Ю. Б. Зелінський (Ін-т математики НАН України, Київ)

РОЗВИТОК КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ В ІНСТИТУТІ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ ПРОТЯГОМ 1991 – 2013 РР.

Для того щоб історія досліджень з комплексного аналізу в Інституті математики НАН України була більш зрозумілою, варто зупинитися спочатку на попередніх етапах реорганізацій в інституті, що привели до створення (точніше, відновлення) в 1989 р. відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу.

Першого липня 1939 р. в Інституті математики було створено відділ теорії функцій комплексної змінної під керівництвом академіка М. О. Лаврентьєва, який водночас керував інститутом.

Першого березня 1960 р. керівником відділу теорії функцій комплексної змінної було призначено доктора фіз.-мат. наук П. Ф. Фільчакова.

Одинадцятого липня 1963 р. відділ теорії функцій комплексної змінної було реорганізовано у відділ прикладної математики і водночас створено відділ теорії функцій. Керівником новоствореного відділу було призначено доктора фіз.-мат. наук В. К. Дзядика. З цього часу почав складатися і зростати колектив дослідників, який продовжив та розвинув засновані М. О. Лаврентьєвим наукові напрямки в комплексному аналізі та теорії потенціалу.

Першого серпня 1974 р. від відділу теорії функцій відокремився відділ геометричної теорії функцій та топології. Керівником відділу було призначено члена-кореспондента АН УРСР М. П. Корнєйчука, який після обрання переїхав до Києва. До цього він працював у Дніпропетровському університеті. У складі нового відділу було створено дві лабораторії: топологічних методів аналізу (завідувач — доктор фіз.-мат. наук Ю. Ю. Трохимчук) та комплексного аналізу (завідувач — доктор фіз.-мат. наук П. М. Тамразов).

Після смерті завідувача відділу алгебри члена-кореспондента АН УРСР С. М. Чернікова в 1987 р. на базі цього відділу та лабораторії топологічних методів аналізу було створено відділ алгебри та топології під керівництвом Ю. Ю. Трохимчука. Першого березня 1989 р. лабораторію комплексного аналізу було реорганізовано у відділ комплексного аналізу та теорії потенціалу під керівництвом П. М. Тамразова. Невисокі зарплати науковців у перші роки незалежності України часто змушували вчених шукати кращих заробітків у інших країнах. Від'їзд Ю. Ю. Трохимчука на тривалу роботу до Польщі, а також утворення відділу алгебри під керівництвом А. В. Ройтера викликали у 1996 р. перетворення відділу алгебри та топології в лабораторію топологічних методів аналізу (завідувач — доктор фіз.-мат. наук А. В. Бондар) при відділі комплексного аналізу та теорії потенціалу, а пізніше, у 1999 р., у зв'язку з закриттям лабораторій в інституті, ліквідацію її як окремої адміністративної одиниці. Цим можна пояснити, чому дослідження з комплексного аналізу та теорії потенціалу велися не лише в однойменному відділі, а і в інших споріднених підрозділах інституту.

Основними напрямками досліджень, що проводяться у відділі, є геометрична теорія функцій однієї та багатьох комплексних змінних, розробка аналітичних методів для ефективного розв'язання крайових задач у комплексній площині та у просторі, класична теорія потенціалу та теорія потенціалу, пов'язана з еліптичними рівняннями, опуклий аналіз у комплексних просторах та поширення його на більш широкі простори та многовиди.

Коротко зупинимося на наукових досягненнях у царині комплексного аналізу та теорії потенціалу співробітників інституту за роки незалежності.

В роботах П. М. Тамразова розроблено загальну контурно-тілесну теорію для голоморфних функцій у відкритих множинах комплексної площини і в комплексних аналітичних просторах. Деякі з цих результатів поширено на мероморфні і субгармонічні функції, голоморфні функції і відображення комплексних аналітичних просторів і модулів гладкості порядку $k > 1$.

Розв'язано диференціальну проблему для аналітичних функцій у довільній відкритій множині на комплексній площині і в кожній фіксованій точці межі. Це дало остаточний позитивний розв'язок проблеми, яка обговорювалася учасниками міжнародного конгресу математиків на проблемному семінарі в Цюріху, що відбувся в 1994 р.

П. М. Тамразовим розширено теорему Брело – Картана про усунення особливостей для субгармонічних функцій на довільних множинах внутрішньої ємності нуль, які стираються при субгармонічних розширеннях функції багатьох змінних без обмеження на ємність (1993 р.).

Отримано результати для плюрісубгармонічних розширень функцій для комплексно-аналітичних і топологічних векторних просторів. Зокрема, розв'язано проблему про стирання збурень обмежених особливостей для плюрісубгармонічних функцій у топологічних комплексних векторних просторах. Цю проблему вивчали в 60-ті роки, але повністю вона була розв'язана П. М. Тамразовим для нескінченновимірних просторів у 1991 р.

Встановлено контурно-тілесні й кластерні теореми для тонко і субгармонічних тонко голоморфних функцій у тонко відкритих множинах зі сталими та змінними мажорантами. Це заклало основи тонкої теорії потенціалу (2001 – 2009 рр.).

Розвинено гармонічний аналіз у векторних просторах для комплексно-скінченних і поділених різниць та для комплексних скінченних і поділених різниць суперпозиції функцій, яка була відкритою проблемою навіть для простих функцій на дійсному інтервалі і класичних дійсних скінченних різниць. Ці теорії були необхідні для різних застосувань у конструктивній і геометричній теорії функцій. Розв'язано проблему про конформні модулі та екстремальні метрики ріманового листка Мебіуса, поставлену П. П'ю в 1952 р. та екстремальну проблему про гармонічні функції, поставлену О. Є. Єременком у 1995 р. Розв'язано також екстремальну проблему теорії потенціалу, яка є далекосяжним узагальненням проблеми О. Є. Єременка, в одиничній кулі n-вимірного $(n \geq 2)$ евклідового простору, в класі всіх нормованих m-вимірних $(m \geq 2)$ гармонічних полів знайдено мінімакс концентричної кулі позитивності однієї з компонент поля; поля нормовані в термінах екстремальних гармонічних мажорант і мінорант усіх їхніх компонент. Розв'язано задачі про мінімізацію енергії зарядів на батареях конденсаторів.

У зв'язку з екстремальними задачами, в тому числі з проблемою М. Г. Чеботарьова та її узагальненнями і проблемою Г. Гретша, П. М. Тамразов розробив конструктивний метод побудови всіх екстремалей цих задач через належний клас прямолінійних графів, що дає вичерпну взаємно однозначну параметризацію всіх екстремалей у термінах явно заданих особливостей (2004 – 2010 рр.).

За роки незалежності під керівництвом П. М. Тамразова захищено 4 докторські

(Н. В. Зорій, В. С. Кудьявін, С. А. Плакса, О. К. Бахтін) та 2 кандидатські (О. А. Сарана, С. А. Охріменко) дисертації.

На початку 90-х років Н. В. Зорій заснувала та розробляє новий напрямок — суттєво некомпактні екстремальні задачі теорії потенціалу на класах векторних мір Радона зліченної (скінченної чи нескінченної) розмірності у локально компактних (зокрема, евклідових) просторах. Тут нею отримано фундаментальні результати: зокрема, для широкого класу додатно визначених ядер (що містить у собі, наприклад, класичні ядра Ньютона, Гріна чи Рісса) знайдено необхідні та достатні умови розв'язності варіаційної задачі Гаусса про мінімізацію енергій при наявності зовнішніх полів, що (навіть у сенсі достатніх умов) було відкритою проблемою протягом кількох десятиліть (див. M. Ohtsuka, 1961 р.). Знайдено варіаційні нерівності для рівноважних потенціалів, виокремлено їх характеристичні властивості, досліджено неперервності екстремалей у сильній та широкій топологіях.

Це стало можливим завдяки розробці принципово нових методів та підходів, що ґрунтуються на впровадженні ефективних метричних структур над належними класами векторних мір та доведенні теореми про повноту відповідних метричних просторів, яка є особливо цікавою у контексті класичного результату H. Cartan (1945 р.) про сильну неповноту простору всіх скалярних мір зі скінченною ньютоновою енергією.

Н. В. Зорій спільно з H. Harbrecht, G. Of та W. L. Wendland у 2010 – 2013 рр. побудували конструктивний та числовий розв'язок варіаційної задачі Гаусса для ядер Ньютона і Рісса на гладких многовидах, а також отримали еквівалентне формулювання цієї задачі в термінах узагальнених функцій з простору Соболєва – Слободецького, що дозволило застосувати для її розв'язання апарат інтегральних операторів.

На стику теорії потенціалу та геометричної теорії функцій Н. В. Зорій розроблено теорію внутрішніх ємностей просторових конденсаторів зі зліченною кількістю пластин довільної топологічної структури. Серед отриманих тут результатів особливе місце займають необхідні та достатні умови існування рівноважних розподілів, описи їх потенціалів та носіїв, точні співвідношення рівностей та нерівностей між теоретико-потенціальними, теоретико-функціональними, екстремально-метричними та дискретними характеристиками, вичерпний аналіз неперервностей екстремалей. Побудована Н. В. Зорій теорія є суто просторовою та містить низку принципово нових ефектів, не властивих ні теорії логарифмічних ємностей плоских конденсаторів, ні теорії внутрішніх ємностей множин (див. відповідно дослідження T. Bagby, О. О. Гончара, Є. А. Рахманова, П. М. Тамразова та O. Frostman, H. Cartan, C. Vallee-Poussin, B. Fuglede). Зокрема, відкрито несподіваний ефект відсутності рівноважних розподілів на некомпактних просторових конденсаторах, що спостерігається навіть у найбільш природному випадку ядра Кулона. У зв'язку з цим ефектом у 2010 – 2011 рр. Н. В. Зорій знайдено постановки варіаційних задач, дуальних до основної мінімум-проблеми теорії ємностей просторових конденсаторів, але вже завжди розв'язних. Це привело до природного узагальнення на об'єкти нескінченної розмірності класичного поняття внутрішнього ємнісного розподілу, асоційованого з множиною (див. H. Cartan, 1945 р.).

Н. В. Зорій розв'язано низку задач, що були відомі у математичній літературі як відкриті проблеми чи гіпотези: варіаційну задачу Гаусса як у її класичній постановці, так і в мажорантній постановці Є. А. Рахманова, задачу F. W. Gehring про опис ньютонових ємностей конденсаторів через класи пробних функцій та їх інтеграли Діріхле, задачу M. Kishi про існування міри конденсатора, задачу G. D. Anderson і M. K. Vamanamurthy про точну оцінку ємності конденсатора через ємності його пластин. Отримані при цьому результати мають вигляд критеріїв, тобто є остаточними.

Дослідження В. С. Кудьявіна були присвячені гомеоморфним відображенням класів Соболєва на площині та в багатовимірному евклідовому просторі. Ці дослідження тісно пов'язані з багатьма областями математики та механіки. Особливо варто відмітити задачі та проблеми, які виникають в теорії пружності.

Теорія відображень плоских однозв'язних областей досить добре розвинена і використовує в основному апарат конформних віображень, що опирається на застосування відомої теореми Рімана. Ситуація з багатозв'язними областями на площині, а тим більше в багатовимірному евклідовому просторі змушує використовувати більш широкий апарат квазіконформних відображень. У просторі використання конформних відображень обмежене, згідно з відомою теоремою Ліувілля, лише перетвореннями Мебіуса. Але для багатьох питань не досить розглядати класи квазіконформних відображень, які породжують істотне обмеження на дилатації, що повинні бути рівномірно обмеженими майже скрізь в області. Більш гнучким та природним розширенням плоских и просторових топологічних відображень є відображення, квазіконформні в середньому, для яких рівномірна обмеженість дилатації замінена скінченністю в деякому інтегральному сенсі. Цьому класу відображень посвячено дослідження В. С. Кудьявіна. Він увів методи модулів сімей кривих і ємностей конденсаторів довільних порядків, що є істотним розвиненням методу екстремальних довжин. Ці методи базуються на вивченні спотворення даних величин, де роль константи в нерівностях відіграють функції множин. Розглянемо також метод спотворення радіусів нормальних околів. Ці методи застосовуються при вивченні диференціальних, метричних та геометричних властивостей відображень. Особлива цінність даних методів полягає в їх успішному застосуванні при розв'язанні екстремальних задач, тобто класичних задач знаходження відображень, при яких дилатації та їх інтегральні аналоги мінімізуються.

Роботи С. А. Плакси, І. П. Мельниченка і В. Ф. Ковальова зосереджені в комплексному і гіперкомплексному аналізі та їх застосуваннях до розв'язання крайових задач математичної фізики. Розвинуто новий ефективний для застосувань алгебраїчно-аналітичний підхід до основних рівнянь математичної фізики, ідея якого полягає в знаходженні таких комутативних банахових алгебр, що моногенні функції в них утворюють алгебру і мають компоненти, які задовольняють задані рівняння з частинними похідними (бігармонічне рівняння, просторове рівняння Лапласа, рівняння еліптичного типу з виродженням на осі).

Для тривимірного рівняння Лапласа встановлено, що не існує асоціативної комутативної алгебри третього рангу з одиницею над дійсним полем такої, щоб моногенні у цій алгебрі функції були його розв'язками. Проте для асоціативних комутативних алгебр третього рангу з одиницею над комплексним полем описано всі базиси в них такі, що компоненти моногенних у цих базисах функцій є розв'язками тривимірного рівняння Лапласа (І. П. Мельниченко).

При розробці вказаного підходу до задач просторових потенціальних полів у випадку осьової симетрії побудовано нескінченновимірну комутативну банахову алгебру (І. П. Мельниченко), аналітичні функції на якій, що розглядаються як головні продовження аналітичних функцій комплексної змінної, дають змогу при виділенні спеціальних двовимірних лінійних многовидів цієї алгебри одержувати потенціали та функції течії Стокса у вигляді ефективних у застосуваннях інтегральних зображень, що є аналогічними зображенню плоских гармонічних функцій інтегралами Коші (І. П. Мельниченко, С. А. Плакса). Отриманий результат є розв'язком проблеми М. О. Лаврентьєва про розробку методів дослідження просторових потенціальних полів, аналогічних до методів теорії аналітичних функцій, для випадку осесиметричних полів.

Для застосувань цього результату до прикладних задач теорії течії ідеальної рідини розроблено функціонально-аналітичний метод розв'язання крайових задач у меридіанній площині просторового потенціального поля з осьовою симетрією. При цьому здійснено редукцію задач Діріхле для осесиметричного потенціалу та функції течії Стокса до сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші на дійсній прямій, а у важливому для застосувань випадку гладкої межі, що задовольняє деякі додаткові умови, одержані сингулярні інтегральні рівняння редуковано до інтегральних рівнянь Фредгольма (С. А. Плакса). Встановлено також критерій розв'язності задачі обтікання у меридіанній площині методом особливостей різних порядків (І. П. Мельниченко, С. А. Плакса).

Побудовано бігармонічні алгебри, за допомогою яких дано зображення бігармонічних функцій та потенціалів Ейрі. Показано, що аналітичні функції на цих алгебрах можуть бути використані для розв'язання першої крайової задачі плоскої теорії пружності для опуклих в напрямку однієї з осей областей. Побудовано алгебри функцій, що задовольняють p-бігармонічне рівняння (І. П. Мельниченко, В. Ф. Ковальов).

Учні С. А. Плакси (С. В. Грищук, В. С. Шпаківський, Р. П. Пухтаєвич) продовжили дослідження в теорії моногенних функцій, що набувають значень у комутативних банахових алгебрах, асоційованих з основними рівняннями еліптичного типу.

Одержано конструктивний опис моногенних функцій, що набувають значень у двовимірній бігармонічній алгебрі і тривимірних гармонічних алгебрах, за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної (С. А. Плакса, С. В. Грищук, В. С. Шпаківський, Р. П. Пухтаєвич).

Встановлено основні аналітичні властивості моногенних функцій у бігармонічній площині, аналогічні до властивостей голоморфних функцій комплексної змінної: інтегральну теорему і інтегральну формулу Коші, теорему Морера, теорему єдиності, тейлорівські і лоранівські розклади. Доведено, що кожна бігармонічна функція в обмеженій однозв'язній області є компонентою деякої моногенної функції, заданої у відповідній області бігармонічної площини. Розв'язано в явному вигляді за допомогою інтегралів типу Шварца крайові задачі для канонічних областей бігармонічної площини, асоційовані з основною бігармонічною задачею (С. А. Плакса, С. В. Грищук).

Доведено аналоги інтегральних теорем Коші для поверхневого і криволінійного інтегралів від моногенних функцій у тривимірній гармонічній алгебрі, а також аналог інтегральної формули Коші для цих функцій. Доведено аналоги теорем Морера, Тейлора і Лорана для вказаних моногенних функцій та здійснено класифікацію їх особливостей. Встановлено достатні умови існування граничних значень гіперкомплексного аналога інтеграла типу Коші і знайдено аналоги формул Сохоцького (С. А. Плакса, В. С. Шпаківський).

Встановлено, що кожна тривимірна гармонічна функція є компонентою моногенної функції, що набуває значень у топологічному векторному просторі, який містить нескінченновимірну комутативну банахову алгебру, асоційовану з тривимірним рівнянням Лапласа (С. А. Плакса, В. С. Шпаківський).

Встановлено нові інтегральні зображення узагальнених осесиметричних потенціалів через аналітичні функції комплексної змінної, задані у довільній симетричній відносно дійсної осі однозв'язній області. Одержано оцінку локального модуля неперервності їх граничних значень (С. А. Плакса, С. В. Грищук).

Наукові дослідження О. К. Бахтіна зосереджені на вивченні екстремальних проблем геометричної теорії функцій комплексної змінної. Зокрема, ним вивчалися задачі, пов'язані з проблемою коефіцієнтів з екстремально метричними властивостями функцій. Починаючи з 2004 р. основні дослідження стосуються проблем, пов'язаних з екстремізацією нелінійних функціоналів на класах неперетинних областей та їх узагальнень. Ним було показано, що точний розв'язок екстремальних проблем такого виду суттєво залежить від геометрії розташування полюсів відповідних квадратичних диференціалів. Зокрема, було введено поняття (n,m)-променевої системи точок, завдяки якому вдалося значно узагальнити постановки задач. У зв'язку з (n,m)-променевими системами введено поняття кутових параметрів цієї системи, коефіцієнтів її зміщення та поняття „керуючого" функціонала, який накладає на системи деякі обмеження метричного характеру. За допомогою цих понять О. К. Бахтіну вдалося отримати точні розв'язки досить загальних задач про екстремальне розбиття комплексної площини. Ним було введено поняття заповнення несуттєвих межових компонент системи неперетинних областей, яке дозволило повністю отримати оцінки зверху добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок, що утворюють (n,m)-променеву систему в термінах логарифмічної ємності несуттєвих межових компонент.

У 1968 р. П. М. Тамразов запропонував розглянути екстремальні задачі з „вільними" полюсами. Цей напрям розвинено в роботах Г. П. Бахтіної, В. М. Дубініна, Л. В. Ковальова, Г. В. Кузьміної, Є. Г. Ємельянова. В більшості робіт розглядалися задачі, в яких полюси відповідних квадратичних диференціалів містилися, як правило, на колах і тим самим підпорядковувалися жорстким умовам на геометрію розташування. Належність колу О. К. Бахтіну вдалося замінити на умову, що певний „керуючий" функціонал на даній системі набуває фіксованого значення. Випадок, коли полюси належать фіксованому колу, є частинним випадком цієї умови. Легко показати, що системи, для яких певний „керуючий" функціонал дорівнює деякому числу, мають досить складну геометричну будову або навіть такі, що жодна пара точок не належить колу. Ця умова дозволяє відійти від рівняння кола. Таким чином, геометрія розташування полюсів може бути майже довільною.

Одержані ним оцінки в задачах про екстремальне розбиття вперше враховують відхилення неекстремальної конфігурації від екстремальної. Зокрема, з одержаних результатів випливає розв'язок узагальненої задачі Є. Г. Ємельянова про екстремальне розбиття, коли полюси розташовані на m вільних колах, $m \geq 2$.

Всі згадані вище результати для неперетинних областей було поширено на класи відкритих множин, які задовольняють певні умови відносно променевої системи точок, в тому числі частково перетинні області. Із цих результатів безпосередньо випливають теореми, які уточнюють відомі результати попередників. Ці результати цінні тим, що мажоранта, яка дає оцінку функціонала для кожної конкретної системи полюсів, враховує залежність полюсів від кутових та інших параметрів. Один із результатів знайшов застосування при розв'язанні відкритої проблеми В. М. Дубініна про опис екстремальних конфігурацій, що максимізують добуток внутрішніх радіусів n взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на степінь внутрішнього радіуса неперетинної з ними області. О. К. Бахтін дав асимптотичний розв'язок цієї проблеми В. М. Дубініна.

У своїх дослідженнях П. М. Тамразов відзначав, що найбільш цінним є той результат, в якому кількість полюсів не є обмеженою.

О. К. Бахтін розглянув та розв'язав одну задачу про екстремальне розбиття, в якій оцінюється функціонал, що є добутком різних степенів двох „схрещених диполів" М. О. Лаврентьєва. Ця оцінка є уточненням результату М. О. Лаврентьєва.

В якості наслідків із вказаних вище результатів одержано теореми спотворення для ряду класів однолистих функцій. У 2011 р. О. К. Бахтін запропонував один загальний підхід, який дозволяє перенести більшість результатів геометричної теорії функцій на випадок довільних багатовимірних комплексних просторів. Запропоновано векторне узагальнення основних понять теорії функцій комплексної змінної: поняття модуля й аргументу комплексного числа, голоморфних та частково конформних відображень.

У 2008 р. О. К. Бахтіним, Г. П. Бахтіною та Ю. Б. Зелінським опубліковано монографію „Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе", в якій підведено підсумки по проблемах, пов'язаних з неперетинними областями.

Наукові дослідження Ю. Ю. Трохимчука пов'язані з новими топологічними методами при розв'язанні класичних теоретико-функціональних проблем. Істотний розвиток ним теорії множин моногенності комплексних функцій дозволив одержати нові критерії голоморфності. Одержано повне перенесення відомих теорем Д. Меншова про конформні відображення з класу однолистих функцій на довільні неперервні функції. Великий цикл робіт пов'язаний з вивченням теорії локального степеня відображення та диференціальних властивостей дійсних та комплексних функцій. Це привело до принципово нових критеріїв усувності особливостей аналітичних функцій, які базуються на теорії локального степеня довільних нульвимірних неперервних відображень, а також на теоремах про продовження внутрішніх відображень.

Однією з основних тем в останні роки є проблема усунення особливостей гармонічних і аналітичних функцій. Отримано теорему про неявну функцію з особливостями, а також узагальнення теореми В. К. Дзядика про геометричний критерій аналітичності функцій. Ю. Ю. Трохимчуком доведено, що просторовий і контурний модулі неперервності для аналітичних функцій у замкненій компактній області збігаються. Розв'язано (2008 р.) ряд проблем Данжуа столітньої давнини відносно аналітичних функцій з досконалими множинами особливих точок (відповідь на них та, яку передбачив Данжуа), а також доведено N-властивість таких же функцій при умові, що образ множини їх особливостей є ніде не щільним на площині. Показано, що кожне скінченнократне відображення підобластей многовидів фіксованої розмірності має скрізь щільну підмножину точок локальної гомеоморфності. Встановлено аналог теореми про середнє для комплекснозначних функцій.

Учні Ю. Ю. Трохимчука Е. О. Алікулов та Д. Д. Ілмурадов досліджували критерії аналітичності функції, множини моногенності та умови існування примітивних функцій.

Е. О. Алікулов показав, що якщо для функції з класу Ліпшиця на множині не першої категорії множини моногенності ніде не щільні, то на цій множині, за винятком множини першої категорії, множина моногенності є колом або точкою, а сама функція є диференційовною (1991 р.). Він встановив, що якщо для неперервної в області функції множина моногенності є підмножиною прямої розширеної комплексної площини зі сферичною топологією на ній, яка при цьому не вироджується в нескінченно віддалену точку, то така функція голоморфна в області (1992 р.).

Д. Д. Ілмурадов довів, що якщо для неперервної в області комплексної площини функції множина моногенності є ніде не щільною множиною, яка не збігається з колом у кожній точці області, за винятком не більше ніж зчисленної кількості точок, то функція є аналітичною в області (1993 р.).

Великою заслугою Ю. Ю. Трохимчука є створення топологічного семінару для активних студентів Київського університету ім. Т. Шевченка, який став зародком розвитку топологічної школи в Україні. В подальшому це привело до створення в Інституті математики відділу топології (2001 р.). Протягом двадцяти років, починаючи з 1963 р., Ю. Ю. Трохимчук був організатором літніх математичних шкіл, на яких завжди були представлені найповніші досягнення сучасної математики з найрізноманітніших її розділів (особливо – аналіз, диференціальні рівняння, топологія).

Член-кореспондент НАН України Ю. І. Самойленко працював у відділі в 2006 – 2008 рр. Його дослідження мали прикладний характер. Побудовано моделі припливного гальмування гравітуючих середовищ, що диференціально обертаються у полі тяжіння центральної маси. Ці моделі застосовано для пояснення деяких спостережень, здобутих під час космічної місії „Кассіні” в околі Сатурна. На прикладі лагранжевої моделі керованого ансамблю частинок із внутрішніми ступенями вільності доведено можливість перетворення теплової енергії в когерентну форму без використання різниці температур між нагрівачем та холодильником. Тим самим послаблено обмеження, які обумовлені другим началом термодинаміки. Методами теорії потенціалу побудовано математичні моделі диференціального обертання речовини у рідких ядрах планет та планетних кільцях. Передбачені ефекти знайшли підтвердження у даних магнітометрії планет Сонячної системи та зображеннях тонкої структури кілець Сатурна, а також знайденого на поверхні його супутника Япет екваторіального гірського валу. Запропоновано та досліджено лагранжеву модель відкритої білінійної системи керування для перетворення теплової енергії в енергію когерентних керуючих полів. Ця модель, на відміну від класичних теплових машин, дозволяє отримати додатний енергетичний вихід від однотемпературного джерела без застосування будь-якого охолоджуючого пристрою, крім системи керування. Обґрунтовано фізичну реалізацію можливості прямого перетворення енергії тепла в механічну форму без використання термічного охолодження.

У 2004 р. завідувачем відділу було призначено доктора фіз.-мат. наук Ю. Б. Зелінського — учня Ю. Ю. Трохимчука. Його наукові дослідження стосуються застосувань геометричних та топологічних методів у комплексному та опуклому аналізі. В теорії відображень він уперше ввів і застосував локальний степінь відображення для багатозначних відображень областей топологічних многовидів. Завдяки цьому розв'язано проблеми Штейнгауза – Косінського щодо оцінки розмірності підмножин фіксованої кратності для відображень областей на многовидах, якщо відомі властивості відображень на межі області. Доведено, що клас відображень дійсного проективного простору в сферу тієї ж розмірності з не більш ніж трьома прообразами точок не є порожнім.

У комплексному аналізі Ю. Б. Зелінський застосував геометричні методи та метод багатозначних відображень до аналітичних задач комплексного аналізу. Отримав повну топологічну класифікацію лінійно опуклих та сильно лінійно опуклих множин з гладкими межами, встановив оцінки груп когомологій для таких областей та компактів. При цьому було розв'язано відомі проблеми Л. Айзенберга опису узагальнено опуклих множин, які довго не піддавалися математикам, котрі застосовували аналітичні підходи. Побудував контрприклад до гіпотези про можливу глобальну лінійну опуклість необмежених локально лінійно опуклих областей зі скрізь гладкою межею.

Ю. Б. Зелінський створив у комплексному аналізі новий напрямок — аналог класичного дійсного опуклого аналізу. При цьому показав, що комплексні аналоги дійсних результатів мають свою комплексну специфіку, яку не можна було передбачити, залишаючись у полі дійсного опуклого аналізу. Ряд результатів дозволяють отримати більш загальні твердження і в класичних теоремах опуклого аналізу (теореми Хеллі, Каратеодорі, Крейна – Мільмана).

Запропонував новий підхід до дослідження узагальнено опуклих множин на грассманових многовидах. Використання грассманових многовидів дозволило поширити теореми двоїстості (типу полярної відповідності) на клас підмножин евклідового простору. Узагальнено опуклі множини та багатозначні відображення пов'язують в одне ціле проблеми комплексного аналізу, топології, опуклого аналізу та стереології. Цей цикл досліджень відображено у трьох монографіях автора.

Геометричний та топологічний підходи до задач комплексного та гіперкомплексного аналізу розвивалися групою аспірантів та співробітників відділу під керівництвом Ю. Б. Зелінського (В. Л. Мельник, О. І. Герасін, І. В. Момот, М. В. Ткачук, Т. М. Осіпчук, І. Ю. Виговська, Б. А. Кліщук).

Задача топологічної класифікації узагальнено опуклих множин з гладкою межею в дійсному випадку виникла природно після встановлення Ю. Б. Зелінським аналогічного результату в комплексному випадку. Повністю таку класифікацію для дійсних евклідових просторів отримала В. Л. Мельник. Нею також побудовано приклади лінійно опуклих областей з майже скрізь гладкою межею та особливостями на межі, що межу не розбивають, які не будуть сильно лінійно опуклими областями.

О. І. Герасіним вивчено підмножини дійсного евклідового простору (в тому числі й не опуклі), для яких справедливим є аналог теореми Гана – Банаха. Отримано оцінки міри прямих та гіперплощин, що перетинають (розбивають на частини) узагальнено опуклі множини.

Узагальнено теорему Клі опуклого аналізу на комплексний випадок. Отримано двоїстий варіант комплексної теореми Крейна – Мільмана про визначення сильно лінійно опуклого компакта його екстремальними точками (І. В. Момот).

Наступний результат істотно підсилює результати Безиковича – Данцера – Замфіреску щодо геометричних характеристик кола (проблема Мізеля). Компактна множина, що розбиває площину і разом з будь-якими трьома вершинами прямокутника містить і четверту, є колом (М. В. Ткачук). Тут знято обмеження на множину (попередні результати було встановлено при умові, що досліджувана множина є опуклою або жордановою кривою).

Доведено, що межа пошарово опуклої обмеженої області з гладкою межею є когомологічною сферою, тобто має групи когомологій, ізоморфні групам когомологій сфери, і є топологічною сферою в розмірностях вище чотирьох (Ю. Б. Зелінський, М. В. Ткачук).

У термінах невід'ємності і додатності деяких спеціальних диференціальних форм другого порядку знайдено, відповідно, необхідні і достатні умови локальної лінійної опуклості областей з гладкою межею в багатовимірному кватерніонному просторі (Т. М. Осіпчук). Встановлено критерій лінійної опуклості обмежених областей Гартогса з гладкою межею в двовимірному кватерніонному просторі (Т. М. Осіпчук, М. В. Ткачук).

Отримано зовнішні критерії опуклості та сильної лінійної опуклості областей і компактів (Ю. Б. Зелінський, І. Ю. Виговська). Показано, що у випадку апріорі ациклічних компактів для встановлення їх опуклості (сильної лінійної опуклості) досить мати інформацію про перетини цього компакта не всіма площинами, а тільки опорними. І. Ю. Виговською узагальнено класичну теорему Каратеодорі для обмежених і необмежених множин на випадок, коли вихідна множина складається з обмеженої кількості компонент або її перерізи площинами фіксованої розмірності містять обмежену кількість компонент (не більшу за розмірність площини). Встановлено критерій сильної лінійної опуклості декартового добутку компактів у багатовимірному гіперкомплексному просторі.

Б. А. Кліщуком перенесено на гіперкомплексний випадок ряд теорем лінійно опуклого комплексного аналізу.

У 2012 р. розв'язано наступну проблему Т. Замфіреску: доведено, що опукла крива, яка задовольняє інфінітезимальну умову прямокутника, буде колом. Отримано теореми існування розв'язків багатозначних включень (в тому числі і для розривних відображень), що опираються на різні варіанти принципу гострого кута та на геометричну теорему Гана – Банаха (Ю. Б. Зелінський, Б. А. Кліщук, М. В. Ткачук).

Наукові дослідження А. В. Бондаря стосуються комплексного аналізу, топології та функціонального аналізу. Він вивчав топологічні властивості внутрішніх по Стоїлову відображень та множини їх особливостей. Ним створено теорію локальних геометричних характеристик голоморфних відображень багатовимірних комплексних просторів. В його роботах систематично досліджуються похідні оператори, оператори розтягу, обертання, а також множини моногенності неперервних відображень областей скінченно- та нескінченновимірних комплексних гільбертових просторів. У термінах операторних умов, які узагальнюють плоскі поняття сталості розтягу та консерватизму кутів, ним доведено критерії голоморфності відображень. Цим перенесено на багатовимірний випадок класичні результати Лумана, Бора, Д. Меншова, Ю. Ю. Трохимчука. Вивчено усувні та неусувні особливі множини голоморфних функцій.

Учні А. В. Бондаря (Я. М. Димарський, О. С. Грецький, О. О. Романова (Лук'янова)) розробляли теорію локальних геометричних характеристик голоморфних відображень та операторів.

Я. М. Димарський при науковій консультації А. В. Бондаря захистив у 2003 р. докторську дисертацію „Власні вектори квазілінійних операторів". Його дослідження присвячено опису множини нормованих власних векторів квазілінійних операторів. По-перше, дано опис топологічних властивостей многовидів дійсних самоспряжених операторів (скінченновимірних, компактних та диференціальних), у яких певні власні значення мають певну кратність, та многовидів пар (оператор, власний вектор). Введено поняття компактного квазілінійного самоспряженого цілком неперервного зображення нелінійного оператора. На квазілінійні оператори поширено поняття номера і кратності власного значення та виділено клас типових квазілінійних зображень. У термінах індексу перетину многовидів дано гомотопічну класифікацію типових зображень та опис множини нормованих власних векторів, що відповідають операторам із цих класів. Також наведено застосування одержаної класифікації до дослідження малих власних векторів (функцій), нормованих власних векторів та гілок власних векторів.

О. С. Грецький розробив теорію локальних геометричних характеристик голоморфних відображень банахових просторів. Створив поняттєвий апарат для цієї теорії з необхідним обґрунтуванням. Дослідив умови диференційовності відображень нескінченновимірних просторів, зокрема, довів диференційовність майже скрізь ліпшицевого відображення у банахів рефлексивний простір. Отримав низку критеріїв голоморфності для неперервних відображень банахових просторів, визначених на областях з певними класами особливих множин.

О. О. Романова (Лук'янова) досліджувала псевдоаналітичність неперервних функцій з властивостями сталого σ-розтягу та σ-сталості кутів. Отримано опис структури множин σ-моногенності неперервних функцій.

Аспіранти П. М. Тамразова О. А. Сарана, С. А. Охріменко вивчали задачі, позв'язані з контурно-тілесними властивостями функцій та екстремальними метриками.

Основні наукові результати О. А. Сарани стосуються дослідження зв'язку між поведінкою тонко голоморфних та тонко гіпогармонічних функцій на межі тонко відкритої області та у внутрішності цієї області.

С. А. Охріменком розв'язано задачі про обчислення екстремальних метрик та конформних модулів ряду гомотопних сімей дуг, що лежать у багатозв'язних областях на рімановому листку Мебіуса. Досліджено парні добутки конформних модулів сімей кривих, що лежать на рімановому листку Мебіуса, та вивчено їх поведінку в залежності від геометрії ріманових областей. Знайдено також оцінки для цих добутків, у тому числі універсальні оцінки, вигляд яких не залежить від геометрії областей та ріманового листка Мебіуса. Також отримано непокращувану нижню оцінку парного добутку конформних модулів „спряжених" сімей кривих через абсолютну константу, яка не залежить від відповідної геометрії. Розв'язано задачі про обчислення екстремальних метрик та конформних модулів деяких сімей замкнених, гомотопічно нетривіальних кривих, що лежать на неорієнтовних n-вимірних $(n > 3)$ ріманових многовидах (1997 – 1999 рр.).

О. Ф. Герус досліджував оцінки модулів гладкості граничних значень інтеграла типу Коші. Вивчав проблему побудови функції, аналітичної в області, для якої модуль гладкості в замиканні області збігається по порядку з заданою нормальною мажорантою. Ним отримано оцінки модуля неперервності інтеграла типу Коші в області та на її межі. Знайдено нижню та верхню оцінки модуля гладкості інтеграла типу Коші на регулярній кривій. Встановлено необхідні та достатні умови для обмеженості оператора Коші. Узагальнено теорему М. А. Давидова: знайдено необхідні та достатні умови для того, щоб граничні значення інтеграла типу Коші існували рівномірно у класі голоморфних функцій, що відображають комплексну площину в двовимірний комплексний простір і компоненти яких задовольняють рівняння Гельмгольца та не задовольняють рівняння Лапласа. Для таких функцій встановлено формулу типу Сохоцького – Племеля.

С. А. Плаксою встановлено достатні умови стійкості індексу оператора, що діє в довільний векторний простір. На основі методів, що є нейтральними по відношенню до топологічних властивостей просторів та операторів, розвинуто теорію стійкості нетеровості та напівнетеровості операторів у неповних просторах. Побудовано узагальнену теорію Нетера для сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коші на замкненій жордановій регулярній кривій у класах кусково-неперервних функцій з розривами типу осциляції.

Розв'язано в явному вигляді кусково-неперервну крайову задачу Рімана для розширених у порівнянні з попередніми результатами класів жорданових (замкнених або розімкнених) спрямлюваних кривих та заданих на них функцій (С. А. Плакса, Ю. В. Васильєва (Куд'явіна)) .

Учні О. К. Бахтіна (А. Л. Таргонський, В. Є. В'юн, Р. В. Подвисоцький, І. В. Денега, Я. В. Заболотний) у своїх дослідженнях використовували метод „керуючих" функціоналів для дослідження екстремальних задач геометричної теорії функції комплексної змінної, що, зокрема, дозволило отримувати оцінки досліджуваних функціоналів з урахуванням відхилення не-екстремальних конфігурацій від екстремальних.

А. Л. Таргонський одним із перших почав розв'язувати екстремальні задачі для функціоналів, що складаються з добутків внутрішніх радіусів областей для променевих систем точок. Це було досить серйозним проривом у цій тематиці. Для „рівномірно променевих систем точок" розв'язано екстремальну задачу „мішаного типу", тобто таку, в якій деякі полюси є вільними, а інші – фіксованими. Розв'язано екстремальні задачі: для областей, які попарно не перетинаються, з вільними полюсами на рівномірних променевих системах точок; для областей, які попарно не перетинаються, з вільними полюсами, що рухаються по „рівномірно променевих системах точок" у кільці; для добутку внутрішніх радіусів областей, що належать одиничному кругу; для областей, які попарно не перетинаються, з вільними полюсами на так званих „довільних променевих системах точок". Повністю розв'язано екстремальні задачі з вільними полюсами на одиничному колі у випадку трьох та чотирьох областей, які попарно не перетинаються (2004 – 2005 рр.).

У термінах квадратичних диференціалів розв'язано нові екстремальні задачі про добуток степенів внутрішніх радіусів зв'язних компонент на деяких класах відкритих множин та систем точок у розширеній комплексній площині (О. К. Бахтін, В. Є. В'юн).

Розроблено новий метод дослідження екстремальних задач геометричної теорії функцій, на базі якого отримано результати, що узагальнюють та посилюють відомі твердження, який дозволив значно просунутись у розв'язанні низки відкритих проблем (О. К. Бахтін, В. Є. В'юн, Р. В. Подвисоцький).

Отримано точні нерівності для функціоналів, залежних від внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей комплексної площини, що уточнюють відомі результати (О. К. Бахтін, В. Є. В'юн, Р. В. Подвисоцький)

Я. В. Заболотним було одержано частковий розв'язок відомої проблеми В. М. Дубініна про добуток внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей на комплексній площині. Знайдено метод, що дозволив суттєво покращити результати попередників у даній проблемі, а також показано межі застосування даного методу.

Наукові дослідження І. В. Денеги стосуються екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної про оцінку добутку степенів внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин. Розв'язано задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на n-променевих системах точок як на класах неперетинних областей, так і на більш загальних класах частково перетинних областей. Результати посилюють та узагальнюють досягнення В. М. Дубініна, Г. В. Кузьміної та інших. Доведено посилену нерівність для добутку степенів внутрішніх радіусів неперетинних областей і узагальнено її на випадок частково перетинних областей. Запропоновано узагальнене поняття внутрішнього радіуса для випадку багатовимірного комплексного простору та доведено теореми про точні оцінки зверху для добутку степенів узагальнених внутрішніх радіусів систем попарно неперетинних поліциліндричних областей в багатовимірних комплексних просторах.

Задачі про продовження розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними традиційно перебувають у полі зору великої кількості дослідників. Центральне місце серед них займають задачі про усунення розв'язків диференціального рівняння в заданому класі функцій. Класичним прикладом такої задачі є знаменита проблема Пенлеве про опис компактів, усувних для обмежених голоморфних функцій, тобто таких компактів на комплексній площині, для яких довільна обмежена голоморфна функція, визначена в доповненні даного компакта до будь-якого його околу, може бути голоморфно продовжена на цей компакт. Проблема Пенлеве приковувала увагу аналітиків протягом усього XX століття (Д. Помпейю, А. Данжуа, В. В. Голубєв, А. Безикович, А. Берлінг, Л. Альфорс, А. Г. Вітушкін, П. Маттіла, Г. Давід, М. С. Мельников, Ю. Ю. Трохимчук, А. В. Бондар та ін.), але отримала остаточне розв'язання лише у 2001 р. (Х. Толса). Розв'язання цієї проблеми виявилось досить складним і формулюється в термінах, що враховують метричні і геометричні властивості множин.

Іншу постановку задачі про усунення особливостей голоморфних функцій запропонував Є. П. Долженко (1961 р.). Він довів, що для голоморфних функцій, що задовольняють умову Гельдера із заданим показником s, $0 < s < 1$, усувні компакти характеризуються умовою рівності нулю їх ґаусдорфової міри порядку $1 + s$. Це був перший результат, в якому усувні особливості розв'язків еліптичного диференціального рівняння з частинними похідними в заданому класі функцій (у даному випадку – розв'язків рівняння Коші – Рімана в класі Гельдера) було повністю описано в термінах ґаусдорфових мір і який у подальшому отримав розвиток в роботах багатьох авторів (Л. Карлєсон, Р. Харві і Дж. Полкінг, Й. Крал, Н. Х. Уі, Б. Ж. Іщанов, Х. Вердера, Х. Матеу і Х. Орбіч, Д. Ульріх та ін.). У відділі цю тематику розробляє А. В. Покровський. Зокрема, його увагу привернули усувні особливості розв'язків однорідних лінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку з обмеженими вимірюваними дійсними коефіцієнтами (взагалі кажучи, розривними) та деяких важливих квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку.

У результатах згаданих авторів суттєвим було те, що коефіцієнти лінійних еліптичних рівнянь були досить гладкими. Але неважко навести приклади, коли ці результати втрачають сенс для лінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку в дивергентній формі з обмеженими вимірюваними та розривними коефіцієнтами. Тобто задача про усувні особливості розв'язків таких рівнянь потребує нових методів для свого дослідження у порівнянні з рівняннями із гладкими коефіцієнтами. Відправною точкою для методу дослідження цієї задачі, розробленого А. В. Покровським, була ідея В. С. Федорова визначати класи локально інтегровних функцій, в яких розглядається задача про усувні особливості розв'язків еліптичного рівняння, в термінах локальних наближень у середньому розв'язками цього рівняння. На цьому шляху він визначив нові класи неперервних функцій та функцій з квадратично інтегровними узагальненими першими частинними похідними, в яких усувні особливості узагальнених розв'язків однорідних лінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку з обмеженими вимірюваними коефіцієнтами повністю описуються в термінах ґаусдорфових мір. Далі А. В. Покровський дослідив зв'язок введених ним класів функцій із відомими класами функцій з обмеженим середнім коливанням та класами Гельдера – Зигмунда. Зокрема, з'ясувалось, що при певних умовах на ступінь гладкості коефіцієнтів диференціального рівняння, що розглядається, ці класи збігаються між собою. Це дозволило отримати узагальнення відомих результатів Є. П. Долженка та Л. Карлєсона про усувні особливості гармонічних функцій у класах Гельдера.

Ще більш складною задачею виявилось дослідження усувних особливостей розв'язків однорідних лінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку в недивергентній формі з обмеженими вимірюваними коефіцієнтами, що задовольняють так звану умову слабкої єдиності. Ця умова полягає у тому, що для довільної області з гладкої межею і довільної неперервної функції, визначеної на цій межі, апроксимаційний розв'язок відповідної задачі Діріхле для рівняння, що розглядається, є єдиним. Під апроксимаційним розв'язком ми розуміємо рівномірну границю класичних розв'язків задачі Діріхле для лінійних рівномірно еліптичних рівнянь з гладкими коефіцієнтами, таких, що їх константи еліптичності обмежені знизу константою еліптичності заданого оператора, а коефіцієнти прямують до коефіцієнтів цього оператора майже скрізь. Як показав у 1997 р. М. С. Надірашвілі, на відміну від двовимірного випадку в розмірності більше трьох існують лінійні рівномірно еліптичні рівняння другого порядку з обмеженими вимірними коефіцієнтами, які не задовольняють умову слабкої єдиності. З іншого боку, М. В. Крилов (1992 р.) довів слабку єдиність таких рівнянь, якщо замкнення множини точок розриву їх коефіцієнтів є не більш ніж зліченною множиною.

Першим результатом про усувні особливості розв'язків однорідних лінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку у недивергентній формі з обмеженими вимірюваними коефіцієнтами був відомий приклад Д. Гілбарга і Дж. Серріна (1955 р.) такого рівняння, коефіцієнти якого аналітичні скрізь в евклідовому просторі, за винятком початку координат (згідно зі згаданим результатом М. В. Крилова це рівняння задовольняє умову слабкої єдиності), але початок координат не є усувною множиною для розв'язків цього рівняння в деякому класі Гельдера. Відправляючись від цього прикладу, А. В. Покровський увів класи неперервних функцій та нові міри типу Ґаусдорфа, в термінах яких отримав необхідні і достатні умови для усунення особливостей розв'язків однорідних лінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку з обмеженими вимірюваними коефіцієнтами, що задовольняють умову слабкої єдиності. З одного боку, з цього результату А. В. Покровського випливають згадані теореми Є. П. Долженка і Л. Карлєсона про усувні особливості гармонічних функцій, а з іншого — цей результат дозволив пояснити причину виникнення ізольованих особливих точок у класах Гельдера у недивергентному випадку.

А. В. Покровським також досліджувалась задача про усувні особливості розв'язків деяких квазілінійних рівнянь другого порядку — однорідних рівнянь з p-лапласіаном та рівняння мінімальних поверхонь. Зокрема, для рівняння мінімальних поверхонь ним охарактеризовано в термінах ґаусдорфових мір усувні множини у класах неперервно диференційовних функцій, перші частинні похідні яких задовольняють умову Гельдера із заданим показником.

Згадані результаті А. В. Покровського склали основу його докторської дисертації, захищеної у березні 2009 р. на механіко-математичному факультеті Московського державного університету ім. М. В. Ломоносова.

А. В. Покровський розробляє також і теорію наближення функцій, зокрема теорію наближення зі знакочутливою вагою. У цьому напрямку ним встановлено загальний критерій типу Колмогорова елемента найкращого наближення в несиметричних напівнормах, з якого випливає велика кількість конкретних критеріїв, встановлених іншими авторами. А. В. Покровським введено поняття сильно єдиного елемента найкращого наближення зі знакочутливою вагою і знайдено необхідні та достатні умови для існування такого елемента у кожної неперервної функції на метричному компакті при наближенні чебишовським простором.

Теорію наближення функцій розробляв також учень А. В. Покровського Я. В. Новак. Його коло наукових інтересів — наближення найпростішими дробами, тобто логарифмічними похідними алгебраїчних многочленів із комплексними коефіцієнтами. У цьому напрямку ним отримано характеризацію просторів Гельдера – Зигмунда і просторів n разів неперервно диференційовних функцій у термінах локальних наближень найпростішими дробами. Я. В. Новак також отримав опис найпростіших дробів Паде функції, аналітичної в деякому околі початку координат, як границь найпростіших дробів найкращого рівномірного наближення цієї функції на кулях малого радіуса при прямуванні цих радіусів до нуля. Серед інших результатів Я. В. Новака відмітимо знайдений ним критерій типу Колмогорова для елемента найкращого рівномірного наближення дійсної неперервної функції на відрізку дійсними найпростішими дробами. Згадані результати Я. В. Новака склали основу його кандидатської дисертації, захищеної у лютому 2010 р. в Інституті математики НАН України.

За певних природних арифметичних умов отримано поточкові оцінки типу В. К. Дзядика для наближення аналітичних функцій в областях з кусково-гладкою межею многочленами з цілочисловими коефіцієнтами (І. В. Смаженко).

Відносно короткий час роботи у відділі комплексного аналізу (2007 р.) виявився для А. К. Прикарпатського вельми інтенсивним періодом з точки зору розширення сфери його наукових зацікавлень, що сягнули як важливих топологічних проблем нелінійного аналізу неперервних відображень банахових просторів, так і гомологічних проблем класифікації диференціювань у функціональних кільцях за допомогою диференціально-геометричних, диференціально-алгебраїчних та гомологічних методів аналізу, котрі були одними із провідних напрямків дослідження науковців відділу. Зокрема, плідно співпрацюючи із колегами з Інституту математики НАН України (А. М. Самойленком, Ю. Б. Зелінським), Київського національного університету ім. Т. Шевченка (В. Г. Самойленком) та Львівського національного університету ім. І. Франка (Т. О. Банахом, Я. В. Микитюком), А. К. Прикарпатський дослідив відому проблему опису диференціально-геометричних та диференціально-топологічних властивостей узагальнених комплексів де Рама-Ходжа, природним чином асоційованих з інтегровними багатовимірними диференціальними системами типу М. Громова. Ним було детально проаналізовано геометричну структуру характеристичних класів типу Черна, побудовано (спільно з М. М. Боголюбовим (мол.)) спеціальні диференціальні інваріанти типу Черна. За ініціативи А. М. Самойленка А. К. Прикарпатський почав вивчати деякі проблеми глобального аналізу поведінки траєкторій нелінійних динамічних систем на многовидах. Тут йому вдалось звести їх розв'язок (спільно з А. М. Самойленком) до вивчення властивостей множини розв'язків певних нелінійно операторних відображень типу Ляпунова – Шмідта в банахових просторах, що мають властивість локальної опуклості. При цьому ним було запропоновано узагальнення типу Борсука – Улама відомої теореми Лере – Шаудера про нерухому точку та побудовано (спільно з Т. О. Банахом та А. М. Плічком) достатньо ефективні критерії локальної опуклості широкого класу відображень у гільбертових та банахових просторах. Досліджуючи деякі проблеми нелінійного аналізу для гладких відображень функціональних просторів, А. К. Прикарпатський зауважив (спільно з О. Д. Артемовичем та М. Павловим), що широкий їх клас можна переформулювати в термінах теорії зображень диференціювань у спеціальних диференціально-функціональних кільцях, котрі допускають існування скінченнопороджених інваріантних диференціальних ідеалів. Їх глибокий зв'язок із проблемою класифікації узагальнених інтегровних рівнянь типу Рімана виявився як несподіваним, так і цікавим для деяких застосувань у сучасній гідродинаміці. Дослідження такого типу гідродинамічних проблем із допомогою сучасних методів симплектичного аналізу привело А. К. Прикарпатського (спільно із Д. Блекмором, США) до можливості вивчення топологічної структури відповідно породжених дифеоморфізмів, котрі допускають важливу для застосувань геометричну інтерпретацію в термінах добре знаних гелікоїдних та вихрових структур середовища.

Дослідження з комплексного аналізу проводилися і в інших відділах інституту.

Частину результатів Н. В. Зорій, описаних вище, отримано під час роботи у відділі математичної фізики.

У відділі наближень М. В. Щербиною встановлено необхідні і достатні умови існування інтегральної поверхні для неперервного поля гіперплощин у дійсному евклідовому просторі; доведено, що довільна обмежена область в n-вимірному комплексному просторі є проекцією деякої обмеженої області голоморфності з комплексного простору розмірності на одиницю більшої; знайдено умови існування аналітичної структури на поліноміальній оболонці графіка неперервної функції; розв'язано проблему Бруни та Ортеги про число перешкод при плюрігармонічній інтерполяції кривих. Ці результати ввійшли в його докторську дисертацію, захищену в 1996 р.

У відділі теорії функцій І. О. Шевчуком побудовано загальну контурно-тілесну теорію аналітичних функцій і теорію комплексних скінченно-різницевих гладкостей, що дало можливість розв'язати певні складні проблеми теорії наближення. Ці роботи мають багато спільних точок дотику з роботами П. М. Тамразова та Ю. Ю. Трохимчука.

У травні 2006 р. П. М. Тамразова та Ю. Ю. Трохимчука обрано членами-кореспондентами НАН України.

Нагороди співробітників відділу за досягнення в розвитку математичної науки: премія імені М. М. Крилова (П. М. Тамразов, 2005 р.); премія імені Погорєлова (Ю. Ю. Трохимчук, 2008 р.); медаль НАН України „За наукові досягнення" (П. М. Тамразов, 2009 р.); нагорода Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань та обчислень ISAAC за досягнення в математиці (С. А. Плакса, 1999 р.), премія Верховної Ради України найталановитішим молодим ученим в галузі фундаментальних і прикладних досліджень та науково-технічних розробок (С. В. Грищук, М. В. Ткачук, В. С. Шпаківський, 2013 р.).

За роки незалежності співробітниками відділу опубліковано 12 збірників наукових праць та 10 монографій [1 – 22]. Організовано 16 міжнародних конференцій та математичних шкіл. За цей період співробітниками і аспірантами відділу захищено 6 докторських та 18 кандидатських дисертацій.

У відділі комплексного аналізу та теорії потенціалу працює 1 член-кореспондент НАН України, 5 докторів і 7 кандидатів наук, з яких 6 — науковці до 35 років.

Наведене засвідчує високий рівень наукових досягнень учених відділу, їх плідну роботу з підготовки висококваліфікованих наукових кадрів та тісні зв'язки зі світовим математичним товариством. Колишні аспіранти відділу працюють у багатьох вузах України, а також в Узбекистані, Туркменистані, Єгипті, Туреччині, Чехії.

Автор висловлює щиру подяку співробітникам відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу за активне сприяння в написанні цього огляду.

1. *Бондар А. В.* Локальные геометрические характеристики голоморфных отображений – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.
2. *Трохимчук Ю. Ю.* Устранимые особенности аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.
3. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 264 с.
4. *Мельниченко И. П.* Когда и сколько заплатили Иуде Искариоту / Автор предисл. П. П. Толочко. — Киев: Парламент. изд-во, 2003. – 312 с.
5. *Мельниченко И. П.* Исторический портрет в синежелтом интерьере. – Киев: Юстініан, 2004. – 228 с.
6. *Самойленко Ю. И.* Проблемы и методы физической кибернетики. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006. – 644 с.
7. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы комплексного анализа // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **73**. – 308 с.

8. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **71**. – 230 с.
9. *Трохимчук Ю. Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **70**. – 539 с.
10. *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **92**. – 280 с.
11. *Комплексний* аналіз та теорія потенціалу / Ред. П. М. Тамразов. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1992. – 102 с.
12. *Generalizations of* complex analysis and their applications in physics. II. Extremal problems related to one complex variable, potential theory, direct physical applications / Eds J. Ławrynowicz, P. M. Tamrazov // Proc. Symp. Warsaw and Rynia, Poland, May 30 – July 1, 1994. Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Sér. Rech. Déform. – 1995. – **45**, № 20. – 163 p.
13. *Quasiconformal* geometry and dynamic I / Eds J. Ławrynowicz, O. Martio, P. M. Tamrazov // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Sér. Rech. Déform. – 1997. – **47**, № 24. – 171 p.
14. *Quasiconformal* geometry and dynamic II / Eds J. Ławrynowicz, O. Martio, P. M. Tamrazov // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Sér. Rech. Déform. – 1998. – **48**, № 25. – 125 p.
15. *Комплексний* аналіз і течії з вільними межами / Під ред. І. О. Луковського, Ю. Б. Зелінського // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – **1**, № 3. – 329 с.
16. *Проблеми* аналізу і алгебри / Під ред. Ю. Б. Зелінського, М. С. Чернікова // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 3. – 292 с.
17. *Комплексний* аналіз / Під ред. Ю. Б. Зелінського, О. С. Лимарченка // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – 506 с.
18. *Complex* analysis and potential theory / Eds T. Aliyev, P. M. Tamrazov // Proc. Conf. Satellite to ICM 2006. – London: World Sci., 2007. – 287 p.
19. *Теорія* операторів, диференціальні рівняння / Під ред. А. В. Покровського // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 1. – 358 с.
20. *Комплексний* аналіз і течії з вільними границями / Під ред. Ю. Б. Зелінського, О. С. Лимарченка // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. –2010. – **7**, № 2. – 442 с.
21. *Аналіз* і застосування / Під ред. Ю. Б. Зелінського, В. І. Герасименка // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – 401 с.
22. *Комплексний* аналіз, теорія потенціалу і застосування / Під ред. Ю. Б. Зелінського, С. А. Плакси // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4-5. – 574 с.

Одержано 28.11.13