = (a, b)$ в P. З регулярності простору P випливає, що існує окіл W точки p_0 такий, що $\overline{W} \subseteq W_0$. Тоді існують околи U точки a в X і V точки b в Y такі, що $U \overset{a}{\times} V \subseteq W$. Оскільки a — неізольована точка простору X, то існує точка $x \in U \setminus \{a\}$. В такому випадку $\{x\} \times V \subseteq U \overset{a}{\times} V \subseteq W$. Але $\{x\} \times \overline{V} \subseteq \overline{\{x\} \times V}$. Тому $\{x\} \times \overline{V} \subseteq \overline{W} \subseteq W_0 = X \overset{a}{\times} V_0$. Отже, $\overline{V} \subseteq V_0$, бо $x \neq a$.

Достатність. (0) Нехай X та $\dot{Y}$ — T_0-простори. Візьмемо в P дві різні точки $p_1 = (x_1, y_1)$ і $p_2 = (x_2, y_2)$. Нехай спочатку $x_1 \neq x_2$, тоді існує відкрита в X множина U, яка містить рівно одну із точок x_1, x_2. В такому випадку множина $W = U \times Y$ є відкритою в P і містить рівно одну з точок p_1, p_2.

Нехай тепер $x_1 = x_2 = x$, тоді $y_1 \neq y_2$. Припустимо спочатку, що $y_1, y_2 \in \dot{Y}$. Тоді, оскільки $\dot{Y}$ є T_0-простором, існує відкрита в Y множина V, яка містить рівно одну із точок y_1, y_2. В такому випадку множина $W = \{x\} \times V$ буде околом однієї з точок p_1, p_2 і не міститиме іншої.

Розглянемо нарешті випадок, коли одна з точок y_1, y_2 дорівнює b. Наприиклад, нехай $y_1 = b \neq y_2$. Тоді множина $W = X \overset{x}{\times} Y$ є околом точки $p_1 = (x, b)$, який не містить точки $p_2 = (x, y_2)$.

(1) Нехай X та $\dot{Y}$ — T_1-простори і $\{b\}$ — замкнена множина в Y. Візьмемо в P дві різні точки $p_1 = (x_1, y_1)$ і $p_2 = (x_2, y_2)$. Якщо $x_1 \neq x_2$, то існує окіл U точки x_1 такий, що $x_2 \notin U$. Тоді $W = U \times Y$ є околом точки p_1 в P, до того ж $p_2 \notin W$.

Нехай $x_1 = x_2 = x$. Тоді $y_1 \neq y_2$. Розглянемо спочатку випадок, коли $y_1, y_2 \in \dot{Y}$. Тоді, оскільки $\dot{Y}$ є T_1-простором, існує окіл V точки y_1 в Y такий, що $y_2 \notin V$. Отже, множина $W = \{x\} \times V$ буде околом точки p_1 в P, до того ж $p_2 \notin W$.

Нехай тепер $y_1 = b \neq y_2$. Тоді множина $W = X \overset{x}{\times} Y$ є околом точки $p_1 = (x, b)$ і не містить точки $p_2 = (x, y_2)$.

Нарешті, розглянемо випадок, коли $y_1 \neq b = y_2$. Тоді, оскільки множина $\{b\}$ замкнена в Y, $\dot{Y}$ є околом точки y_1 в Y. Отже, множина $W = \{x\} \times \dot{Y}$ буде околом точки $p_1 = (x, y_1)$, який не містить точки $p_2 = (x, b)$.

(2) Нехай X та $\dot{Y}$ — гаусдорфові простори і $\{b\}$ — замкнена множина в Y. Візьмемо в P різні точки $p_1 = (x_1, y_1)$ і $p_2 = (x_2, y_2)$. Якщо $x_1 \neq x_2$, то існують неперетинні околи U_1 та U_2 точок x_1 і x_2 відповідно. Тоді множини $W_1 = U_1 \times Y$, $W_2 = U_2 \times Y$ будуть неперетинними околами точок p_1 і p_2 відповідно у просторі P.

Нехай тепер $x_1 = x_2 = x$. Тоді $y_1 \neq y_2$. Якщо $y_1, y_2 \in \dot{Y}$, то з гаусдорфовості простору $\dot{Y}$ та замкненості множини $\{b\}$ у просторі Y випливає, що існують неперетинні околи V_1, V_2 точок y_1, y_2 відповідно в Y. В такому випадку множини $W_1 = \{x\} \times V_1$ і $W_2 = \{x\} \times V_2$ є неперетинними околами точок p_1 і p_2 відповідно у просторі P.

Розглянемо нарешті випадок, коли одна з точок y_1 та y_2 дорівнює b. Нехай для визначеності $y_1 = b \neq y_2$. Покладемо $W_1 = X \overset{x}{\times} Y$ і $W_2 = \{x\} \times \dot{Y}$. Оскільки множина $\{b\}$ замкнена, то $\dot{Y}$ є околом точки y_2. Отже, W_1 і W_2 є неперетинними околами точок p_1 і p_2 в P відповідно.

(3) Нагадаємо, що топологічний простір X називається *дискретним*, якщо в ньому кожна одноточкова множина $\{x\}$ є відкритою. Підмножина E топологічного простору X називається *дискретною*, якщо підпростір E простору X дискретний, тобто для кожної точки $x \in E$ існує такий її відкритий в X окіл U_x, що $U_x \cap E = \{x\}$.

У випадку, коли простір X дискретний, добуток Сідра P подається у вигляді прямої суми своїх підпросторів $X \times \{b\}$ і $X \times \dot{Y}$, які очевидним чином регулярні. А тому і простір P буде регулярним.

Нехай тепер X — недискретний простір. Тоді точка b має базу замкнених околів в Y. Перевіримо, що простір P є регулярним. По-перше, за вже доведеним простір P є T_1-простором. Перевіримо аксіому T_3. Візьмемо точку $p_0 = (x_0, y_0)$ і її окіл W_0 у просторі P. Розглянемо спочатку випадок, коли $y_0 \neq b$. Оскільки $\dot{Y}$ — відкритий підпростір Y, то існує відкритий в $\dot{Y}$ окіл V_0 точки y_0 такий, що $\{x_0\} \times V_0 \subseteq W_0$. Далі, за рахунок регулярності $\dot{Y}$ виберемо відкритий в $\dot{Y}$ (а отже, і в Y) окіл V точки y_0 такий, що $\overline{V}^{\dot{Y}} = \overline{V} \setminus \{b\} \subseteq V_0$. Покладемо $W = \{x_0\} \times V$. Тоді W є відкритим околом точки p_0 в P, до того ж

$$\overline{W} = \{x_0\} \times (\overline{V} \setminus \{b\}) \subseteq \{x_0\} \times V_0 = W_0.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $y_0 = b$. Тоді існують такі околи U_0 і V_0 точок x_0 і b відповідно у просторах X та Y, що $U_0 \overset{x_0}{\times} V_0 \subseteq W_0$. Оскільки X регулярний, то існує такий замкнений окіл U точки x_0, що $U \subseteq U_0$. Далі, оскільки точка b має базу із замкнених околів в Y, то існує замкнений окіл V точки b в Y такий, що $V \subseteq V_0$. Тоді, оскільки $\{b\}$ замкнена в Y, множина $W = U \overset{x_0}{\times} V$ є замкненим околом точки p_0 в P, до того ж $W \subseteq W_0$.

3. Множина $S(W)$ і σ-дискретні простори. Нехай $P = X \times_b Y$ — добуток Сідра.

Для множини $W \subseteq P$ введемо в розгляд множину

$$S(W) = \{s \in X : (s, b) \in W \text{ і } (\{s\} \times \dot{V}) \cap W = \varnothing \text{ для деякого околу } V \text{ точки } b \text{ в } Y\}.$$

Лема 1. *Нехай b — неізольована точка простору Y і W — відкрита в P множина. Тоді множина $S(W)$ є дискретною.*

Доведення. Візьмемо деяку точку $s \in S(W)$. Оскільки W — окіл точки (s, b), то існують окіл U точки s і окіл V точки b такі, що $U \overset{s}{\times} V \subseteq W$. Перевіримо, що $U \cap S(W) = \{s\}$. Візьмемо $x \in U \cap S(W)$ і покажемо, що $x = s$. Якщо це не так, тобто $x \neq s$, то $x \in U \setminus \{s\}$, а тому $\{x\} \times V \subseteq U \overset{s}{\times} V \subseteq W$. Але $x \in S(W)$, тому існує такий окіл V_1 точки b, що $(\{x\} \times \dot{V}_1) \cap W = \varnothing$. Оскільки b — неізольована точка, то існує така точка $y \in V_1 \cap V$, що $y \neq b$. Тоді, з одного боку, $(x, y) \in \{x\} \times V \subseteq W$, а з іншого — $(x, y) \in \{x\} \times \dot{V}_1 \subseteq P \setminus W$, що неможливо. Таким чином, $x = s$, отже, $U \cap S(W) = \{s\}$. Це показує, що множина $S(W)$ є дискретною.

Лема 2. *Нехай $\mathcal{W}$ — дискретна система відкритих множин в $P = X \times_b Y$ і точка b неізольована в Y. Тоді множина $S = \bigcup\limits_{W \in \mathcal{W}} S(W)$ є дискретною в X.*

Доведення. Нехай $x \in S$. Нам потрібно знайти такий окіл U точки x в X, що $U \cap S = \{x\}$. Для цього розглянемо відповідну точку $p = (x, b)$ у просторі P. Оскільки система $\mathcal{W}$ дискретна, то існує такий окіл $W_1 = U_1 \overset{x}{\times} V_1$ точки p в P, що W_1 перетинається щонайбільше з одним елементом системи $\mathcal{W}$. Із включення $x \in S$ випливає, що $x \in S(W_0)$ для деякої множини $W_0 \in \mathcal{W}$. З означення множини $S(W_0)$ випливає, що $p = (x, b) \in W_0$. Крім того, $p \in W_1$, отже, $p \in W_1 \cap W_0$, а значить, $W_1 \cap W_0 \neq \varnothing$. Тому $W_1 \cap W = \varnothing$ для кожного $W \in \mathcal{W} \setminus \{W_0\}$. Але $S(W) \times \{b\} \subseteq W$ і $U_1 \times \{b\} \subseteq W_1$, отже, $(S(W) \times \{b\}) \cap (U_1 \times \{b\}) = \varnothing$ для кожного $W \in \mathcal{W} \setminus \{W_0\}$, а значить, $S(W) \cap U_1 = \varnothing$ для таких W. Тому $S \cap U_1 = S(W_0) \cap U_1$. Множина $S(W_0)$ є дискретною за лемою 1 і $x \in S(W_0)$, тому існує такий окіл U_2 точки x, що $U_2 \cap S(W_0) = \{x\}$. Покладаючи $U = U_1 \cap U_2$, отримуємо шуканий окіл точки x, бо для нього $U \cap S = U_1 \cap U_2 \cap S = U_1 \cap S(W_0) \cap U_2 = U_2 \cap \{x\} = \{x\}$.

Лема 3. *Нехай S — дискретна множина в T_1-просторі X. Тоді множина $\overline{S} \setminus S$ є замкненою в X.*

Доведення. Оскільки множина S дискретна в X, то для кожної точки $s \in S$ існує такий відкритий окіл U_s точки s в X, що $U_s \cap S = \{s\}$. Утворимо множину $G = \bigcup\limits_{s \in S} U_s$, яка буде відкритою в X як об'єднання відкритих в X множин, і доведемо, що $\overline{S} \setminus S = \overline{S} \setminus G$.

З одного боку, $s \in U_s$ для кожного $s \in S$, отже, $S \subseteq G$, а значить, $\overline{S} \setminus S \supseteq \overline{S} \setminus G$. Навпаки, нехай $x \in \overline{S} \setminus S$. Тоді $x \in \overline{S}$ і $x \notin S$. Припустимо, що $x \in G$. Тоді існує таке $s \in S$, що $x \in U_s$. Оскільки $x \notin S$, а $s \in S$, то $x \neq s$. Тому існує такий відкритий окіл V_s точки x в X, що $x \in V_s$, а $s \notin V_s$, адже X задовольняє аксіому T_1. Розглянемо множину $U = U_s \cap V_s$, яка є відкритим околом точки x в X. Оскільки $x \in \overline{S}$, то $U \cap S \neq \varnothing$, отже, існує точка $s_0 \in U \cap S$. Тоді $s_0 \in V_s$, а $s \notin V_s$, звідки отримуємо, що $s \neq s_0$. З іншого боку, $s_0 \in U_s \cap S = \{s\}$, отже, $s = s_0$. Отримана суперечність показує, що $x \notin G$. В такому випадку $x \in \overline{S} \setminus G$ і рівність $\overline{S} \setminus G = \overline{S} \setminus S$ доведено. З неї отримуємо

$$\overline{S} \setminus S = \overline{S} \setminus G = \overline{S} \cap (X \setminus G),$$

звідки випливає, що множина $\overline{S} \setminus S$ замкнена в X, адже множини $\overline{S}$ і $X \setminus G$ замкнені в X.

Нагадаємо [3, с. 86], що топологічний простір X називається *досконалим*, якщо кожна відкрита в X множина G є множиною типу F_σ, тобто подається у вигляді об'єднання послідовності замкнених в X множин F_n.

Лема 4. *Кожна дискретна множина S в досконалому T_1-просторі X подається у вигляді об'єднання послідовності замкнених дискретних множин S_n.*

Доведення. За лемою 3 множина $E = \overline{S} \setminus S$ є замкненою. Тоді її доповнення $G = X \setminus E$ — відкрита множина. Легко зрозуміти, що $G \cap \overline{S} = S$. Справді, якщо $s \in S$, то $s \notin E$ і $s \in \overline{S}$, отже, $s \in G \cap \overline{S}$. Навпаки, якщо $s \in G \cap \overline{S}$, то $s \in \overline{S}$ і $s \notin E$. Тоді обов'язково $s \in S$, бо у випадку $s \notin S$ ми мали б, що $s \in E$, а це не так.

Відкрита множина G буде F_σ-множиною у досконалому просторі X. Тому існує така послідовність замкнених множин F_n, що $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. У такому випадку для замкнених множин $S_n = F_n \cap \overline{S}$ маємо

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cap \overline{S} = G \cap \overline{S} = S.$$

Оскільки $S_n \subseteq S$ і S — дискретна множина, то і множини S_n дискретні.

Лему доведено.

Топологічний простір X називається *σ-дискретним*, якщо він подається у вигляді об'єднання послідовності своїх дискретних підпросторів A_n.

Лема 5. *Нехай X — σ-дискретний досконалий T_1-простір. Тоді існує така послідовність замкнених дискретних множин S_n, що $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$.*

Доведення. За умовою існує послідовність дискретних множин A_n така, що $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. За лемою 4 для кожного n існує така послідовність замкнених дискретних множин $A_{n,k}$, що $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{n,k}$. Перенумерувавши подвійну послідовність $(A_{n,k})_{n,k=1}^{\infty}$ у звичайну послідовність $(S_m)_{m=1}^{\infty}$, отримаємо, що

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k} = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$$

і множини S_m замкнені і дискретні.

4. Метризовність добутку Сідра. Нехай X і Y — топологічні простори і b — неізольована точка в Y.

Теорема 2. *Добуток Сідра $P = X \times_b Y$ буде метризовним тоді і тільки тоді, коли простори X і $\dot{Y} = Y \setminus \{b\}$ метризовні, до того ж X — σ-дискретний простір і множина $\{b\}$ замкнена в Y. Якщо ж X недискретний, то точка b має зліченну базу замкнених околів в Y.*

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що P — метризовний простір. Оскільки простори X та $\dot{Y}$ гомеоморфно вкладаються в P, то вони метризовні. З теореми 1(1) випливає, що множина $\{b\}$ замкнена в Y. Нехай X — недискретний простір і a — його неізольована точка. З теореми 1(3) випливає, що b має базу із замкнених околів в Y. Доведемо, що точка b має зліченну базу околів. Оскільки P метризовний, то точка $p_0 = (a, b)$ має зліченну базу околів $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ в P. Для довільного n візьмемо околи U_n точки a і V_n точки b такі, що $U_n \overset{a}{\times} V_n \subseteq W_n$. Покажемо, що система $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ утворює базу околів точки b в Y. Розглянемо деякий окіл V точки b в Y. Тоді, оскільки $W = X \overset{a}{\times} V$ є околом точки p_0 в P, існує таке n, для якого $W_n \subseteq W$. Але a — неізольована точка простору X, отже, існує точка $x \in U_n \setminus \{a\}$. Тоді $\{x\} \times V_n \subseteq U_n \overset{a}{\times} V_n \subseteq W_n \subseteq W = X \overset{a}{\times} V$. Таким чином, $V_n \subseteq V$.

Доведемо, що простір X є σ-дискретним. За критерієм метризовності Бінга [3, c. 418] простір P регулярний і в ньому існує σ-дискретна база. Нехай $\mathcal{W}$ — σ-дискретна база простору P така, що $\mathcal{W} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n$, де системи $\mathcal{W}_n$ дискретні. Для довільної множини $W \in \mathcal{W}$ розглянемо дискретну за лемою 1 множину $S(W)$ і покладемо $S_n = \bigcup\limits_{W \in \mathcal{W}_n} S(W)$ і $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. За лемою 2 множини S_n дискретні, а отже, S — σ-дискретна множина. Доведемо, що $X = S$. Візьмемо точку $x \in X$ і розглянемо окіл $W_0 = X \overset{x}{\times} Y$ точки $p = (x, b)$. Оскільки $\mathcal{W}$ — база, то існує така множина $W \in \mathcal{W}$, що $p \in W \subseteq W_0$. Тоді $x \in S(W) \subseteq S$. Таким чином, X — σ-дискретний простір.

Достатність. Припустимо, що простори X і $\dot{Y}$ метризовні, X — недискретний σ-дискретний простір і виконуються подальші умови щодо точки b, які вказані у формулюванні теореми. З теореми 1(3) випливає, що простір P є регулярним. Тому за критерієм метризовності Бінґа досить побудувати σ-дискретну базу $\mathcal{W}$ простору P. Оскільки простори X та $\dot{Y}$ метризовні, то за критерієм Бінґа існують σ-дискретні бази $\mathcal{U}$ та $\mathcal{V}$ просторів X та $\dot{Y}$ відповідно. Розглянемо такі дискретні системи $\mathcal{U}_n$ та $\mathcal{V}_n$ в X та $\dot{Y}$ відповідно, що

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n, \qquad \mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n.$$

Нехай також $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ — база відкритих околів точки b в Y. За лемою 5 існує така послідовність непорожніх замкнених дискретних множин S_n в X, що $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$.

Покладемо

$$\mathcal{W}_{n,k} = \big\{\{x\} \times V : x \in S_k, V \in \mathcal{V}_n\big\}.$$

Далі для довільних номерів m, n, k і $U \in \mathcal{U}_m$ покладемо

$$W_{n,k}(U) = \big((U \setminus S_k) \times B_n\big) \cup \big((U \cap S_k) \times \{b\}\big)$$

і

$$\mathcal{W}_{m,n,k} = \{W_{n,k}(U) : U \in \mathcal{U}_m\}.$$

Доведемо, що система $\mathcal{W}_{n,k}$ дискретна в P. Розглянемо деяку точку $p_0 = (x_0, y_0) \in P$. Нехай спочатку $y_0 \neq b$. Оскільки система $\mathcal{V}_n$ дискретна в $\dot{Y}$, то існує окіл V_0 точки y_0, який перетинається щонайбільше з одним елементом системи $\mathcal{V}_n$. Тоді $W_0 = \{x_0\} \times V_0$ — окіл точки p_0, який перетинається щонайбільше з одним елементом системи $\mathcal{W}_{n,k}$.

Нехай тепер $y_0 = b$. Оскільки множина S_k замкнена і дискретна, то існує відкритий окіл U_0 точки x_0 в X, який містить щонайбільше одну точку з множини S_k, тобто для деякого $s_0 \in S_k$ виконується, що $U_0 \cap S_k \subseteq \{s_0\}$. Тоді множина $W_0 = U_0 \overset{s_0}{\times} Y$ є відкритим околом точки p_0, який не перетинається з жодним елементом системи $\mathcal{W}_{n,k}$.

Перевіримо, що система $\mathcal{W}_{m,n,k}$ є дискретною в P. Зафіксуємо деяку точку $p_0 = (x_0, y_0)$ з простору P. Оскільки система $\mathcal{U}_m$ дискретна, то існує окіл U_0 точки x_0 в X, який перетинається щонайбільше з одним елементом системи $\mathcal{U}_m$. Покладемо $W_0 = U_0 \times Y$. Зрозуміло, що W_0 є околом точки p_0 в P. Зауважимо, що $W_{n,k}(U) \subseteq U \times Y$ для довільного $U \in \mathcal{U}_m$. Тому W_0 перетинається щонайбільше з одним елементом системи $\mathcal{W}_{m,n,k}$.

Покладемо $\mathcal{W} = \bigcup\limits_{n,k=1}^{\infty} \mathcal{W}_{n,k} \cup \bigcup\limits_{m,n,k=1}^{\infty} \mathcal{W}_{m,n,k}$. Зрозуміло, що $\mathcal{W}$ — відкрита σ-дискретна система.

Доведемо, що система $\mathcal{W}$ є базою простору P. Розглянемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in P$ і деякий її окіл W_0 в P.

Нехай спочатку $y_0 = b$, тоді існують окіл U_0 точки x_0 в X і окіл V_0 точки b в Y такі, що $W_1 = U_0 \overset{x_0}{\times} V_0 \subseteq W_0$. Оскільки $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k$, то існує таке $k \in \mathbb{N}$, що $x_0 \in S_k$. Але множина S_k є дискретною. Тому існує такий окіл U_1 точки x_0, для якого $U_1 \subseteq U_0$ і $U_1 \cap S_k = \{x_0\}$. Оскільки $\mathcal{U}$ — база простору X, то існує така множина $U \in \mathcal{U}$, що $x_0 \in U \subseteq U_1$. Але $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}_m$. Отже, існує такий номер m, що $U \in \mathcal{U}_m$. Далі виберемо такий номер n, що $B_n \subseteq V_0$. Покладемо $W = W_{n,k}(U)$. Покажемо, що $p_0 \in W \subseteq W_0$. Оскільки $x_0 \in S_k \cap U$, то $p_0 = (x_0, b) \in (S_k \cap U) \times \{b\} \subseteq W$. Візьмемо точку $p = (x, y) \in W$ і покажемо, що $p \in W_0$. По-перше, $y \in B_n \subseteq V_0$. По-друге, якщо $y \neq b$, то $x \in U \setminus S_k \subseteq U_1 \setminus S_k = U_1 \setminus \{x_0\} \subseteq U_0 \setminus \{x_0\}$. Таким чином, якщо $y \neq b$, то $p \in W_1 \subseteq W_0$. Нехай тепер $y = b$. Оскільки $x \in U$, то $p \in W_1 \subseteq W$.

Розглянемо тепер випадок, коли $y_0 \neq b$. Тоді існує такий відкритий окіл V_0 точки y_0 в $\dot{Y}$, що $\{x_0\} \times V_0 \subseteq W_0$. Далі, оскільки система $\mathcal{V}$ є базою в $\dot{Y}$, то існує така множина $V \in \mathcal{V}$, що $y_0 \in V \subseteq V_0$. Тоді $W = \{x_0\} \times V$ є околом точки p_0. Покажемо, що $W \in \mathcal{W}$. Оскільки $V \in \mathcal{V} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, то існує такий номер n, що $V \in \mathcal{V}_n$. Далі з того, що $x_0 \in X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k$, випливає, що $x_0 \in S_k$ для деякого k. Тоді $W \in \mathcal{W}_{n,k} \subseteq \mathcal{W}$. Таким чином, $\mathcal{W}$ — σ-дискретна база простору P.

Для дискретного простору X метризовність добутку Сідра є очевидною.

***Наслідок* 1.** *Нехай X — недискретний топологічний простір, Y – регулярний простір і b — неізольована точка простору Y. Тоді для того щоб добуток Сідра $P = X \times_b Y$ був метризовним, необхідно і достатньо, щоб простори X та Y були метризовними, причому X був σ-дискретним.*

Доведення. *Достатність* випливає з теореми 2. Доведемо *необхідність*. З теореми 2 випливає, що простори X та $\dot{Y}$ метризовні і b має зліченну базу $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих околів в Y. Доведемо, що простір Y є метризовним. Для цього знову скористаємось критерієм метризовності Бінга. Оскільки $\dot{Y}$ метризовний, то в ньому існує σ-дискретна база $\mathcal{V}$. Розглянемо дискретні в $\dot{Y}$ системи $\mathcal{V}_n$ такі, що $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$. Покладемо $\mathcal{V}_{m,n} = \{V \in \mathcal{V}_n : B_m \cap V = \varnothing\}$, $\dot{\mathcal{V}} = \bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} \mathcal{V}_{m,n}$ і $\tilde{\mathcal{V}} = \dot{\mathcal{V}} \cup \mathcal{B}$. Покажемо, що $\tilde{\mathcal{V}}$ є σ-дискретною базою в Y. По-перше, перевіримо, що система $\mathcal{V}_{m,n}$ дискретна в Y. Візьмемо $y_0 \in Y$. Якщо $y_0 \neq b$, то існує окіл V_0 точки y_0 в $\dot{Y}$, який перетинається щонайбільше з одним елементом системи $\mathcal{V}_n$, а значить, і $\mathcal{V}_{m,n}$. Якщо ж $y_0 = b$, то B_m — окіл точки y_0, який не перетинається з жодним елементом системи $\mathcal{V}_{m,n}$. Отже, $\dot{\mathcal{V}}$ є σ-дискретною в Y. Але база $\mathcal{B}$ є зліченною, а значить, σ-дискретною. Отже, $\tilde{\mathcal{V}}$ є σ-дискретною. Доведемо, що $\tilde{\mathcal{V}}$ — база в Y. Візьмемо $y_0 \in Y$ і деякий окіл V_0 точки y_0 в Y.

Якщо $y_0 = b$, то існує така множина $V \in \mathcal{B} \subseteq \tilde{\mathcal{V}}$, що $y_0 \in V \subseteq V_0$. Нехай тепер $y_0 \neq b$. Візьмемо диз'юнктні околи V_1 точки y_0 і V_2 точки b. Оскільки $\mathcal{B}$ є базою околів точки b, то існує такий номер m, що $B_m \subseteq V_2$. А з того, що $\mathcal{V}$ є базою в $\dot{Y}$, випливає, що існує множина $V \in \mathcal{V}$, для якої $y_0 \in V \subseteq V_0 \cap V_1$. Виберемо номер n так, що $V \in \mathcal{V}_n$. Оскільки $V \cap B_m \subseteq V_1 \cap V_2 = \varnothing$, то $V \in \mathcal{V}_{m,n} \subseteq \tilde{\mathcal{V}}$, до того ж $y_0 \in V \subseteq V_0$. Таким чином, $\tilde{\mathcal{V}}$ — σ-дискретна база регулярного простору Y, а отже, за критерієм Бінґа простір Y є метризовним.

5. Деякі наслідки з критерію метризовності добутку Сідра. У цьому пункті ми наведемо простіші достатні умови на простори X і Y, щоб добуток Сідра був неметризовним.

Лема 6. *Нехай X — T_1-простір без ізольованих точок і S – дискретна множина в X. Тоді S — ніде не щільна в X.*

Доведення. Нехай U — відкрита в X множина і $U \cap S \neq \varnothing$. Тоді існує точка $s \in U \cap S$. З дискретності S випливає, що існує такий відкритий окіл U_s точки s, що $U_s \cap S = \{s\}$. Оскільки множина $\{s\}$ замкнена, то множина $V = (U \cap U_s) \setminus \{s\}$ буде відкритою. Зрозуміло, що $V \subseteq U$ і $V \cap S = \varnothing$. Крім того, $V \neq \varnothing$, бо точка s не є ізольованою в X. Отже, множина S ніде не щільна.

Лема 7. *Кожний σ-дискретний T_1-простір X без ізольованих точок є множиною першої категорії в собі.*

Доведення. За умовою $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$, де множини S_n є дискретними. Вони ж будуть ніде не щільними в X за лемою 6, а тому X — множина першої категорії в X.

Теорема 3. *Нехай X — T_1-простір другої категорії без ізольованих точок і Y — довільний топологічний простір з неізольованою точкою b. Тоді добуток Сідра $P = X \times_b Y$ — неметризовний простір.*

Доведення. Якби P був метризовним простором, то за теоремою 2 X був би σ-дискретним простором, а отже, за лемою 7 був би простором першої категорії, що суперечить умові.

1. *Маслюченко В., Мироник О.* Вичерпність гребінця Сідра // Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": Тези доп. (Ворохта, 20 – 26 лютого 2012 р.). – Ів.-Франківськ, 2012. – С. 44 – 45.
2. *Ceder J.* Some generalizations of metric spaces // Pacif. J. Math. – 1961. – **11**. – P. 105 – 126.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
4. *Маслюченко В. К., Мироник О. Д.* Добуток Сідра та вичерпні простори // Бук. мат. журн. – 2013. – **1**, № 1-2. – С. 107 – 112.

Одержано 28.08.13,
після доопрацювання — 18.01.15