УДК 517.518.82

І. В. Смаженко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ВАГОВІ МОДУЛІ ГЛАДКОСТІ І ЗНАКОЗБЕРІГАЮЧЕ НАБЛИЖЕННЯ

We consider a continuous function that changes the sign finitely many times on an interval and state the problem of the approximation of this function by a polynomial inheriting the function sign. For this approximation, if it is possible, we obtain the Jackson-type estimates that include modified weight modules of smoothness of Ditzian – Totik type. In some cases, constants in these estimates essentially depend on the location of points where the function changes its sign. We present examples of functions for which these constants principally cannot be improved. We also prove theorems similar in some sense to inverse theorems on approximation without bounds.

Розглядається неперервна функція, яка скінченне число разів на відрізку змінює знак, і ставиться задача про її наближення многочленом, який успадковує знак функції. Для такого наближення отримано, коли це можливо, оцінки типу Джексона, які включають модифіковані вагові модулі гладкості типу Діціана – Тотіка. В деяких випадках константи в цих оцінках суттєво залежать від розташування точок зміни знаку функції. Наведено приклади функцій, для яких ці константи принципово не можуть бути покращені. Крім того, доводяться теореми, аналогічні в деякому сенсі оберненим теоремам наближення без обмежень.

1. Вступ. Нехай $s \in \mathbb{N}$ і $\mathbf{Y}_s$ — множина всіх наборів $Y := \{y_i\}_{i=1}^s$ точок $-1 < y_s < \ldots < y_1 < 1$. Для $y \in \mathbf{Y}_s$ покладаємо

$$\Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{s} (x - y_i)$$

і позначаємо через $\Delta^{(0)}(Y)$ множину функцій $f \in C([-1, 1])$, які на відрізку $[y_i, y_{i-1}]$ є невід'ємними при непарному i і недодатними при парному i. Зауважимо, що $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ тоді і лише тоді, коли $f(x)\,\Pi(x) \geq 0$, $-1 < x < 1$. Покладемо

$$\mathbf{Y} := \bigcup_s \mathbf{Y}_s$$

і будемо говорити, що набір $Y \in \mathbf{Y}$ є s-припустимим для f, якщо $Y \in \mathbf{Y}_s$ і $f \in \Delta^{(0)}(Y)$. Для множини s-припустимих наборів введемо позначення $A_s(f)$ і будемо писати $f \in \Delta^{(0,s)}$, якщо $A_s(f) \neq \varnothing$. Зазначимо, що функція може належати одночасно різним класам $\Delta^{(0,s_1)}$ та $\Delta^{(0,s_2)}$ $(s_1 \neq s_2)$.

Для $Y \in \mathbf{Y}$ і $f \in C([-1, 1])$ позначимо ($\mathcal{P}_n$ — простір алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$)

$$E_n^{(0)}(f, Y) := \inf\left\{\| f - P_n \| : P_n \in \Delta^{(0)}(Y) \cap \mathcal{P}_n\right\}, \tag{1.1}$$

і для $f \in \Delta^{(0,s)}$ покладемо

$$E_n^{(0,s)}(f) := \sup_{Y \in A_s(f)} E_n^{(0)}(f, Y). \tag{1.2}$$

Під $\|\cdot\|_J$ ми розуміємо sup-норму на інтервалі J. Позначимо через $\mathbb{B}^r$ простір функцій $f \in C([-1, 1])$, які мають локально абсолютно неперервну $(r-1)$-шу похідну на $(-1, 1)$ таку, що

$$\left\| \varphi^r f^{(r)} \right\| < \infty.$$

Тут і далі $\varphi(x) := \sqrt{1 - x^2}$.

Покладемо $I := [-1, 1]$. Нехай для даної функції $f \in C(I)$ і цілого числа $k \ge 1$

$$\Delta_h^k f(x) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f\left(x - \frac{k}{2} h + ih \right)$$

— скінченна різниця порядку k, визначена для всіх x і $h \ge 0$ таких, що $x \pm \pm \frac{k}{2} h \in I.$

Модулі гладкості Z. Ditzian та V. Totik (DT-модулі) [1] означаються формулою

$$\omega_k^{\varphi}(f, t) := \sup_{0 \le h \le t} \sup_{x} \left| \Delta_{h\varphi(x)}^k f(x) \right|, \quad t \ge 0, \tag{1.3}$$

де внутрішній супремум береться по всіх x таких, що

$$x \pm \frac{k}{2} h \varphi(x) \in (-1, 1). \tag{1.4}$$

Також покладемо

$$\varphi_\delta(x) := \sqrt{\left(1 - x - \frac{\delta}{2} \varphi(x)\right)\left(1 + x - \frac{\delta}{2} \varphi(x)\right)}, \quad x \pm \frac{\delta}{2} \varphi(x) \in I,$$

і для функції g, визначеної на $(-1, 1)$, і $r \ge 1$ позначимо

$$\omega_{k,r}^{\varphi}(g, t) := \sup_{0 \le h \le t} \sup_{x} \left| \varphi_{kh}^r(x) \Delta_{h\varphi(x)}^k g(x) \right|, \quad t \ge 0, \tag{1.5}$$

де знову внутрішній супремум береться по всіх x таких, що виконується (1.4). Будемо застосовувати модулі в (1.5) для похідних функції f, яка буде припускатися диференційовною на $(-1, 1)$ до деякого порядку. Таким чином, для того щоб надати означенню $\omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, t\right)$ сенсу, ми повинні припустити, що $\lim_{x \to \pm 1} \varphi^r(x) f^{(r)}(x)$ існує, більш того, для того щоб $\omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, t\right) \to 0$ при $t \to 0$, будемо припускати, що

$$\lim_{x \to \pm 1} \varphi^r(x) f^{(r)}(x) = 0,$$

при цьому клас таких функцій позначимо через $\mathbb{C}_\varphi^r$. Зрозуміло, що $\mathbb{C}_\varphi^r \subset \mathbb{B}^r$, $r \ge 1$. Для $r = 0$ покладемо

$$C_\varphi^0 := C(I), \qquad \omega_{k,0}^{\varphi}(f, t) := \omega_k^{\varphi}(f, t).$$

Сформулюємо основні результати цієї роботи.

Теорема 1. *Нехай* $f \in \Delta^{(0,s)} \cap \mathbb{B}^r$ *і або* $s = 2$, $r = 3$, *або* $s = 1$, $r = 2$, *або* $r > 2s$, *або* $r = 1$. *Тоді маємо*

$$E_n^{(0,s)}(f) \le c(r, s) \frac{\left\| \varphi^r f^{(r)} \right\|}{n^r}, \quad n \ge r - 1. \tag{1.6}$$

Теорема 2. *Нехай* $f \in \Delta^{(0,s)} \cap \mathbb{C}_\varphi^r$ *і або* $r > 2s$, *або* $r + k = 2$, $s = 1$, *або* $r = 0$, $k = 1$. *Тоді маємо*

$$E_n^{(0,s)}(f) \le c(k, r, s) \omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right), \quad n \ge k + r - 1. \tag{1.7}$$

Теорема 3. *Нехай* $f \in \Delta^{(0,s)} \bigcap \mathbb{B}^r$, $r \geq 1$, *і* $Y \in A_s(f)$. *Тоді*

$$E_n^{(0)}(f, Y) \leq c(r, Y) \frac{\left\| \varphi^r f^{(r)} \right\|}{n^r}, \quad n \geq r - 1, \tag{1.8}$$

$$E_n^{(0)}(f, Y) \leq c(r, s) \frac{\left\| \varphi^r f^{(r)} \right\|}{n^r}, \quad n \geq N(r, Y). \tag{1.9}$$

Теорема 4. *Нехай* $f \in \Delta^{(0,s)} \bigcap \mathbb{C}_\varphi^r$ *і або* $r \geq 1$, *або* $r = 0$, $k \leq 3$, $Y \in A_s(f)$. *Тоді*

$$E_n^{(0)}(f, Y) \leq c(k, r, Y) \omega_{k,r}^\varphi \left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right), \quad n \geq k + r - 1, \tag{1.10}$$

і

$$E_n^{(0)}(f, Y) \leq c(k, r, s) \omega_{k,r}^\varphi \left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right), \quad n \geq N(k, r, Y). \tag{1.11}$$

Видно, що до умов теорем 1 – 4 не входить лише випадок $r = 0$, $k \geq 4$. Проте завдяки прикладу 3 з [2] (для $s = 1$ це було доведено раніше S. P. Zhou [3]) для кожного $Y \in \mathbf{Y}_s$, $k \geq 4$ існує функція $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ така, що

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{E_n^{(0)}(f, Y)}{\omega_k^\varphi\left(f, n^{-1}\right)} = \infty.$$

З іншого боку, теореми 1 – 4 дають різні ствердні результати в інших випадках. Отже, ми повинні лише показати, чому в деяких випадках ми не маємо оцінок з константами, що є незалежними від Y. З цією метою доведемо дві наступні теореми.

Теорема 5. *Для кожного* $A > 0$, $s \geq 2$, $2 \leq r \leq 2s$, *за винятком випадку* $s = 2$, $r = 3$, *і кожного* $n \in N$ *існує функція* $f = f_{s,r,n,A} \in \Delta^{(0,s)} \bigcap \mathbb{B}^r$ *така, що*

$$E_n^{(0,s)}(f) \geq e_n^{(0,s)}(f) \geq A \left\| \varphi^r f^{(r)} \right\| > 0, \tag{1.12}$$

де

$$e_n^{(0,s)}(f) := \inf_{Y \in A_s(f)} E_n^{(0)}(f, Y).$$

Теорема 6. *Нехай* $k, s \geq 1$ *і* $r \leq 2s$, *за винятком випадків* $r = 0$, $k = 1$ *і* $r + k = 2$, $s = 1$. *Тоді для кожного* $A > 0$ *і* $n \in N$ *існує функція* $f = f_{s,r,k,n,A} \in \Delta^{(0,s)} \bigcap \mathbb{C}_\varphi^r$, *для якої*

$$E_n^{(0,s)}(f) \geq e_n^{(0,s)}(f) \geq A \omega_{k,r}^\varphi\left(f^{(r)}, 1\right). \tag{1.13}$$

Для порівняння коротко викладемо одержані раніше результати. Для наближення без обмежень аналогічні теореми доводилися Z. Ditzian та V. Totik [1] (див. також [4], § 18). У знакозберігаючому наближенні перший результат належить D. Leviatan [5]. Він довів, що для $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ виконується нерівність

$$E_n^{(0)}(f, Y) \leq c(Y) \omega^\varphi\left(f, n^{-1}\right), \quad n \geq 1,$$

де $\omega^\varphi := \omega_1^\varphi$. Згодом К. А. Копотун [6] довів, що ω^φ можна замінити на ω_3^φ, а саме, показав, що для $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ одночасно виконуються дві нерівності:

$$E_n^{(0)}(f, Y) \leq c(s) \omega_3^\varphi\left(f, n^{-1}\right), \quad n \geq N(Y),$$

і

$$E_n^{(0)}(f,Y) \le c(Y)\omega_3^{\varphi}\left(f, n^{-1}\right), \quad n \ge 2 \ (s=1,2) \quad \text{і} \quad n \ge 0 \ (s>2).$$

Нарешті, Y. K. Hu, K. A. Копотун і X. M. Yu [7] довели, що для $f \in C^1([-1,1]) \cap \cap \Delta^{(0)}(Y)$ справджується оцінка

$$E_n^{(0)}(f,Y) \le \frac{c(k,Y)}{n}\omega_k^{\varphi}\left(f', \frac{1}{n}\right), \quad n \ge N(k,Y).$$

Для $s = 0$ справедливість оцінок (1.6) та (1.7) (і еквівалентної їм у цьому випадку оцінки (1.10)) тривіальна. Результат K. A. Копотуна разом з деякими незначними доповненнями показує, що нерівності (1.10) і (1.11) виконуються для $r = 0$, $k \le 3$ (з константами $c = c(s)$ і $N = N(Y)$ або $c = c(Y)$ і $N = k-1$), а також справджуються і (1.8), (1.9) для $r \le 3$.

Теореми 1 – 6 дають повну в певному сенсі відповідь на запитання про справедливість оцінок

$$E_n^{(0)}(f,Y) \le c\,\omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right), \quad n \ge N, \tag{1.14}$$

та

$$E_n^{(0)}(f,Y) \le c\,\frac{\left\|\varphi^r f^{(r)}\right\|}{n^r}, \quad n \ge N, \tag{1.15}$$

яка ілюструється табл. 1 – 3 (для випадків $s = 1$, $s = 2$ та $s > 2$ відповідно). Пояснимо принцип їхньої будови. Нехай s є фіксованим, $r \ge 0$, $k \ge 1$. Тоді знак + на перетині рядка з номером r і стовпчика з номером k означає, що для цих r і k і довільної функції $f \in \mathbb{C}_{\varphi}^r \cap \Delta^{(0)}(Y)$ оцінка (1.14) є вірною з константою $c = c(k,r,s)$ та $N = k+r-1$; знак $\oplus$ — що оцінка (1.14) є вірною з константою $c = c(k,r,Y)$ та $N = k+r-1$ або $c = c(k,r,s)$ та $N = N(k,r,Y)$ і знак – — що оцінка (1.14) не є вірною навіть з константами c і N, залежними від f. Якщо ж $r \ge 0$, $k = 0$, то відповідні знаки позначають справедливість (1.15) для $f \in \mathbb{B}^r \cap \Delta^{(0)}(Y)$ в тому чи іншому сенсі.

Таблиця 1

r	k						
	0	1	2	3	4	5	…
3	+	+	+	+	+	+	…
2	+	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	…
1	+	+	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	…
0		+	+	$\oplus$	–	–	…

Таблиця 2

r	k						
	0	1	2	3	4	5	…
5	+	+	+	+	+	+	…
4	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	…
3	+	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	…
2	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	…
1	+	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	…
0		+	$\oplus$	$\oplus$	–	–	…

Таблиця 3

r	k						
	0	1	2	3	4	5	…
$2s+1$	+	+	+	+	+	+	…
$2s$	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…
2	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	…
1	+	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	…
0		+	⊕	⊕	–	–	…

Аналогічні питання для комонотонного наближення досліджувались у статтях D. Leviatan та І. О. Шевчука [8 – 10].

2. Допоміжні твердження. Нагадаємо деякі властивості DT-модулів гладкості (1.3) і (1.5), які почасти відомі з [1], а інші доведені в [9]. Тут і далі через c, c_i, $i \in N$, позначимо різні константи, які залежать лише від k, r, s. Для $f \in \mathbb{C}_\varphi^r$ і $0 \le p < r$ маємо

$$\omega_{k+r-p,p}^{\varphi}\left(f^{(p)}, t\right) \le c t^{r-p} \omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, t\right), \quad t \ge 0, \tag{2.1}$$

причому якщо $f \in \mathbb{B}^r$ і $0 \le p < r$, то $f \in \mathbb{C}_\varphi^p$ і

$$\omega_{r-p,p}^{\varphi}\left(f^{(p)}, t\right) \le c t^{r-p} \left\| \varphi^r f^{(r)} \right\|, \quad t \ge 0. \tag{2.2}$$

Для кожної $f \in \mathbb{C}_\varphi^r$

$$t^{-k}\, \omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, t\right) \le c \tau^{-k}\, \omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, \tau\right), \quad 0 < \tau \le t. \tag{2.3}$$

Нехай $\phi \in \Phi^k$, тобто $\phi(0+) = 0$, $\phi(t)$ не спадає, і $t^{-k}\phi(t)$ не зростає на $(0, \infty)$. Однак, взагалі кажучи, для $f \in \mathbb{C}_\varphi^r$ $\omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, t\right)$ не обов'язково належить Φ^k. Для того щоб позбутися цієї незручності, наслідуючи ідеї С. Б. Стєчкіна і А. Ф. Тімана (див. [4], гл. 1), вводимо до розгляду функцію

$$\tilde{\phi}(t) := t^k \sup_{u \ge t} u^{-k}\, \omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, u\right), \quad t > 0, \quad \tilde{\phi}(0) := 0, \tag{2.4}$$

яка належить Φ^k і задовольняє нерівності

$$c\tilde{\phi}(t) \le \omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, t\right) \le \tilde{\phi}(t). \tag{2.5}$$

Для $\phi \in \Phi^k$ позначимо через $B^r H_k^{\phi}$, $r \ge 0$, множину функцій $f \in \mathbb{C}_\varphi^r$, які задовольняють умову

$$\omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, t\right) \le \phi(t), \quad t \ge 0.$$

Зауважимо, що якщо $f \in \mathbb{C}_\varphi^r$, то з огляду на (2.5) завжди $f \in B^r H_k^{\tilde{\phi}}$. Також з (2.1) випливає, що

$$B^r H_k^{\phi} \subseteq B^p H_{k+r-p}^{\phi_{r,p}}, \quad 0 \le p \le r, \tag{2.6}$$

де $\phi_{r,p}(t) := c t^{r-p} \phi(t)$.

Позначимо через Φ_*^k підмножину функцій $\phi \in \Phi^k$, які задовольняють нерівність

$$\int_0^1 \frac{\phi(t)}{t}\, dt < \infty,$$

і для кожної $\phi \in \Phi_*^k$ покладемо

$$\phi_*(t) := \int_0^t \frac{\phi(u)}{u}\, du.$$

Наведемо деякі факти (див. [9]). А саме, $\phi_* \in \Phi^k$, і якщо $\phi \in \Phi^k$, $l \geq 1$, то $\phi_l(t) := t^l \phi \in \Phi_*^{k+l}$ і

$$\phi(t) \leq k\phi_*(t),$$
$$(\phi_l)_*(t) \leq \phi_l(t). \tag{2.7}$$

Зокрема, для $f \in \mathbb{C}_\varphi^r$ маємо

$$(\tilde{\phi}_l)_*(t) \leq ct^l \omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, t\right). \tag{2.8}$$

Тепер ми можемо сформулювати результати, які відіграють головну роль у доведенні теорем 1 – 4.

Твердження 1. *Нехай* $r = 2s$ *або* $r = s = 2 = k + 1$. *Якщо* $\phi \in \Phi_*^k$ *і* $f \in \in \Delta^{(0,s)} \cap B^r H_k^\phi$, *то*

$$E_n^{(0,s)}(f) \leq c\,\frac{1}{n^r}\,\phi_*\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq k + r - 1, \tag{2.9}$$

де $c = c(r, k)$.

Взагалі, для $r = 1$ справедливим є таке твердження.

Твердження 2. *Нехай* $\phi \in \Phi^k$ *і* $f \in \Delta^{(0)}(Y) \cap B^1 H_k^\phi$. *Тоді*

$$E_n^{(0)}(f, Y) \leq \frac{C(k, Y)}{n}\,\phi\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq k, \tag{2.10}$$

і

$$E_n^{(0)}(f, Y) \leq \frac{c}{n}\,\phi\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq N(k, Y). \tag{2.11}$$

Для $r = 0$ має місце таке твердження.

Твердження 3. 1. *Нехай* $k = 1$ *або* $k = 2$, $s = 1$. *Якщо* $\phi \in \Phi^k$ *і* $f \in H_k^\phi$, *то*

$$E_n^{(0,s)}(f) \leq c\phi\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq k - 1, \tag{2.12}$$

де $c = c(r, k)$.

2. *Нехай* $k = 2$ *або* $k = 3$. *Тоді для* $\phi \in \Phi^k$ *і* $f \in H_k^\phi$

$$E_n^{(0)}(f, Y) \leq C(k, Y)\phi\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq k - 1, \tag{2.13}$$

і

$$E_n^{(0)}(f, Y) \leq c\phi\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq N(k, Y). \tag{2.14}$$

Визначимо поняття довжини інтервалу $J = [a, b] \subseteq I$ щодо його розташування на I. Для цього покладемо

$$/J/ := \frac{|J|}{\varphi((a+b)/2)},$$

де $|J| := b - a$ — довжина J. Відомо [9], що коли $J_1 \subseteq J$, то $/J_1/ \le /J/$.

Нагадаємо означення звичайного модуля гладкості, обмеженого на J:

$$\omega_k(t, f; J) := \sup_x \sup_{0 \le h \le t} \left| \Delta_h^k f(x) \right|, \quad t \ge 0, \tag{2.15}$$

де внутрішній супремум береться по всіх h таких, що $x \pm \frac{k}{2} h \in J$. Наведемо деякі співвідношення, які включають модулі типу Ditzian – Totik: для $J = [a, b] \subseteq \subseteq [-1, 1]$

$$\omega_k(f, |J|; J) \le \omega_k^{\varphi}(f, /J/), \tag{2.16}$$

аналогічно для $f \in \mathbb{C}_{\varphi}^r$

$$\omega_k\left(f^{(r)}, |J|; J\right) \le \frac{1}{w^r(a, b)} \omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, /J/\right), \tag{2.17}$$

де $w(a, b) := \sqrt{(1+a)(1-b)}$. Якщо $L_{k-1}(f, \cdot; J)$ — многочлен Лагранжа степеня $\le k-1$, який інтерполює f у точках $a + i\frac{b-a}{k-1}$, $0 \le i \le k-1$, і $f \in \mathbb{C}_{\varphi}^r$ для відповідного r, то

$$\left\| f - L_{k-1}(f, \cdot; J) \right\|_J \le c\,\omega_k^{\varphi}(f, /J/), \tag{2.18}$$

$$\left\| f^{(r)} - L_{k-1}\left(f^{(r)}, \cdot; J\right) \right\|_J \le \frac{c}{w^r(a, b)} \omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)}, /J/\right), \tag{2.19}$$

$$\omega_k(f, t^2) \le 2\omega_k^{\varphi}(f, t), \quad t \ge 0. \tag{2.20}$$

Також нам потрібна лема, доведена в статті D. Leviatan та І. О. Шевчука [9].

Лема 1. *Якщо* $f \in B^{2r} H_k^{\phi}$ *і* $\phi \in \Phi_*^k$, *то* $f \in C^r(I)$ *і*

$$\omega_{k+r}\left(f^{(r)}, t, I\right) \le c\phi_*\left(\sqrt{t}\right), \quad t \ge 0. \tag{2.21}$$

3. Знакозберігаючі сплайни. У цьому пункті будемо припускати, що $f \in \in B^r H_k^{\phi} \cap \Delta^{(0)}(Y)$ з $\phi \in \Phi^k$ і $Y \in A_s(f)$. Почнемо з чебишовського розбиття I, а саме, зафіксуємо $n \ge 1$ і для кожного $j = 0, \ldots, n$ покладемо $x_j := x_{j,n} := := \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$. Позначимо $I_j := I_{j,n} := \left| x_j, x_{j-1} \right|$, $j = 1, \ldots, n$. Тоді легко бачити, що

$$\frac{2}{n} \le /I_j/ = \frac{\left| I_j \right|}{\varphi\left(\left(x_j + x_{j-1}\right)/2\right)} \le \frac{\pi}{n}. \tag{3.1}$$

Сформулюємо низку лем про знакозберігаючі сплайни.

Лема 2. *Нехай* $1 < j < n$ *і* $f(x) \ge 0$, $x \in I_j$. *Тоді існує невід'ємний многочлен* p_j *степеня* $\le k + r - 1$ *такий, що*

$$\left\| f - p_j \right\|_{I_j} \le c n^{-r} \phi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.2}$$

Доведення. Очевидно, оскільки f за означенням є неперервною, знайдеться невід'ємний p_j, що задовольняє (див. [2]) нерівності

$$\| f - p_j \| \le c\omega_{k+r}\big(f, |I_j|; I_j\big) \le c|I_j|^r \omega_k\big(f^{(r)}, |I_j|; I_j\big) \le$$

$$\le c\left(\frac{|I_j|}{w(x_j, x_{j-1})}\right)^r \omega^{\varphi}_{k,r}\big(f^{(r)}, /I_j/\big) \le c\left(\frac{|I_j|}{w(x_j, x_{j-1})}\right)^r \omega^{\varphi}_{k,r}\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right),$$

де ми застосували (2.17) і (3.1). Отже, ми завершуємо доведення (3.2) тим, що для I_j такого, що $1 < j < n$, маємо

$$|I_j| \le c w(x_j, x_{j-1})\frac{1}{n}.$$

Для даного Y покладемо

$$O_i := (x_{j+1}, x_{j-2}), \quad \text{якщо} \quad y_i \in [x_j, x_{j-1}),$$

і визначимо також множину

$$O := \bigcup_{i=1}^{s} O_i.$$

Далі, нехай $\tilde{O}_q := [a_q, b_q]$, $q \le s$ — зв'язні компоненти замикання $\overline{O}$ множини O, проіндексовані таким чином, що $b_{q+1} < a_q$.

Лема 3. *Нехай* $r \ge s$. *Тоді для кожного* q *існує многочлен* P_q *такий, що*

$$P_q(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in \tilde{O}_q \cap [x_{n-1}, x_1], \tag{3.3}$$

і

$$\| f - P_q \|_{\tilde{O}_q \cap [x_{n-1}, x_1]} \le c n^{-r} \phi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.4}$$

Доведення. Оскільки $f \in B^r H^{\phi}_k$, то за означенням $f \in C^r[x_{n-1}, x_1]$. Тепер, застосовуючи лему 3.3 з [11], отримуємо, що існує многочлен P степеня $\le k + r - 1$, що задовольняє (3.3), такий, що

$$\| f - P_q \|_{\tilde{O}_q \cap [x_{n-1}, x_1]} \le c\left|\tilde{O}_q \cap [x_{n-1}, x_1]\right|^r \omega_k\left(f^{(r)}, |\tilde{O}_q|; \tilde{O}_q \cap [x_{n-1}, x_1]\right) \le$$

$$\le c /\tilde{O}_q/^r \phi\big(/\tilde{O}_q/\big). \tag{3.5}$$

Остання нерівність отримується, як і при доведенні леми 2. Нарешті, маємо

$$/\tilde{O}_q/ \le \frac{c}{n}, \tag{3.6}$$

і (3.4) доведено.

Лему 3 можна легко сформулювати для $r \ge 1$ за умови, що $n > N(Y)$, де $N(Y)$ береться так, що для кожного $n > N(Y)$ будь-яка $\tilde{O}_q$ містить одну і лише одну точку $y_q \in Y$.

Лема 3′. *Нехай* $r \ge 1$ *і* $n > N(Y)$. *Тоді для кожного* q *існує многочлен* P_q *степеня* $\le k + r - 1$ *такий, що виконуються* (3.3) *і* (3.4).

Позначимо через Σ_k набір кускових многочленів (не обов'язково неперервних) степеня $\le k$ з вузлами в x_j і через $\Sigma_{k,O}$ підмножину $S \in \Sigma_k$, що є многочленами на кожному $\tilde{O}_q$. Зауважимо, що всі похідні кускового многочлена (сплайна) існують, за винятком, можливо, чебишовських вузлів, тому ми можемо використовувати їх без суттєвих обмежень (це буде видно з подальшого). Леми 2, 3 та 3′ приводять до наступних двох лем.

Лема 4. *Нехай* $r \geq s$. *Тоді існує кусковий многочлен* $S \in \Sigma_{k+r-1,O}$ *такий, що*

$$S(x)\Pi(x, Y) \geq 0, \quad x \in [x_{n-1}, x_1], \tag{3.7}$$

і

$$\| f - S \|_{[x_{n-1}, x_1]} \leq c n^{-r} \phi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.8}$$

Лема 4′. *Нехай* $r \geq 1$ *і* $n > N(Y)$. *Тоді існує кусковий многочлен* $S \in \Sigma_{k+r-1,O}$ *такий, що справджуються* (3.7) *і* (3.8).

Для поширення попередніх лем на кінцеві точки інтервалу ми повинні дещо обмежити r. А саме, має місце така лема.

Лема 5. *Нехай* $\phi \in \Phi^k$. *Якщо* f *є додатною на* I_1 (*відповідно на* I_n), *то існує додатний многочлен* p_1 (*відповідно* p_n) *степеня* $\leq k-1$ *такий, що*

$$\left\| f - p_j \right\|_{I_j} \leq c \phi\left(\frac{1}{n}\right), \quad j = 1, n, \quad \textit{відповідно.}$$

Доведення цієї леми повторює доведення леми 2. А саме, існує невід'ємний многочлен p_1 такий, що

$$\left\| f - p_j \right\|_{I_1} \leq c \omega_k(f, |I_1|; I_1) \leq c \omega_k^{\varphi}(f, /I_1/) \leq c \phi\left(\frac{1}{n}\right),$$

де ми використали нерівність (2.16). Доведення для I_n є аналогічним.

Очевидним наслідком леми 5 і (2.1) є такий висновок.

Висновок 1. *Візьмемо* $r \geq 0$. *Якщо* f *є невід'ємною на* I_1 (*відповідно* I_n), *то існує невід'ємний многочлен* p_1 (*відповідно* p_n) *степеня* $\leq k + r - 1$ *такий, що*

$$\left\| f - p_j \right\|_{I_j} \leq c n^{-r} \phi\left(\frac{1}{n}\right), \quad j = 1, n, \quad \textit{відповідно.}$$

Нарешті, поширимо лему 3 на кінцеві точки інтервалу, для цього ми повинні ще обмежити r.

Лема 6. *Припустимо, що або* $s = r = 2$ *і* $k = 1$, *або* $r = 2s$, *і* $\phi \in \Phi_*^k$. *Якщо* $1 \in \tilde{O}_1$, *то існує многочлен* P_1 *степеня* $\leq k + r - 1$ *такий, що*

$$P_1(x)\Pi(x, Y) \geq 0, \quad x \in \tilde{O}_1,$$

і

$$\| f - P_1 \|_{\tilde{O}_1} \leq c n^{-r} \phi_*\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доведення. З припущень на r і леми 1 випливає, що $f \in C^{r/2}(I)$, і

$$\omega_{k+r/2}\left(f^{(r/2)}, t\right) \leq c \phi_*(\sqrt{t}).$$

Як і в (3.5), застосувавши лему 3.3 з [11], робимо висновок, що існує знакозберігаючий на $\tilde{O}_1$ многочлен, який задовольняє нерівності

$$\| f - P_1 \|_{\tilde{O}_1} \leq c \left| \tilde{O}_1 \right|^{r/2} \omega_{k+r/2}\left(f^{(r/2)}, \left| \tilde{O}_1 \right|; \tilde{O}_1\right) \leq c \left| \tilde{O}_1 \right|^{r/2} \phi_*\left(\sqrt{\left| \tilde{O}_1 \right|}\right) \leq c n^{-r} \phi_*\left(\frac{1}{n}\right),$$

де враховано, що $\left| \tilde{O}_1 \right| = \dfrac{c}{n^2}$.

Зокрема, для $n = 1$ отримуємо такий висновок.

Висновок 2. *За припущень леми* 6

$$E^{(0,s)}_{k+r-1}(f) \le c\phi_*(1).$$

Таким чином, леми 4 і $4'$ можна поширити на весь інтервал. Відповідні доведення є очевидними.

Лема 7. *Нехай або* $r = s = 2$ *і* $k = 1$, *або* $r = 2s$, *і* $\phi \in \Phi^k_*$. *Тоді існує сплайн* $S \in \Sigma_{k+r-1,O} \cap \Delta^{(0)}(Y)$ *такий, що*

$$\| f - S \| \le c n^{-r} \phi_*\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.9}$$

Лема 7′. *Нехай* $r = 1$ *і* $\phi \in \Phi^k$. *Тоді для* $n > N(Y)$ *існує сплайн* $S \in \Sigma_{k,O} \cap \Delta^{(0)}(Y)$ *такий, що*

$$\| f - S \| \le c n^{-r} \phi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.10}$$

Ми можемо встановити одну лему у випадку $r = 0$.

Лема 8. 1. *Нехай або* $k = 1$, *або* $k = 2$, $s = 1$. *Якщо* $\phi \in \Phi^k$ *і* $f \in H^\phi_k$, *то існує сплайн* $S \in \Sigma_{k-1,O} \cap \Delta^{(0)}(Y)$ *такий, що*

$$\| f - S \| \le c \phi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.11}$$

2. *Нехай* $k = 2$ *або* $k = 3$. *Тоді для* $\phi \in \Phi^k$ *і* $f \in H^\phi_k$ *існує сплайн* $S \in \Sigma_{k-1,O} \cap \Delta^{(0)}(Y)$ *такий, що*

$$\| f - S \| \le c \phi\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \ge N(Y). \tag{3.12}$$

Доведення є аналогічним доведенню лем 3 і 4 з [2] і тому не наводиться.

Лема 9. *Нехай* $g \in B^1 H^\phi_k$, $\phi \in \Phi^k$, *і* $T := \{t_1, \ldots, t_{k+1}\}$ — *набір з* $k + 1$ *точки* $t_j \in (-1, 1)$. *Тоді для кожного* $x \in I$

$$\left| g(x) - L_k(g, x; t_1, \ldots, t_{k+1}) \right| \le C(T) \left| \prod_{j=1}^{k+1} (x - t_j) \right| \phi(1),$$

де $L_k(g, x; t_1, \ldots, t_{k+1})$ — *многочлен Лагранжа степеня* $\le k$, *який інтерполює* g *в точках* t_j.

Доведення. Позначимо через C різні константи, які залежать лише від T. Покладемо $Q_k(x) := L_k(g, x; t_1, \ldots, t_{k+1})$ і $L_k(x) := L_k(g, x; I)$. За нерівностями H. Whitney, (2.16) і (2.20)

$$\| g - Q_k \| \le \| g - L_k \| + \| L_k - Q_k \| =$$

$$= \| g - L_k \| + \| Q_k(g - L_k, \cdot) \| \le \| g - L_k \| \left(1 + 2^k \max_{1 \le i \le k} \left| t_{i+1} - t_i \right|^{-k} \right) \le$$

$$\le C\omega_{k+1}(g, |I|; I) \le C\omega^\varphi_{k,1}(g, /I/) \le C\phi(1). \tag{3.13}$$

Тепер нехай $J = [a, b] \subset (-1, 1)$ — такий інтервал, що $T \subset (a, b)$ і $|J| > 1$. Покладемо

$$L_{k-1} \;:=\; L_{k-1}\big(g', x, J\big), \qquad l_k(x) \;:=\; g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{x} L_{k-1}(u)\,du.$$

Тоді за нерівністю (2.19)

$$\big\| g' - L_{k-1} \big\|_J \;\le\; \frac{c}{w(a,b)}\,\omega_{k,1}^{\varphi}\big(g', /J/\big) \;\le\; C\phi(1),$$

що разом з (3.13) приводить до низки нерівностей

$$\big\| Q_k' - L_{k-1} \big\| \;\le\; c\,\| Q_k - l_k \|_J \;\le\; c\big(\| Q_k - g \| + \| l_k - g \|_J\big) \;\le$$

$$\le\; C\phi(1) + c\big\| L_{k-1} - g' \big\|_J \;\le\; C\phi(1).$$

Отже,

$$\big\| Q_k' - g' \big\|_J \;\le\; \big\| L_{k-1} - g' \big\|_J \;+\; \big\| L_{k-1} - Q_k' \big\| \;\le\; C\phi(1).$$

Тепер для даного $x \in J$ нехай $t_j \in T$ є найближчою до x. Тоді

$$|\,g(x) - Q_k(x)\,| \;=\; \left| \int\limits_{t_j}^{x} \big(g'(u) - Q_k'(u)\big)du \right| \;\le\; C\big|x - t_j\big|\phi(1) \;\le\; C(T)\prod_{i=1}^{k+1} |\,x - t_i\,|\,\phi(1).$$

Лема 9′. *Якщо* $r = 1$ *і* $\phi \in \Phi^k$, *то*

$$E_k^{(0)}(f, Y) \;\le\; C(Y,k)\,\phi(1).$$

Доведення. Спочатку припустимо, що $s \ge k + 1$. Оскільки, очевидно,

$$L_k(f, x; y_1, \ldots, y_{k+1}) \;\equiv\; 0,$$

то можна покласти $P(x) := f(0)$. Тоді з леми 9 випливає

$$\| f \| \;=\; \big\| f - L_k(\cdot; f, x; y_1, \ldots, y_{k+1}) \big\| \;\le\; C(Y,k)\,\phi(1).$$

Таким чином, лему 9′ доведено для випадку $s \ge k + 1$, і залишається розглянути випадок $s \le k$. У цьому випадку записуємо $t_i := y_i$, $i = 1, \ldots, s$, і фіксуємо $k - s + 1$ довільних додаткових точок $t_{s+1}, \ldots, t_{k+1}$, скажімо, на інтервалі $(-1, y_s)$. Нехай

$$\pi(x) \;:=\; \prod_{i=s+1}^{k+1} (x - t_i).$$

Тоді за лемою 9 існує константа $C_1 = C_1(Y,k)$ така, що

$$\big\| f(x) - L_k(f, x; t_1, \ldots, t_{k+1}) \big\| \;\le\; C_1(Y,k)\,|\,\Pi(x,Y)\,\pi(x)\,|\,\phi(1), \qquad x \in I.$$

Покладемо $C_2 = C_1 \| \pi \|$ і

$$P(x) \;=\; L_k(x, f; t_1, \ldots, t_{k+1}) \;+\; C_2\,\Pi(x,Y)\,\phi(1).$$

Тоді маємо

$$\| f - P \| \;\le\; 2\,C_2\,\| \Pi(\cdot, Y) \|\,\phi(1)$$

і

$$f(x)\,\Pi(x,Y) \;=\; \Pi(x,Y)\big(L_k(x, f; t_1, \ldots, t_{k+1}) - f(x)\big) \;+$$

$$+\; \Pi(x,Y)\,f(x) \;+\; C_2\,\Pi^2(x,Y)\,\phi(1) \;\ge\; \Pi(x,Y)\,f(x) \;\ge\; 0,$$

що й завершує доведення леми 9′.

Щоб завершити формулювання допоміжних лем, ми повинні модифікувати означення a_k порівняно з [2, 9]. $I_{i,j}$ і p_i будуть означати те саме, що і в [2]. Для $S \in \Sigma_{k-1}$ покладемо

$$a_k(S) := a_{k,n}(S) := \max_{i,j} \left(\frac{I_j}{I_{i,j}} \right)^k \| p_i - p_j \|_{I_i}.$$

Нагадаємо одну лему з [9].

Лема 10. *Для кожного* $S \in \Sigma_{k-1}$ *виконуються нерівності*

$$a_k(S) \le c\,\omega_k^\varphi(S, n^{-1}) \le c\,a_k(S). \tag{3.14}$$

4. Доведення ствердних результатів.

Лема 11. *Якщо* $S \in \Sigma_{k-1,O} \cap \Delta^{(0)}(Y)$ *такий, що*

$$a_k(S) \le 1,$$

то знайдеться многочлен $P_n \in \Delta^{(0)}(Y)$ *степеня* $\le cn$, *що задовольняє нерівність*

$$\| S - P_n \| \le c.$$

Доведення цієї леми є майже дослівним повторенням доведень лем 5 – 8 з [2], за винятком того, що потрібно замінити $\phi(h_j)$ і $\phi(\rho)$ на 1, що спрощує деякі обчислення.

Поєднуючи леми 10 і 11 (замість твердження 2 з [2]), формулюємо наступний висновок.

Твердження 4. *Якщо* $S \in \Sigma_{k-1,O} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, *то*

$$E^{(0)}_{c_1 n}(S, Y) \le c_2\, \omega_k^\varphi\left(S, \frac{1}{n}\right), \tag{4.1}$$

де $c_1 = c_1(k, s)$ *і* $c_2 = c_2(k, s)$.

Доведення твердження **1.** З леми 7 і твердження 4 випливає, що для $n > c_3$ існують P_n і S такі, що

$$\| f - P_n \| \le \| f - S \| + \| S - P_n \| \le c \frac{1}{n} \phi_*\left(\frac{1}{n}\right) + c\,\omega_{k+r}\left(S, \frac{1}{n}\right).$$

Завдяки (3.9) маємо

$$\omega^\varphi_{k+r}\left(S, \frac{1}{n}\right) \le c\left(n^{-r} \phi_*\left(\frac{1}{n}\right) + \omega^\varphi_{k+r}\left(f, \frac{1}{n}\right)\right) \le$$

$$\le c n^{-r}\left(\phi_*\left(\frac{1}{n}\right) + \omega^\varphi_{k,r}\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)\right) \le c n^{-r}\left(\phi_*\left(\frac{1}{n}\right) + \phi\left(\frac{1}{n}\right)\right) \le c n^{-r} \phi_*\left(\frac{1}{n}\right),$$

де в другій нерівності ми використали (2.1), а в останній — (2.7). Це доводить твердження 1 для $n > c_3$, в той час як для $k + r \le n \le c_3$ воно легко випливає з висновку 2.

Доведення твердження **2.** Легко бачити, що (2.10) випливає з (2.11), причому лема 9′ відіграє роль висновку 2 для твердження 1, отже, ми повинні довести лише (2.11). Але (2.11) випливає з леми 7′ і твердження 4 таким же чином, як і при доведенні твердження 1 (при цьому ϕ_* замінюється на ϕ).

Доведення твердження 3 очевидним чином випливає з леми 8, твердження 4 і нерівності H. Whitney.

Доведення теореми **2.** Нехай спочатку $r > 2s$. Оскільки $f \in B^r H_k^{\tilde{\phi}}$, де $\tilde{\phi}$ визначено в (2.4) і $r > 2s$, ми отримуємо за допомогою (2.6), що $f \in B^{2s} H^{\tilde{\phi} r - 2s}_{k+r-2s}$, причому $r - 2s \geq 1$. Доведення тепер завершується використанням твердження 1 і (2.8). Якщо $k = r = 2$, $s = 1$, або $r = 0$, $k = 1$, то теорема безпосередньо випливає з твердження 3.

***Доведення теореми* 4.** Нехай $r \geq 1$. З умови теореми $f \in B^r H_k^{\tilde{\phi}}$, $r \geq 1$, де $\tilde{\phi}$ визначено в (2.4), маємо $f \in B^1 H_{k+r-1}^{\tilde{\phi}_{r-1}}$, і твердження теореми отримується за допомогою твердження 2. Якщо $r = 0$, $k = 2$, або $k = 3$, то воно випливає з твердження 3.

***Доведення теореми* 1.** Виберемо $f \in \mathbb{B}^r$ так, щоб $\left\| \varphi^r f^{(r)} \right\| \leq 1$. Спочатку розглянемо $r > 2s$. Відтак (2.2) зумовлює, що $f \in B^{2s} H_{r-2s}^{\bar{\phi}}$, де $\bar{\phi}(t) := ct^{r-2s}$. Очевидно,

$$\bar{\phi}_* = \frac{1}{r-2s} \bar{\phi} \in \Phi_*^{r-2s},$$

і теорема 1 випливає з твердження 1. Далі, нехай $s = 2$, $r = 3$. У цьому випадку ми повторюємо наведене вище доведення, замінюючи s на 1 скрізь і застосовуючи твердження 1. І нарешті, якщо $r = 1$ або $r = 2$, $s = 1$, то теорема 1 випливає з випадків теореми 2: $r = 0$, $k = 1$ і $r = 0$, $k = 2$, $s = 1$ відповідно.

***Доведення теореми* 3.** Теорема 3 випливає з теорем 2 і 4.

5. Контрприклади. ***Доведення теореми* 5.** Покладемо

$$g_r(x) := C_r \begin{cases} -(1+x)^{r/2} \ln(1+x), & \text{якщо } r \text{ — парне}, \\ (1+x)^{r/2}, & \text{якщо } r \geq 3 \text{ і непарне}, \end{cases} \tag{5.1}$$

де C_r вибрано таким чином, що

$$\left\| \varphi^r g_r^{(r)} \right\| = 1. \tag{5.2}$$

Також позначимо $M_r := \| g_r \|$. Беручи $\rho := \left[\dfrac{r+1}{2} \right]$, маємо

$$\lim_{x \to -1+} g_r^{(\rho)}(x) = \infty, \tag{5.3}$$

а для $j > \rho$

$$(-1)^{j-\rho} g_r^{(j)}(x) > 0, \quad -1 < x < 1. \tag{5.4}$$

Без втрати загальності можемо припускати, що $n \geq r - 1$. Доведення розіб'ємо на три випадки: 1) $s - 1 < r \leq 2s - 2$; 2) $\max(3, 2s - 2) < r \leq 2s$; 3) $1 < r \leq s$.

1. Зауважимо, що в цьому випадку $\rho \leq s - 1 < r$. З огляду на (5.3) та (5.4) існує $x_0 \in (-1, 1)$, для якої

$$g_r^{(\rho)}(x) \geq n^{2\rho}(A + M_r), \quad -1 < x \leq x_0. \tag{5.5}$$

Візьмемо $Y\colon -1 < y_s < \ldots < y_1 < x_0$ і нехай

$$L_{s-1}(x) := L_{s-1}(x; g_r; y_1, \ldots, y_s)$$

позначає многочлен Лагранжа степеня $\leq s - 1$, який інтерполює функцію g_r у точках Y. Позначимо

$$f := (-1)^{s-\rho}(g_r - L_{s-1}).$$

Тоді

$$f(x) = (-1)^{s-\rho}\Pi(x)[y_1, \ldots, y_s, x; g_r] = (-1)^{s-\rho}\Pi(x)\,\frac{g_r^{(s)}(\theta)}{s!}$$

для деякого $\theta \in (-1, 1)$, де $[y_1, \ldots, y_s, x; g]$ позначає поділену різницю g в $y_1, \ldots, y_s$ та x. Отже, завдяки (5.4) $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ і $A_s(f) = \{Y\}$. Також, оскільки $s - 1 < r$, з (5.2) випливає $\left\|\varphi^r f^{(r)}\right\| = 1$.

Далі припустимо від супротивного, що існує многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$ такий, що

$$\| f - P_n \| < A,$$

і покладемо

$$Q_n := (-1)^{s-\rho} P_n + L_{s-1}.$$

Тоді

$$\| g_r - Q_n \| = \| f - P_n \|,$$

звідки

$$\| Q_n \| \le \| Q_n - g_r \| + \| g_r \| < A + M_r,$$

що за допомогою нерівності Маркова зумовлює

$$\left\| Q_n^{(\rho)} \right\| \le n^{2\rho}(A + M_r). \tag{5.6}$$

З іншого боку, оскільки $\rho \le s - 1$, то для деякого $\tau \in (-1, x_0)$ маємо

$$Q_n^{(\rho)}(\tau) = \rho!\left[y_1, \ldots, y_{\rho+1}; Q_n\right] = \rho!\left[y_1, \ldots, y_{\rho+1}; g_r\right] = g_r^{(\rho)}(\theta),$$

де $\theta \in (-1, x_0)$. Зауважимо, що в другій нерівності ми використали той факт, що $g_r(y_i) = L_{s-1}(y_j) = 0$, $j = 1, \ldots, \rho$, і $P_n \in \Delta^{(0)}(Y)$. Завдяки (5.5) маємо

$$\left\| Q_n^{(\rho)} \right\| \ge g_r^{(\rho)}(\theta) \ge n^{2r}(A + M_r),$$

що суперечить (5.6). Це завершує доведення першого випадку.

2. У цьому випадку $2s - 1 \le r \le 2s$. Тоді $\rho = s$ і, як і у раніше розглянутому випадку, існує $x_0 \in (-1, 1)$, для якої виконується (5.5). Знову беремо $Y\colon -1 < y_s < \ldots < y_1 < x_0$. Тепер нехай

$$L_{s+1}(x) := L_{s+1}(x; g_r; y_1, \ldots, y_s, x_0, x_0)$$

буде многочленом Лагранжа – Ерміта степеня $\le s + 1$, який інтерполює g_r у точках $y_1, \ldots, y_s, x_0$ і інтерполює g_r' в x_0. Визначимо

$$f := g_r - L_{s+1}.$$

Тоді

$$f(x) = \Pi(x)(x - x_0)^2\left[y_1, \ldots, y_s, x_0, x_0, x; g_r\right], \tag{5.7}$$

де квадратними дужками позначена узагальнена поділена різниця. Відтак

$$f(x) = \Pi(x)(x - x_0)^2\,\frac{g_r^{(\rho+2)}(\theta)}{(\rho + 1)!}$$

для деякого $\theta \in (-1, 1)$. З (5.4) виводимо, що $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ і $A_s(f) = \{Y\}$, і, оскільки $s + 1 < r$ (нагадаємо, випадок $r - 1 = 2 = s$ вилучено), з (5.2) випливає $\left\|\varphi^r f^{(r)}\right\| = 1$.

Тепер припустимо, що існує многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$ такий, що

$$\| f - P_n \| < A,$$

і покладемо

$$Q_n := P_n + L_{s+1}.$$

Тоді, як і раніше, отримаємо

$$\left\| Q_n^{(\rho)} \right\| \le n^{2\rho}(A + M_r). \tag{5.8}$$

З іншого боку, оскільки L_{s+1} є інтерполяційним і $P_n \in \Delta^{(0)}(Y)$, для деяких τ, $\theta \in (-1, x_0)$ будемо мати

$$\left| Q_n^{(\rho)}(\tau) \right| = \rho! [y_1, \ldots, y_s, x_0; Q_n] = \rho! \left[y_1, \ldots, y_s, x_0; L_{s+1} \right] + \frac{P_n(x_0)}{\Pi(x_0)} \ge$$

$$\ge -\rho! \left[y_1, \ldots, y_s, x_0; g_r \right] = g_r^{(\rho)}(\theta) \ge n^{2\rho}(A + M_r).$$

Це суперечить (5.8) і завершує доведення другого випадку.

3. У цьому випадку нам потрібно застосувати дещо інший підхід. Виберемо $x_0 \in (-1, 0)$ так, щоб виконувалась нерівність

$$g_r^{(r-1)}(x_0) \ge n^{2(r-1)}(A + M_r + 1), \tag{5.9}$$

і покладемо

$$\tilde{g}_r(x) := (-1)^{r-\rho} \frac{1}{(r-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-u)^{r-1} g_r^{(r)}(u)\, du, \quad -1 \le x \le 1.$$

Визначимо

$$f(x) := \begin{cases} \tilde{g}_r(x), & x \ge x_0, \\ 0, & x < x_0. \end{cases}$$

Тоді завдяки (5.2) $\left\| \varphi^r f^{(r)} \right\| \le 1$. Тепер бачимо, що

$$T_{r-1} := (-1)^{r-\rho} g_r - \tilde{g}_r$$

є многочленом Тейлора степеня $r-1$ в точці x_0 функції $(-1)^{r-\rho} g_r$ і, зокрема,

$$T_{r-1}^{(r-1)}(x) \equiv (-1)^{r-\rho} g_r^{(r-1)}(x_0).$$

Припустимо від супротивного, що існують набір $Y \in A_s(f)$, тобто $Y : -1 < y_s < \ldots < y_1 \le x_0$ і многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$, який задовольняє

$$\| f - P_n \| < A,$$

і покладемо

$$Q_n := P_n + T_{r-1}.$$

Тоді для $x_0 \le x \le 1$

$$f(x) - P_n(x) = \tilde{g}_r(x) - P_n(x) = (-1)^{r-\rho} g_r(x) - Q_n(x),$$

отже,

$$|Q_n(x)| \le |g_r(x)| + |f(x) - P_n(x)| < A + M_r. \tag{5.10}$$

З (5.2) випливає, що

$$|\tilde{g}_r(x)| \le \frac{1}{(r-1)!}\left|\int_{-1}^{x_0} \frac{(1+u)^{r-1}}{\varphi^r(u)}\,du\right| < 1.$$

Таким чином, для $-1 \le x < x_0$

$$|Q_n(x)| \le |P_n(x)| + |g_r(x)| + |\tilde{g}_r(x)| < A + M_r + 1,$$

що разом з (5.10) приводить до нерівності

$$\|Q_n\| < A + M_r + 1,$$

і, отже,

$$\left\|Q_n^{(r-1)}\right\| < n^{2(r-1)}(A + M_r + 1). \tag{5.11}$$

З іншого боку, для деяких $\tau, \theta \in (-1, x_0)$

$$\left|Q_n^{(r-1)}(\tau)\right| = (r-1)!|[y_1, \ldots, y_r; Q_n]| = (r-1)!\left|\left[y_1, \ldots, y_r; T_{r-1}\right]\right| =$$
$$= \left|T_{r-1}^{(r-1)}(\theta)\right| = \left|g_r^{(r-1)}(x_0)\right| \ge n^{2(r-1)}(A + M_r + 1),$$

що суперечить (5.11). В наведених міркуваннях ми використали той факт, що $r \le s$ і $P_n \in \Delta^{(0)}(Y)$. Це завершує доведення третього випадку і теореми 5 в цілому.

***Доведення теореми* 6.** Будемо використовувати наступні нерівності для функцій з $\mathbb{C}_\varphi^r$:

$$\omega_{k,r}^\varphi\left(f^{(r)}, t\right) \le c_4(k, r)\omega_{1,r}^\varphi\left(f^{(r)}, t\right), \quad k \ge 1, \tag{5.12}$$

$$\omega_{k,r}^\varphi\left(f^{(r)}, t\right) \le c_5(k, r)\omega_{2,r}^\varphi\left(f^{(r)}, t\right), \quad k \ge 2. \tag{5.13}$$

Зауважимо, що має місце $f \in \mathbb{B}^{r+1} \Rightarrow f \in \mathbb{C}_\varphi^r$, причому

$$\omega_{1,r}^\varphi\left(f^{(r)}, t\right) \le c_6(r)t\left\|\varphi^{r+1}\left(f^{(r+1)}\right)\right\|, \quad r \ge 0, \tag{5.14}$$

$$\omega_{2,r-1}^\varphi\left(f^{(r-1)}, t\right) \le c_7(r)t^2\left\|\varphi^{r+1}\left(f^{(r+1)}\right)\right\|, \quad r \ge 1. \tag{5.15}$$

Спочатку розглянемо випадок $s \ge 2$. Теорема 5 стверджує, що для $2 \le r \le 2s$, за винятком випадку $s = 2$, $r = 3$, існує функція $g = g_{s,r,n,B} \in \mathbb{B}^r \cap \Delta^{(0)}(Y)$ така, що $\left\|\varphi^r g^{(r)}\right\| = 1$ і

$$E_n^{(0,s)}(g) \ge e_n^{(0,s)}(g) > B. \tag{5.16}$$

Нехай задано $A > 0$. Якщо $1 \le r < 2s$, за винятком випадків з $s = 2$, $r = 2$, то беремо $B := c_4(k, r)c_6(r)A$, $f = f_{s,r,k,n,A} := g_{s,r+1,n,B}$, де g — функція з теореми 5. Надалі будемо записувати просто f, параметри s, r, k будуть зрозумілі з контексту. З (5.12) і (5.14) отримуємо

$$\omega_{k,r}^\varphi\left(f^{(r)}, 1\right) \le c_4\,\omega_{1,r}^\varphi\left(f^{(r)}, 1\right) \le c_4c_6\left\|\varphi^{r+1}f^{(r+1)}\right\| = c_4c_6. \tag{5.17}$$

Об'єднуючи (5.16) і (5.17), маємо

$$e_n^{(0,s)}(f) = e_n^{(0,s)}(g_{s,r+1,n,B}) > B \ge \frac{B}{c_4c_6}\,\omega_{k,r}^\varphi\left(f^{(r)}, 1\right) = A\omega_{k,r}^\varphi\left(f^{(r)}, 1\right).$$

Тепер нехай $k \ge 2$ і або $r = 0$, або $r = 2$, $s = 2$. Тоді беремо $B = c_5(k, r)c_7(r+1)A$, $f = g_{s,r+2,n,B}$. З (5.13) і (5.15) одержуємо

$$\omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)},1\right) \le c_5\,\omega_{2,r}^{\varphi}\left(f^{(r)},1\right) \le c_5\,c_7\left\|\varphi^{r+2}f^{(r+2)}\right\| = c_5\,c_7.$$

Аналогічно попередньому

$$e_n^{(0,s)}(f) = e_n^{(0,s)}(g_{s,r+2,n,B}) > B \ge \frac{B}{c_5c_7}\,\omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)},1\right) = A\,\omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)},1\right).$$

Залишаються наступні випадки: $r = s = 2$, $k = 1$ і $r = 2s$. З огляду на (5.12) в останньому випадку достатньо побудувати функцію лише для $k = 1$. Отже, ми розглядатимемо лише $k = 1$. Виконується нерівність

$$\omega_{1,r}^{\varphi}\left(f^{(r)},1\right) \le 2\left\|\varphi^{r}f^{(r)}\right\|. \tag{5.18}$$

Для випадку $r = s = 2$ ми розглядаємо функцію $g(x) := -\frac{1}{4}(x+1)\ln(x+1)$. Нехай $M := \|g\|$. Вибираємо $x_0 \in (-1, -0{,}8)$ з умови

$$-\ln(x_0+1) > 8n^2\left(A + M + \frac{1}{4}\right). \tag{5.19}$$

Позначимо через $T_2(x)$ многочлен Тейлора степеня 2 функції g в точці x_0 і покладемо

$$f(x) := \begin{cases} g(x) - T_2(x), & x \ge x_0, \\ 0, & x < x_0. \end{cases}$$

Очевидно, $f \in \mathbb{C}_{\varphi}^{2}$, $T_2''(x) \equiv g''(x_0)$. Отже, якщо ми покладемо $\tilde{f}(x) = f(x) + T_2(x)$, то за допомогою (5.18) отримаємо

$$\omega_{1,2}^{\varphi}(f'',1) = \omega_{1,2}^{\varphi}(\tilde{f}'',1) \le 2\left\|\varphi^2\tilde{f}''\right\| \le 2\left\|\varphi^2 g''\right\| = 1.$$

З іншого боку,

$$g(x) - T_2(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x-u)^2 g'''(u)\,du \ge 0, \quad -1 \le x \le 1. \tag{5.20}$$

Припустимо від супротивного, що існують набір $Y \in A_2(f)$, тобто $y_1, y_2\colon -1 < y_2 < y_1 \le x_0$, і многочлен $P_n \in \Delta^{(0)}(Y)$, який задовольняє

$$\|f - P_n\| \le A, \tag{5.21}$$

і розглянемо многочлен

$$F_n = P_n + T_2(x).$$

Зазначимо, що з урахуванням (5.21) для $x \in [x_0, 1]$

$$|g(x) - F_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \le A,$$

а для $x \in [-1, x_0)$

$$|F_n(x)| \le |P_n(x)| + |g(x) - T_2(x)| + |g(x)| \le$$

$$\le A + \frac{1}{2}\int_{-1}^{x_0}(1+u)^2 g'''(u)\,du + M \le A + M + \frac{1}{4}.$$

З останніх двох нерівностей маємо

$$|F_n(x)| \le A + M + \frac{1}{4},$$

а з нерівності Маркова —

$$\| F_n' \| \le n^2\left(A + M + \frac{1}{4}\right). \tag{5.22}$$

З іншого боку, для деякого $\theta \in (-1, x_0)$

$$[y_1, y_2; F_n] = T_2'(\theta) = g'(x_0) + (\theta - x_0)g''(x_0) \ge g'(x_0) \ge -\frac{1}{8}\ln(x_0 + 1), \tag{5.23}$$

що разом з (5.19) для деякого $\tau \in (-1, x_0)$ зумовлює

$$F_n'(\tau) \ge -\frac{1}{8}\ln(x_0 + 1) > n^2\left(A + M + \frac{1}{4}\right).$$

Остання нерівність суперечить (5.22). Отже, $\| f - P_n \| > A$. Відтак

$$e_n^{(0,2)}(f) > A \ge A\omega_{1,2}^{\varphi}(f'', 1).$$

Розгляд випадку $r = s = 2$ завершено.

Для випадку $r = 2s$ ми повинні модифікувати функцію g з теореми 5 для того, щоб f була не лише з $\mathbb{B}^r$, але насправді з $\mathbb{C}_\varphi^r$. Візьмемо $B := 4A$ і покладемо

$$g(x) := g_{s,r,n,B}(x) := -(1+x)^s \ln(1+x) - L_{s+1}(x),$$

де $L_{s+1}(x)$ — многочлен степеня $s+1$, який вибирається так, що $g \in \mathbb{B}^r \cap \cap \Delta^{(0)}(Y_s)$ і задовольняє умову теореми 5 з константою B. Зауважимо, що з (5.7) і (5.4) випливає

$$L_{s+1}(-1) = \Pi(-1)(1+x_0)^2\left[y_1, \ldots, y_s, x_0, x_0, -1; (1+\cdot)^s \ln(1+\cdot)\right] \ne 0.$$

Ми бачимо, що

$$g^{(r)}(x) = a_r(1+x)^{-s}, \tag{5.24}$$

де a_r — константа, яка залежить лише від r, і

$$g(-1) \ne 0. \tag{5.25}$$

Тепер нехай для кожного $0 < \varepsilon < 1$ $T_\varepsilon(x)$ — многочлен Тейлора степеня r в точці $-1+\varepsilon$ і

$$g_\varepsilon(x) := \begin{cases} g(x), & x \ge -1+\varepsilon, \\ T_\varepsilon(x) & \text{— у противному разі.} \end{cases}$$

Очевидно, $g_\varepsilon \in \mathbb{C}_\varphi^r$ і $\left\|\varphi^r g_\varepsilon^{(r)}\right\| \le \left\|\varphi^r g^{(r)}\right\| = 1$. Отже, з (5.18) маємо

$$\omega_{1,r}\left(g_\varepsilon^{(r)}, t\right) \le 2. \tag{5.26}$$

Оскільки

$$g(x) - T_\varepsilon(x) = \frac{1}{r!}\int_{-1+\varepsilon}^{x} (x-t)^r g^{(r+1)}(t)\,dt,$$

з (5.24) випливає, що для $x \in [-1, -1+\varepsilon]$

$$|g(x) - T_\varepsilon(x)| \le \frac{|a_r|}{r!}\int_{-1}^{-1+\varepsilon} (1+t)^r (1+t)^{-s-1}\,dt < c\varepsilon^{r-s} < c\varepsilon.$$

Таким чином, з огляду на (5.25) можна вибрати $\varepsilon_0 > 0$ так, що

$$\left\| g - g_{\varepsilon_0} \right\| < \frac{B}{2}$$

і $g_{\varepsilon 0}$ є копозитивною з g. Ми робимо висновок, що

$$e_n^{(0,s)}(g_{\varepsilon_0}) \geq e_n^{(0,s)}(g) - \left\| g - g_{\varepsilon_0} \right\| > B - \frac{B}{2} = 2A \geq A\omega_{1,r}^{\varphi}\left(g_{\varepsilon_0}^{(r)}, 1\right).$$

Залишається випадок $s = 1$. Достатньо розглянути підвипадок $r = 2$, $s = k = 1$. Міркування для нього аналогічні міркуванням для випадку $r = s = 2$, $k = 1$. А саме, g, x_0, T_2, P_n, F_n позначають те саме. Від супротивного припускаємо, що існують $Y \in \mathbf{Y}_1$: $y_1 \leq x_0$ і $P_n \in \Delta^{(0)}(Y)$ такий, що $\| f - P_n \| \leq A$. Доведення проводиться так само, лише замість (5.23) у випадку $y_1 \neq x_0$ записуємо

$$[y_1, x_0; F_n] = T_2'(x_0) + \frac{P_n(x_0)}{\pi(x_0)} \geq$$

$$\geq g'(x_0) + (\theta - x_0)g''(x_0) \geq g'(x_0) \geq -\frac{1}{8}\ln(x_0 + 1),$$

а у випадку $y_1 = x_0$

$$[x_0, x_0; F_n] = g'(x_0) + P_n'(x_0) \geq g'(x_0) \geq -\frac{1}{8}\ln(x_0 + 1).$$

Доведення завершено.

Можна поставити питання про характер залежності констант у теоремах 3 і 4 від Y. Як випливає з лем 3′, 4′, 7′, 9, 9′ і зауважень до них, у теоремі 4 для випадку $r > 0$ виконується $N(k, r, Y) = N\big(k, r, \min\{ y_i - y_{i+1}, i = \overline{0, s}\}\big)$, а для $r = 0$ — $N(k, Y) = N\big(k, \min\{ y_i - y_{i+1}, i = \overline{1, s-1}\}\big)$ (це встановлюється, як і в [2]). Як наслідок, нерівності теореми 3 отримуються для $r > 3$ з $N(r, Y) = N\big(r, \min\{ y_i - y_{i+1}, i = \overline{0, s}\}\big)$, а для $r \leq 3$ з $N(r, Y) = N\big(r, \min\{ y_i - y_{i+1}, i = \overline{1, s-1}\}\big)$. З доведення теорем 5 і 6 легко побачити, що залежність констант в теоремах 3 і 4 від довжини крайніх інтервалів (там, де вона має місце) є суттєвою.

6. Обернені теореми. У цьому пункті будемо використовувати позначення $E_n(f) := \inf\{\| f - P_n \| : P_n \in \mathcal{P}_n\}$ для величини найкращого наближення алгебраїчними многочленами без обмежень. Питання, на яке ми намагаємося відповісти в цьому пункті, полягає в наступному. Нехай $\alpha > 0$ і

$$E_n(f) \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall\, n > \alpha - 1,$$

де $1/0 := 1$. Чи є вірними наступні твердження:

$$E_n^{(0,s)}(f) < \frac{c(\alpha, s)}{n^\alpha} \quad \forall\, n > \alpha - 1, \tag{6.1}$$

або

$$E_n^{(0)}(f, Y) < \frac{c(\alpha, Y)}{n^\alpha}\left(\frac{c(\alpha, s)}{n^\alpha}\right) \quad \forall\, n > \alpha \quad (n > N(\alpha, Y))? \tag{6.2}$$

К. А. Копотун [6] довів справедливість (6.2) для $0 < \alpha < 3$ та поставив питання про його справедливість для інших α. Ми даємо ствердну відповідь на це питання, більш того, в деяких випадках встановлюється справедливість не тільки (6.2), але й (6.1). А саме, є справедливою така теорема.

Теорема 7. *Припустимо, що* $f \in \Delta^{(0,s)}$ *і або* $s = 1$, $\alpha \neq 2$, *або* $s = 2$, $\alpha \in (0, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$, *або* $s > 2$, $\alpha \in (0, 1) \cup (2s, +\infty)$. *Тоді якщо*

$$E_n(f) \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall\, n > \alpha - 1, \tag{6.3}$$

то

$$E_n^{(0,s)}(f) \leq \frac{C(\alpha, s)}{n^\alpha} \quad \forall\, n > \alpha - 1, \tag{6.4}$$

де $C(\alpha, s)$ *— константа, що залежить лише від* s *і* α.

Доведення. Якщо $0 < \alpha < 1$, то за допомогою оберненої теореми типу В. К. Дзядика маємо $\omega^\varphi(f, t) \leq c(\alpha, s) t^\alpha$, отже, за теоремою 2 отримуємо бажану оцінку. Якщо $s = 1$, $1 < \alpha < 2$, то з (6.3) отримуємо

$$E_n(f) \leq \frac{1}{n} \hat{\phi}\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

де $\hat{\phi}(t) = t^{\alpha - 1}$. Далі маємо $f \in \mathbb{C}_\varphi^1$ і $\omega_{1,1}(f', t) \leq c(\alpha) \hat{\phi}(t)$. І знову використовуємо теорему 2. Якщо $s = 1, 2$, $2 < \alpha < 3$, то з (6.3) отримуємо

$$E_n(f) \leq \frac{1}{n^2} \hat{\phi}\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq 2,$$

де $\hat{\phi}(t) = t^{\alpha - 1}$. Далі маємо $f \in \mathbb{C}_\varphi^2$ і $\omega_{1,2}(f'', t) \leq c(\alpha) \hat{\phi}(t)$. Тепер ми виводимо потрібне з твердження 1 замість теореми 2, оскільки $\hat{\phi} \in \Phi_*^k$. Далі, нехай $\alpha > 2s$. Тоді візьмемо $m = [\alpha] + 1$ і подібно до наведеного вище одержимо

$$E_n(f) \leq \frac{1}{n^{2s}} \hat{\phi}\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq m - 1,$$

де $\hat{\phi}(t) = t^{\alpha - 2s}$. Відтак $f \in \mathbb{C}_\varphi^{2s}$ і $\omega_{m-2s,2s}(f^{(2s)}, t) \leq c(\alpha, s) \hat{\phi}(t)$. Знову можемо використати твердження 1. Зрештою, якщо $\alpha = s = 1$, то на підставі відомої оберненої теореми $\omega_2^\varphi(f, t) \leq ct$. Потрібна оцінка виводиться при цьому з теореми 2.

Теорема 8. *Нехай* $f \in \Delta^{(0)}(Y)$, *де* $Y \in \mathbb{Y}_s$ *і* $\alpha > 0$. *Тоді якщо* (6.3) *виконується, то*

$$E_n^{(0)}(f, Y) < \frac{c(\alpha, Y)}{n^\alpha}\left(\frac{c(\alpha, s)}{n^\alpha}\right) \quad \forall\, n > \alpha - 1 \quad (n > N(\alpha, Y)). \tag{6.5}$$

Доведення. Випадок $0 < \alpha < 1$ досліджувався в теоремі 7. Якщо $\alpha > 1$, то візьмемо $m := [\alpha] + 1$. Зауважимо, що

$$E_n(f) \leq n^{-1} \hat{\phi}\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq m - 1,$$

де $\hat{\phi}(t) = t^{\alpha - 1}$. Відтак $f \in \mathbb{C}_\varphi^1$ і $\omega_{m-1,1}(f', t) \leq c(\alpha) \hat{\phi}(t)$, $\hat{\phi} \in \Phi^{m-1}$. Тепер можна застосувати твердження 2. Якщо $\alpha = 1$, то $\omega_2^\varphi(f, t) \leq ct$, і (6.5) випливає з твердження 3.

Для повноти можна зазначити, що висновки теореми 7 не можна поширити на будь-які інші пари α, s. Справді, нехай $s > 1$. Якщо $\alpha = 2$, то вибираємо $r = 2$, для $\alpha = 2s$ вибираємо $r = 2s$, і для всіх інших α, які не входять до умови теореми 7, вибираємо $r := [\alpha] + 1$. Для довільної функції $f \in \mathbb{B}^r$ з прямої теореми для наближення без обмежень (див. [1]) маємо

$$E_m(f) \le \frac{c_1}{m^r}\left\|\varphi^r f^{(r)}\right\| \quad \forall\, m \ge r-1,$$

де $c_1 = c_1(r)$. Для даних B, n покладаємо $A := Bc_1$ і беремо $g = g_{s,r,n,A}$, яка побудована в теоремі 5. Покладемо $f := \left(c_1\left\|\varphi^r g^{(r)}\right\|\right)^{-1} g$, тоді

$$E_m(f) \le \frac{1}{m^r} \le \frac{1}{m^\alpha} \quad \forall\, m \ge \alpha - 1$$

і $e_n^{(0,s)}(f) \ge \dfrac{A}{c_1} = B$. І, нарешті, у випадку $\alpha = 2$, $s = 1$ можна застосувати конструкції прикладу для $r = 2$, $k = s = 1$ з теореми 6. Легко переконатися, що для функції виконуються (6.3) і (6.5) з $\alpha = 2$, але не виконується (6.4). Деталі можна легко відновити, дотримуючись також [11] (приклад 0.2).

Автор висловлює подяку проф. І. О. Шевчуку за постановку більшості питань, що є предметом розгляду в цій роботі, та увагу до неї.

1. *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of smoothness. – New York: Springer, 1987.
2. *Smazhenko I. V.* On the degree of copositive approximation // J. Concr. and Appl. Math. – 2004.
3. *Zhou S. P.* A counterexample in copositive approximation // Isr. J. Math. – 1992. – **78**. – P. 75 – 83.
4. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992.
5. *Leviatan D.* Monotone and comonotone approximation revisited // J. Approxim. Theory. – 1988. – **53**. – P. 1 – 16.
6. *Kopotun K. A.* On copositive approximation by algebraic polynomials // Analysis Math. – 1995. – **21**. – P. 269 – 283.
7. *Hu Y. K., Kopotun K. A., Yu X. M.* Constrained approximation in Sobolev spaces // Can. J. Math. – 1997. – **49**. – P. 74 – 99.
8. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* Some positive results and counterexamples in comonotone approximation // J. Approxim. Theory. – 1997. – **89**. – P. 279 – 288.
9. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* Some positive results and counterexamples in comonotone approximation, II // Ibid. – 1999. – **100**. – P. 113 – 143.
10. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* More on comonotone polynomial approximation // Constr. Approxim. – 2000. – **16**. – P. 475 – 486.
11. *Гилевич Я., Шевчук И. А.* Комонотонное приближение // Фундам. и прикл. математика. – 1996. – **2**. – С. 319 – 363.

Одержано 29.12.2003