УДК 517.5

В. И. Рукасов, Е. С. Силин (Славян. пед. ун-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НЕБОЛЬШОЙ ГЛАДКОСТИ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

We study some problems of the approximation of continuous functions defined on the real line. As approximating aggregates, we use the de la Vallée Poussin operators. We establish asymptotic equalities for upper bounds of deviations of the de la Vallée Poussin operators from functions of small smoothness belonging to the classes $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

Вивчаются деякі питання наближення неперервних функцій, визначених на дійсній осі. В якості наближуючих агрегатів використовуються оператори Валле Пуссена. Встановлюються асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень операторів Валле Пуссена від функцій малої гладкості класів $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

В работе [1] введены классы $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ следующим образом. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество выпуклых вниз при всех $v \geq 1$ функций $\psi(v)$ таких, что $\lim_{v\to\infty}\psi(v) = 0$. Каждую функцию $\psi \in \mathfrak{M}$ доопределим на $[0;1)$ так, чтобы полученная функция (которую, по-прежнему, обозначаем $\psi(\cdot)$) была непрерывна для любого $v \geq 0$, $\psi(0) = 0$ и ее производная $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ имела ограниченную вариацию на промежутке $[0;\infty)$. Тогда $\mathfrak{A}$ обозначает множество таких функций. Подмножество функций ψ, для которых

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt < \infty,$$

обозначим $\mathfrak{A}'$.

Пусть $\psi_k \in \mathfrak{A}$, $k = 1, 2$, тогда ψ_{k+} и ψ_{k-} — соответственно четное и нечетное продолжение функции ψ_k, $k = 1, 2$. Для пары (ψ_1, ψ_2) определим функцию $\overline{\psi}$:

$$\overline{\psi} \overset{\text{df}}{=} \psi_{1+} + i\psi_{2-}. \tag{1}$$

При этом соответствующее преобразование Фурье функции $\overline{\psi}$ имеет вид $\hat{\overline{\psi}} = \hat{\psi}_{1+} + i\,\hat{\psi}_{2-}$, где преобразование Фурье понимается в обычном смысле:

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_R h(x)e^{-ixt}\,dx.$$

Далее, пусть $\hat{L}$ — множество функций f, заданных на действительной оси R и имеющих конечную норму

$$\|f\| = \sup_{a\in R}\int_a^{a+2\pi}|f(t)|dt.$$

Через $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ обозначим подмножество непрерывных функций $f \in \hat{L}$, представимых равенством

$$f(x) = A_0 + \int_R \varphi(x+t)\hat{\overline{\psi}}(t)\,dt \overset{\text{df}}{=} A_0 + \varphi * \hat{\overline{\psi}}, \tag{2}$$

в котором A_0 — некоторая постоянная, интеграл понимается как предел по расширяющимся симметричным промежуткам, $\varphi \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset \hat{L}$. Следуя

А. И. Степанцу [2], функцию $\varphi(\cdot)$ в (2) называют $\overline{\psi}$-производной функции $f(\cdot)$ и обозначают $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

Для приближения функций $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ будем использовать операторы вида

$$V_{\sigma,c} = V_{\sigma,c}(f, x, \Lambda_{\sigma,c}) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,c}\overline{\psi}},$$

где

$$\lambda_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le |t| \le c, \\ \dfrac{\sigma - |t|}{\sigma - c}, & c \le |t| \le \sigma, \\ 0, & \sigma \le |t|. \end{cases}$$

Такие операторы рассматривались А. И. Степанцом в работах [1 – 4].

Обозначим

$$\rho_{\sigma,c}(f; x) \overset{\text{df}}{=} f(x) - V_{\sigma,c}(f; x), \quad \sigma > 0, \quad c > 0.$$

Целью работы является изучение асимптотического поведения при $\sigma \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}; V_{\sigma,c}\right) = \sup_{f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} \left\| \rho_{\sigma,c}(f; \cdot) \right\|_{\hat{C}}, \tag{3}$$

где в качестве множества $\mathfrak{N}$ используют единичный шар S_M пространства существенно ограниченных функций M (в этом случае $\hat{C}^{\overline{\psi}}M = \hat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}$), а также классы H_ω: $H_\omega = \left\{ \varphi \in \hat{C}\colon \omega(\varphi; t) \le \omega(t) \right\}$, где $\hat{C}$ — подмножество непрерывных функций из $\hat{L}$, $\omega(\varphi; t)$ — модуль непрерывности функции $\varphi(\cdot)$, $\omega(t)$ — фиксированный модуль непрерывности (в этом случае $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N} = \hat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega$).

Аппроксимационные свойства операторов $V_{\sigma,c}$ при $c = \sigma - 1$ исследованы А. И. Степанцом в работах [1 – 5], при $0 < c \le \sigma - 1$ — одним из авторов данной статьи [6, 7]. В периодическом случае аналогичная задача для сумм Фурье решена в [8, 9], для сумм Валле Пуссена — в [10, 11].

Наряду с операторами $V_{\sigma,c}(f; x)$ в работе [1] введены операторы вида

$$V^*_{\sigma,c}(f) = V^*_{\sigma,c}(f, x, \Lambda^*_{\sigma,c}) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda^*_{\sigma,c}\overline{\psi}},$$

где

$$\lambda^*_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} \lambda_{\sigma,c}, & |t| \in [0, c] \cup [\sigma, \infty], \\ 1 - \dfrac{|t| - c}{\sigma - c} \dfrac{\overline{\psi}(\sigma \operatorname{sign}(t))}{\overline{\psi}(t)}, & c \le |t| \le \sigma. \end{cases} \tag{4}$$

Следуя [2], из множества $\mathfrak{A}$ выделим подмножества $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_C$. Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ сопоставим функции $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$ и $\mu(t) = t/(\eta(t) - t)$, $t \ge 1$. Тогда $\mathfrak{M}_0 = \{ \psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < \mu(\psi, t) < K_1 \}$, $\mathfrak{M}_C = \{ \psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < K_2 \le \mu(\psi, t) \le \le K_3 \}$, $K_i = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$. Полагают $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}_C = = \mathfrak{M}_C \cap \mathfrak{A}$.

Сформулируем основное утверждение этой работы.

Теорема. *Пусть* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$ *и* $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$. *Тогда для любых* σ *и* $h = h(\sigma)$, $\sigma > h \ge 1$, *при* $\sigma \to \infty$

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}; V_{\sigma,\sigma-h}\right) = \frac{2}{\pi} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi_2(t)}{t} dt + \frac{4}{\pi^2} |\overline{\psi}(\sigma)| \ln \frac{\sigma}{h} + O(1) A(\psi_k, \sigma, h), \tag{5}$$

$$\mathscr{E}\left(\hat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega; V_{\sigma,\sigma-h}\right) =$$

$$= \Theta_\omega\left(\frac{1}{\pi}\int_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\int_1^\infty \psi_2(\sigma s)\sin st\,ds\,dt + \frac{2|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}\ln\frac{\sigma}{h}\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt\right) +$$

$$+ O(1)A(\psi_k,\sigma,h)\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right), \tag{6}$$

где

$$A(\psi_k,\sigma,h) = \sum_{k=1}^{2}\left(\psi_k(\sigma-h)-\psi_k(\sigma)\right) + |\overline{\psi}(\sigma)|, \qquad \Theta_\omega \in [2/3;1],$$

причем $\Theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности, и* $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* σ *и* h.

Доказательство. Пусть $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, тогда для величины $\rho_{\sigma,c}(f,x)$ имеет место равенство

$$\rho_{\sigma,c}(f,x) = \int_R f^{\overline{\psi}}(x+t)\widehat{\tau^*_{\sigma,c}(t)}dt + \int_R f^{\overline{\psi}}(x+t)\hat{d}_{\sigma,c}(t)dt,$$

где $\tau^*_{\sigma,c}(t) = \left(1-\lambda^*_{\sigma,c}(t)\right)\overline{\psi}(t)$,

$$\hat{d}_{\sigma,c}(t) = \frac{1}{2(\sigma-c)\pi}\int_c^\sigma (s-c)\left[(\psi(s)-\psi(\sigma))e^{-ist} + (\psi(-s)-\psi(-\sigma))e^{ist}\right]dt.$$

Упростим его, выделив главные части и оценив остатки. Рассуждая по схеме, изложенной в работе [12, с. 218 – 235], используя результаты работы [7] и полагая $c = \sigma - h$, $a \in (0; \pi\sigma/h)$, получаем

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f,x) = -\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int_{a/\sigma\le|t|\le\pi/h}\delta(x+t)\frac{\sin\sigma t}{t}dt +$$

$$+ \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int_{a/\sigma\le|t|\le\pi/h}\delta(x+t)\frac{\cos\sigma t}{t}dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{|t|\le a/\sigma}\delta(x+t)\int_\sigma^\infty \psi_2(s)\sin st\,ds\,dt + O(1)A(\psi_k,\sigma,h)\zeta(\mathfrak{N}),$$

где

$$\delta(x+t) = \begin{cases} f^{\overline{\psi}}(x) - f^{\overline{\psi}}(x+t), & \text{если } f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega, \\ f^{\overline{\psi}}(x+t), & \text{если } f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}_\infty, \end{cases}$$

$$\zeta(\mathfrak{N}) = \begin{cases} \omega\left(\dfrac{1}{\sigma-h}\right), & \text{если } f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega, \\ 1, & \text{если } f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}_\infty. \end{cases}$$

Используя равенство $a\sin\alpha - b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\gamma-\alpha)$, $\gamma = \operatorname{arctg}(b/a)$, находим

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f,x) = -\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int_{a/\sigma\le|t|\le\pi/h}\delta(x+t)\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{t}dt +$$

$$+\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/\sigma}\delta(x+t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds\,dt\ +\ O(1)A(\psi_k,\sigma,h)\zeta(\mathfrak{N}),$$

где $\gamma_\sigma = \operatorname{arctg}\big(\psi_2(\sigma)/\psi_1(\sigma)\big)$.

Найдем верхние грани $\mathscr{E}\big(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N};V_{\sigma,\sigma-h}\big)$.

Пусть [12, с. 232] $x_k = (k\pi+\gamma_\sigma)/\sigma$, $t_k = x_k - \pi/2\sigma$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \sigma\in R$; k_0 — такое значение k, для которого t_{k_0} — ближайшая справа от точки $(a+{}$ ${}+\pi)/\sigma$ точка, в которой $\sin(\sigma t-\gamma_\sigma) = 1$, а k_1 — наибольшее из значений k таких, что $t_k < \pi/h$; k_2 — такое число, что t_{k_2} — ближайшая слева от точки $-(a+\pi)/\sigma$ точка среди тех, в которых $\sin(\sigma t-\gamma_\sigma) = -1$, а k_3 — наименьшее из значений таких, что $t_k > -\pi/h$. Определим функцию $l_\sigma(t)$ посредством равенств $l_\sigma(t) = x_k$, $t\in[t_k, t_{k+1}]$, $k = k_0,\ldots,k_1-1$, $k = k_3, k_3+1,\ldots,k_2-1$, $i_{3,1} ={}$ ${}= [t_3, t_2]\cup[t_0, t_1]$.

Учитывая инвариантность классов $\hat{C}^{\Psi}\mathfrak{N}$ относительно сдвига аргумента, находим

$$\mathscr{E}\big(\hat{C}_\infty^{\overline{\psi}};V_{\sigma,\sigma-h}\big)\ \le\ \int\limits_{|t|\le a/\sigma}\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds\right|dt\ +$$

$$+\ \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}\left|\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_\sigma(t)}\right|dt\ +\ O(1)A(\psi_k,\sigma,h). \tag{7}$$

Следуя рассуждениям из работы [12, с. 236], убеждаемся, что для функции $\varphi^*(t)$, совпадающей на множестве $[-a/\sigma; a/\sigma]\cup i_{3,1}$ с функцией $\varphi_\sigma(t)$, где

$$\varphi_\sigma(t)\ =\ \begin{cases}\operatorname{sign}\displaystyle\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds, & |t|\le\dfrac{a}{\sigma},\\ \operatorname{sign}\dfrac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_\sigma(t)}, & t\in i_{3,1},\end{cases}$$

соотношение (7) обратится в равенство.

Для завершения доказательства формулы (5) остается убедиться, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/\sigma}\left|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds\right|dt\ =\ \frac{2}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt\ +\ O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|,$$

$$\int\limits_{i_{3,1}}\left|\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_\sigma(t)}\right|dt\ =\ \frac{4}{\pi}\ln\frac{\sigma}{h}\ +\ O(1).$$

Для этого воспользуемся соотношениями (5.5.4) и (5.5.5) из [12, с. 236], при доказательстве которых периодичность функции $f(t)$ и включение $\sigma\in N$, по существу, не использовались.

Докажем теперь формулу (6). Пусть $f\in\hat{C}^{\Psi}H_\omega$, тогда, учитывая определение функции $l_\sigma(t)$, находим

$$\mathscr{E}\big(\hat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega, V_{\sigma,\sigma-h}\big)\ \le\ \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\left[\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}\sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)\,dt\right|\ +\right.$$

$$\left.+\ \sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)\,dt\right|\right]\ +$$

$$+\ \frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in H_\omega}\int\limits_{|t|\le a/\sigma}(\varphi(t)-\varphi(0))\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds\,dt\ +\ A(\psi_k,\sigma,h).$$

В [12, с. 239, 240] были получены неравенства (5.5.16) и (5.5.17), при этом, по сути, не использовалось то, что $n\in N$ и φ — периодическая функция. Поэтому

$$\mathscr{E}\left(\hat C^{\overline\psi}H_\omega;V_{\sigma,\sigma-h}\right)\ \le\ \frac{|\overline\psi(\sigma)|}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2\sigma}\omega(2t)\sin\sigma t\,dt\left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}-\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\right)+$$

$$+\ \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^{a/\sigma}\omega(2t)\int\limits_\sigma^\infty\psi_2(s)\sin st\,ds\,dt\right|\ +\ A(\psi_k,\sigma,h). \qquad (8)$$

Чтобы построить функцию $f^*\in\hat C^{\overline\psi}H_\omega$, для которой значение $\rho_{\sigma,h}(f;x)$ совпадает с правой частью (8), будем рассуждать по аналогии с [12, с. 240; 241]. Положим

$$\varphi_k(t)\ =\ \begin{cases}\frac{1}{2}\omega(2(x_k-t)), & t\in[\,t_k;x_k\,],\\ -\frac{1}{2}\omega(2(t-x_k)), & t\in[\,x_k;t_{k+1}\,],\end{cases}\qquad k\ =\ \overline{k_3,k_2-1},\quad k\ =\ \overline{k_0,k_1-1},$$

$$\varphi_+(t)\ =\ (-1)^{k-k_0}\varphi_k(t)\ -\ \frac{1}{2}\left(\omega\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)-\omega\left(\frac{2a}{\sigma}\right)\right),\qquad t\in[\,t_k;t_{k+1}\,],\quad k\ =\ \overline{k_0,k_1-1},$$

$$\varphi_-(t)\ =\ (-1)^{k-k_2+1}\varphi_k(t)\ +\ \frac{1}{2}\left(\omega\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)-\omega\left(\frac{2a}{\sigma}\right)\right),\quad t\in[\,t_k;t_{k+1}\,],\quad k\ =\ \overline{k_3,k_2-1},$$

$$\hat\varphi(t)\ =\ \begin{cases}\frac{1}{2}\omega(2|t|), & |t|\le a/\sigma,\\ \frac{1}{2}\omega(2a/\sigma), & t\in\left[\,a/\sigma;t_{k_0}\,\right],\\ \varphi_+(t), & t\in\left[\,t_{k_0};t_{k_1}\,\right],\\ -\frac{1}{2}\omega(2a/\sigma), & t\in\left[\,t_{k_2};-a/\sigma\,\right],\\ \varphi_-(t), & t\in\left[\,t_{k_3};t_{k_2}\,\right],\\ 0 & \text{для остальных } t.\end{cases}$$

Функция f^*, $\overline\psi$-производная которой совпадает с функцией $\hat\varphi(t)$, является искомой экстремальной функцией, поскольку если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, то $\hat\varphi(t)\in H_\omega$ и, как показывают непосредственные подсчеты, для функции f^* соотношение (8) становится равенством. Если же $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности, то соотношение (8) будет равенством с некоторым множителем $\Theta_\omega\in[\,2/3;1\,]$.

Убеждаясь в том, что

$$\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}\ +\ \sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\ =\ \frac{4}{\pi}\ln\frac{\sigma}{h}\ +\ O(1),$$

завершаем доказательство соотношения (6).

Следствие. *Пусть* $\psi_1\in\mathfrak{A}_0$, $\psi_2\in\mathfrak{A}_C$ *и* $\lim_{\sigma\to\infty}h/\sigma=0$. *Тогда для любых* σ *и* $h=h(\sigma)$, $\sigma>h\ge1$, *при* $\sigma\to\infty$ *выполняются асимптотические равенства*

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}_{\infty}^{\overline{\psi}}; V_{\sigma,\sigma-h}\right) = \frac{4}{\pi^2}|\overline{\psi}(\sigma)|\ln\frac{\sigma}{h} + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|, \tag{9}$$

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\overline{\psi}}H_{\omega}; V_{\sigma,\sigma-h}\right) = \frac{2\Theta_{\omega}|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}\ln\frac{\sigma}{h}\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

дающие решение задачи Колмогорова – Никольского (*см.* [8]) *для операторов Валле Пуссена на классах* $\hat{C}_{\infty}^{\overline{\psi}}$ *и* $\hat{C}^{\overline{\psi}}H_{\omega}$ *соответственно.*

Заметим, что если $\psi_1 \in \mathfrak{A}_C$, то равенство (9) совпадает с результатом теоремы 2 [14].

1. *Stepanets A. I., Wang Kunyang, Zhang Xirong.* Approximation of locally integrable function on the real line // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1549 – 1561.
2. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Там же. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
3. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же. – № 2. – С. 210 – 222.
4. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Там же. – 1988. – **40**, № 2. – С. 198 – 209.
5. *Степанец А. И.* Приближение в пространствах локально интегрируемых функций // Там же. – 1994. – **46**, № 5. – С. 597 – 625.
6. *Рукасов В. И.* Приближение операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси // Там же. – 1992. – **44**, № 5. – С. 682 – 691.
7. *Рукасов В. И.* Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена // Там же. – 2003. – **55**, № 3. – С. 414 – 424.
8. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
9. *Степанец А. И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 3. – С. 388 – 400.
10. *Рукасов В. И., Новиков О. А., Чайченко С. О.* Приближение классов периодических функций с малой гладкостью суммами Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **35**. – С. 119 – 133.
11. *Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Валле Пуссена (небольшая гладкость) // Там же. – С. 134 – 150.
12. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 1. – 426 с.
13. *Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближение классов $C^{\psi}H_{\omega}$ суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 681 – 691.
14. *Рукасов В. И., Силин Е. С.* Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 192 – 208.

Получено 12.02.2004