УДК 517.5

В. Ф. Бабенко
(Днепропетров. нац. ун-т, Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
В. Г. Доронин (Днепропетров. нац. ун-т),
А. А. Лигун
(Днепродзержин. техн. ун-т, Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
А. А. Шумейко (Днепродзержин. техн. ун-т)

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ДЖЕКСОНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА СФЕРЕ

We obtain exact estimates of the approximation in the metrics C and L_2 of functions, that are defined on a sphere, by means of linear methods of summation of the Fourier series in spherical harmonics in the case where differential and difference properties of functions are defined in the space L_2.

Отримано точні оцінки наближення в метриках C і L_2 функцій, заданих на сфері, лінійними методами підсумовування рядів Фур'є за сферичними гармоніками у випадку, коли диференційовні і різницеві властивості функцій визначаються у просторі L_2.

1. Введение. Пусть L_p, $p \in [1, \infty)$, и C — пространства 2π-периодических функций $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами. Если X есть L_p или C, то через X^r, $r \in \mathbb{N}$, будем обозначать множество функций $f \in X$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$ и таких, что $f^{(r)} \in X$. Модулем непрерывности порядка m функции $f \in X$ называют функцию

$$\omega_m(f, h)_X = \sup_{|t|<h} \left\| \Delta_t^m f(\cdot) \right\|_X,$$

где

$$\Delta_h^m f(\cdot) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(\cdot + jh).$$

Вместо $\omega_1(f, h)_X$ будем писать $\omega(f, h)_X$.

Пусть $\mathcal{T}_N$ — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше N. Через $E_N(f)_X$ обозначим наилучшее приближение функции f множеством $\mathcal{T}_N$ в пространстве X, т. е.

$$E_N(f)_X = \inf_{T \in \mathcal{T}_N} \| f - T \|_X.$$

В теории приближений хорошо известны восходящие к Джексону [1] и С. Б. Стечкину [2] неравенства для наилучших приближений функций $f \in X^r$ вида

$$E_N(f)_X \le \frac{J_{r,m}}{(N+1)^r} \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{1}{N+1} \right)_X \tag{1.1}$$

с независящей от f и N константой $J_{r,m}$.

В 1962 г. Н. П. Корнейчуком [3] было получено первое точное неравенство типа Джексона, т. е. неравенство (1.1) с наименьшей возможной константой.

Им было доказано, что для любой функции $f \in C$ и любого натурального N имеют место неравенства

$$1 - \frac{1}{2(N+1)} \le \sup_{\substack{f \in C \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_N(f)_C}{\omega\left(f, \dfrac{\pi}{N+1}\right)_C} \le 1.$$

Им же позднее (см. [4]) было доказано, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{k+1}{2}\left(1 - \frac{1}{2(N+1)}\right) \le \sup_{\substack{f \in C \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_N(f)_C}{\omega\left(f, \dfrac{\pi}{k(N+1)}\right)_C} \le 1.$$

Точные неравенства типа (1.1) при $r \in \mathbb{N}$ и $m = 1$ были получены В. В. Жуком [5] для $r = 1$ и А. А. Лигуном [6, 7] для $r > 1$. Полученные оценки имеют вид

$$E_N(f)_C \le \frac{K_r}{2(N+1)^r}\,\omega\left(f^{(r)}, \frac{\delta}{N+1}\right)_C,$$

где $K_r = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$ — константы Фавара, $\delta \ge \pi$, если r нечетное, и $\delta \ge 2\pi$, если r четное. Для нечетных r аналогичные результаты получены [6] и в пространстве L_1.

В. В. Жуком [8] (оценка сверху) и В. В. Шалаевым [9] (оценка снизу) было доказано неулучшаемое неравенство типа (1.1) при $r = 0$ и $m = 2$.

Кроме того, известен (см., например, комментарии к гл. 6 в [10]) ряд результатов о точных неравенствах типа Джексона для приближения периодических функций линейными методами.

Первые точные неравенства типа Джексона для $X = L_2$ были получены Н. И. Черных. В [11] он доказал, что при всех $\delta \ge \pi$ и $N = 1, 2, \ldots$ выполняется точное неравенство

$$E_N(f)_2 \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(f, \frac{\delta}{N+1}\right)_{L_2}. \tag{1.2}$$

Попутно было получено точное неравенство

$$E_N(f)_2 \le \frac{1}{2}\left((N+1)\int\limits_0^{\pi/(N+1)} \omega^2(f,\delta)_{L_2}\sin(N+1)t\,dt\right)^{1/2}, \tag{1.3}$$

представляющее и самостоятельный интерес.

В работе [12] получен аналог (1.2) для m-го модуля гладкости:

$$E_N(f)_2 \le \frac{1}{\sqrt{\dbinom{2m}{m}}}\,\omega_m\left(f, \frac{\delta}{N+1}\right)_{L_2}, \quad \delta \ge 2\pi. \tag{1.4}$$

В дальнейшем ряд работ был посвящен получению неулучшаемых неравенств типа (1.2) и (1.4) для меньших значений δ. Так, А. Г. Бабенко [13] были точно вычислены константы Джексона для $\delta = \dfrac{\pi}{(N+1)m}$ при $m \ge \dfrac{1+2(N+1)}{2}$.

Л. В. Тайковым [14] были найдены точные константы в неравенстве

$$E_N(f)_2 \le \mathcal{X}\left(\int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)}, t)_{L_2}\,dt\right)^{1/2}. \tag{1.5}$$

Ввиду неравенств (1.3) и (1.5) получение точных неравенств вида

$$E_N(f)_2 \le \mathcal{X}\left(\int_0^h \omega(f^{(r)}, t)_2 \theta(t)\, dt\right)^{1/2} \tag{1.6}$$

с различными весовыми функциями θ приобрело самостоятельный интерес и было продолжено во многих работах (см., например, [15, 16]).

Отметим еще работы [17 – 22], также посвященные неравенствам типа Джексона в пространстве L_2, и работу Н. И. Черных [23] о точных неравенствах типа Джексона в L_p, $1 \le p \le 2$.

Известен также ряд точных результатов, относящихся к неравенствам типа Джексона для функций многих переменных и являющихся многомерными аналогами описанных выше результатов для периодических функций одного переменного. В. А. Юдин [24] нашел точную константу в неравенстве Джексона для функций из $L_2(\mathbb{T}^n)$, заданных на торе $\mathbb{T}^n$, $n \ge 2$. Для наилучших равномерных приближений линейными методами функций, заданных на n-мерной сфере, точное неравенство типа Джексона получено В. В. Шалаевым [25]. В. В. Арестов и В. Ю. Попов [26] для $n = 2, 3$ и А. Г. Бабенко [27, 28] для $n \ge 4$ получили точное неравенство типа Джексона для функций из $L_2(S^n)$. Относительно других точных результатов в этом направлении см. [29 – 31].

Перейдем к изложению основных результатов данной работы.

2. Определения, обозначения, постановка задач. Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ и нормой $|x| := \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}$. Обозначим через $S^{n-1} = \{ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n; |\boldsymbol{u}| = 1\}$ единичную сферу в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле. Пусть $d\boldsymbol{u}$ — мера Хаара на S^{n-1}, инвариантная относительно группы вращений $SO(n)$ и нормированная так, чтобы

$$\int_{S^{n-1}} d\boldsymbol{u} = \sigma_{n-1} = \begin{cases} \dfrac{2^m \pi^{m-1}}{(2m-3)!!}, & n = 2m-1, \\ \dfrac{2\pi^m}{(m-1)!}, & n = 2m, \end{cases}$$

где σ_{n-1} — площадь поверхности сферы S^{n-1}.

Пусть $L_2(S^{n-1})$ — пространство всех комплексных функций f, измеримых на S^{n-1}, со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle := \left(\frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{S^{n-1}} f(\boldsymbol{u})\overline{g(\boldsymbol{u})}\, d\boldsymbol{u}\right)^{1/2}$$

и нормой

$$\|f\|_2 = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(\boldsymbol{u})|^2\, d\boldsymbol{u}\right)^{1/2}.$$

Будем также рассматривать пространство $L_\infty(S^{n-1})$ всех функций f, измеримых и существенно ограниченных на сфере S^{n-1}, с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}\left\{|f(\boldsymbol{u})| : \boldsymbol{u} \in S^{n-1}\right\}.$$

Функцию

$$\boldsymbol{u}^{\alpha} := \prod_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{u}_{\nu}^{\alpha_{\nu}}, \quad \alpha_{\nu} \in \mathbb{Z}_{+}, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu} = k,$$

называют алгебраическим мономом порядка k от n переменных.

Линейная комбинация мономов k-го порядка с комплексными коэффициентами называется однородным полиномом k-го порядка. Отметим, что для любого однородного полинома $P_k(\boldsymbol{u})$ k-го порядка выполняется соотношение

$$P_k(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda^k P_k(\boldsymbol{u}) \tag{2.1}$$

и тождество Эйлера: если $\nabla f(\boldsymbol{u})$ — градиент функции f в точке $\boldsymbol{u}$, то

$$(\nabla P_k(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = k P_k(\boldsymbol{u}). \tag{2.2}$$

Если однородный полином k-го порядка $P_k(\boldsymbol{u})$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta H_k(\boldsymbol{u}) = 0,$$

то он называется n-мерным гармоническим однородным полиномом k-го порядка.

Множество сужений на S^{n-1} всех гармонических однородных полиномов $P_k(\boldsymbol{u})$ порядка k (множество сферических гармоник порядка k) образует пространство $\mathbb{H}_k$ размерности

$$a_k = \binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k-3}{k-2}.$$

Через $H_{k,j}(\boldsymbol{u})$, $1 \le j \le a_k$, будем обозначать элементы ортонормированного базиса в $\mathbb{H}_k$. Любая функция $f \in L_2(S^{n-1})$ однозначно представима в виде суммы сходящегося в $L_2(S^{n-1})$ ряда

$$f(\boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j} H_{k,j}(\boldsymbol{u}), \tag{2.3}$$

где

$$c_{k,j} = c_{k,j}(f) = \int_{S^{n-1}} f(\boldsymbol{u}) H_{k,j}(\boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u}$$

— коэффициенты Фурье функции $f(\boldsymbol{u})$. Подробнее о сферических гармониках см., например, [32] (гл. 4).

В случае приближения функций, заданных на S^{n-1}, в $L_2(S^{n-1})$ сферическими гармониками естественным аппаратом приближения являются суммы Фурье

$$S_N(f, \boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j} H_{k,j}(\boldsymbol{u}). \tag{2.4}$$

Вместе с тем, имея в виду, в частности, аппроксимацию не только в $L_2(S^{n-1})$, но и в $L_\infty(S^{n-1})$, будем рассматривать также линейные методы приближения вида

$$S_N^M(f, \boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{N} \mu_k \sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j} H_{k,j}(\boldsymbol{u}), \tag{2.5}$$

где $M = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность комплексных чисел (ниже через I обозначается последовательность вида $\{1, 1, \ldots\}$).

Для $p = 2$ или $p = \infty$ положим

$$E_N^M(f)_p = \left\| f - S_N^M(f) \right\|_p.$$

Ясно, что

$$E_N(f)_p = E_N^I(f)_p$$

— наилучшее приближение функции f в $L_p\left(S^{n-1}\right)$ сферическими полиномами порядка не выше N.

Дифференциальные свойства функций, заданных на S^{n-1}, будем характеризовать следующим образом. Будем говорить, что $f \in L_2^r\left(S^{n-1}\right)$ для заданного $r \in \mathbb{R}_+$, если

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_{k,j} \right|^2 k^{2r} < \infty$$

(здесь и ниже мы полагаем, что $k^{2r} := 1$, если $k = 0$ и $r = 0$). Если $f \in$ $\in L_2^r\left(S^{n-1}\right)$, то в пространстве $L_2\left(S^{n-1}\right)$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j} k^r H_{k,j}(\boldsymbol{u})$$

сходится. Сумму этого ряда будем называть производной порядка r от функции f и обозначать через $f^{(r)}$. Отметим, что если $r \in \mathbb{N}$ и в окрестности сферы функция достаточно гладкая, то ввиду тождества Эйлера (2.2) эту производную можно определить следующим образом. Пусть $\nabla f(\boldsymbol{u})$ — градиент функции f в точке $\boldsymbol{u}$. Положим

$$f^{(1)}(\boldsymbol{u}) = (\nabla f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})$$

и для $r = 2, 3, \ldots$

$$f^{(r)}(\boldsymbol{u}) = \left(f^{(r-1)}(\boldsymbol{u})\right)^{(1)}.$$

Разностные свойства функций, заданных на S^{n-1}, будем характеризовать следующим образом. Для $\lambda \in (0, 1)$ положим

$$f(\boldsymbol{u}; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j} H_{k,j}(\lambda \boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j} H_{k,j}(\boldsymbol{u}).$$

Для $f \in L_2\left(S^{n-1}\right)$ определим разность порядка m с шагом λ соотношением

$$\Delta_\lambda^m f(\boldsymbol{u}) = \sum_{l=0}^{m} (-1)^{m-l} \binom{m}{l} f(u; \lambda^l).$$

В данной работе нас будут интересовать при $p = 2$ и $p = \infty$ оценки величин $E_N^M(f)_p$ в терминах величин $\left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2$, точнее, при $p = 2$ неулучшаемые неравенства вида

$$E_N^M(f)_2^2 \le J_N(M, \theta, m, r, h) \int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda$$

и

$$E_N^M(f)_2^2 \ \le \ \tilde{J}_N(M, m, r, h) \left\| \Delta_h^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2,$$

а при $p = \infty$ неулучшаемые неравенства вида

$$E_N^M(f)_\infty \ \le \ D_N(M, \theta, m, r, h) \left(\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda \right)^{1/2}$$

и

$$E_N^M(f)_\infty \ \le \ \tilde{D}_N(M, m, r, h) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2.$$

3. Случай $p = 2$. Для сокращения записей положим

$$J_N^1(M, \theta, m, r, h) \ = \ \max_{k \le N} \frac{|1 - \mu_k|^2}{\int_h^1 (1 - \lambda^k)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda) d\lambda},$$

$$J_N^2(M, \theta, m, r, h) \ = \ \sup_{k > N} \frac{1}{\int_h^1 (1 - \lambda^k)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda) d\lambda}. \tag{3.1}$$

Ясно, что для любой ненулевой неотрицательной на $[h, 1]$ суммируемой функции $\theta(t)$ $\left(\theta \in L_1[h, 1]\right)$

$$J_N^2(M, \theta, m, r, h) \ = \ \frac{1}{\int_h^1 \left(1 - \lambda^{N+1}\right)^{2m} (N+1)^{2r} \theta(t) dt} \tag{3.2}$$

и

$$J_N(M, \theta, m, r, h) \ = \ \max\left\{ J_N^1(M, \theta, m, r, h),\ J_N^2(M, \theta, m, r, h) \right\}. \tag{3.3}$$

Пусть также

$$\tilde{J}_N^1(M, m, r, h) \ = \ \max_{k \le N} \frac{|1 - \mu_k|^2}{k^{2r} (1 - h^k)^{2m}},$$

$$\tilde{J}_N^2(M, m, r, h) \ = \ \frac{1}{(N+1)^{2r} \left(1 - h^{N+1}\right)^{2m}}$$

и

$$\tilde{J}_N(M, m, r, h) \ = \ \max\left\{ \tilde{J}_N^1(M, m, r, h),\ \tilde{J}_N^2(M, m, r, h) \right\}.$$

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in L_2^r\left(S^{n-1}\right)$, *любой последовательности* $M = \{\mu_k\}$, *любого* $h \in (0, 1)$ *и любой ненулевой, неотрицательной суммируемой функции* $\theta \in L_1[h, 1]$ *при всех* $N, m = 1, 2, \ldots$ *и при каждом* $r \in \mathbb{R}_+$ *выполняется неравенство*

$$E_N^M(f)_2^2 \ \le \ J_N(M, \theta, m, r, h) \int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda. \tag{3.4}$$

При этом

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r\left(S^{n-1}\right) \\ f \ne \mathrm{const}}} \frac{E_N^M(f)_2^2}{\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda} \ = \ J_N(M, \theta, m, r, h), \tag{3.5}$$

т. е. неравенство (3.4) *неулучшаемо.*

Для любой функции $f \in L_2^r\left(S^{n-1}\right)$, *любой последовательности* $M = \{\mu_k\}$, *любого* $h \in (0,1)$ *при всех* $N, m = 1, 2, \ldots$ *и при каждом* $r \in \mathbb{R}_+$ *имеет место неравенство*

$$E_N^M(f)_2^2 \;\le\; \tilde{J}_N(M, m, r, h)\left\|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\right\|_2^2. \tag{3.6}$$

При этом

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r(S^{n-1})\\ f \ne \mathrm{const}}} \frac{E_N^M(f)_2^2}{\left\|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\right\|_2^2} \;=\; \tilde{J}_N(M, \theta, m, r, h). \tag{3.7}$$

Доказательство. Отметим, что

$$\left\|\Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot)\right\|_2^2 \;=\; \left\|\sum_{l=0}^{m}(-1)^{m-l}\binom{m}{l}\sum_{k=0}^{\infty}k^r\lambda^{kl}\sum_{j=1}^{a_k}c_{k,j}H_{k,j}(\cdot)\right\|_2^2 \;=$$

$$=\;\left\|\sum_{k=0}^{\infty}k^r\left\{\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(-1)^{m-l}\lambda^{kl}\right\}\sum_{j=1}^{a_k}c_{k,j}H_{k,j}(\cdot)\right\|_2^2 \;=$$

$$=\;\left\|\sum_{k=0}^{\infty}k^r\left(1-\lambda^k\right)^m\sum_{j=1}^{a_k}c_{k,j}H_{k,j}(\cdot)\right\|_2^2 \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}k^{2r}\left(1-\lambda^k\right)^{2m}\sum_{j=1}^{a_k}\left|c_{k,j}\right|_2^2. \tag{3.8}$$

Для произвольной функции $f \in L_2^r\left(S^{n-1}\right)$ имеем

$$E_N^M(f)_2^2 \;=\; \left\|f - S_N^M(f)\right\|_2^2 \;=$$

$$=\;\sum_{k=0}^{N}|1-\mu_k|^2\sum_{j=1}^{a_k}\left|c_{k,j}\right|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\left|c_{k,j}\right|^2 \;=$$

$$=\;\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{a_k}\frac{\int_h^1|1-\mu_k|^2(1-\lambda^k)^{2m}k^{2r}\left|c_{k,j}\right|^2\theta(\lambda)\,d\lambda}{\int_h^1(1-\lambda^k)^{2m}k^{2r}\theta(\lambda)\,d\lambda} \;+$$

$$+\;\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\frac{\int_h^1(1-\lambda^k)^{2m}k^{2r}\left|c_{k,j}\right|^2\theta(\lambda)\,d\lambda}{\int_h^1(1-\lambda^k)^{2m}k^{2r}\theta(\lambda)\,d\lambda}.$$

Учитывая соотношения (3.1) – (3.3) и (3.8), получаем

$$E_N^M(f)_2^2 \;\le\; J_N^1(M, \theta, m, r, h)\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{a_k}\int_h^1(1-\lambda^k)^{2m}k^{2r}\left|c_{k,j}\right|^2\theta(\lambda)\,d\lambda \;+$$

$$+\;J_N^2(M, \theta, m, r, h)\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\int_h^1(1-\lambda^k)^{2m}k^{2r}\left|c_{k,j}\right|^2\theta(\lambda)\,d\lambda \;\le$$

$$\le\; J_N(M, \theta, m, r, h)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\int_h^1(1-\lambda^k)^{2m}k^{2r}\left|c_{k,j}\right|^2\theta(\lambda)\,d\lambda \;=$$

$$=\; J_N(M, \theta, m, r, h)\int_h^1\theta(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda^k)^{2m}k^{2r}\sum_{j=1}^{a_k}\left|c_{k,j}\right|^2 d\lambda \;=$$

$$= J_N(M, \theta, m, r, h) \int\limits_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda.$$

Таким образом, неравенство (3.4) доказано.

Докажем неулучшаемость оценки (3.4). Предположим сначала, что

$$J_N(\theta, m, r, h) = \max\left\{J_N^1(\theta, m, r, h),\ J_N^2(M, \theta, m, r, h)\right\} = J_N^2(M, \theta, m, r, h).$$

В этом случае положим

$$f^*(\boldsymbol{u}) = H_{N+1,1}(\boldsymbol{u}).$$

При этом

$$E_N^M(f^*)_2^2 = 1,$$

$$\left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 = \left(1 - \lambda^{N+1}\right)^{2m} (N+1)^{2r}.$$

Поэтому ввиду (3.2)

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r(S^{n-1}) \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_N^M(f)_2^2}{\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda} \geq \frac{E_N^M\left(f^*\right)_2^2}{\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m \left(f^*\right)^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\int_h^1 \left(1 - \lambda^{N+1}\right)^{2m} (N+1)^{2r} \theta(t) dt} = J_N^2(M, \theta, m, r, h).$$

Пусть теперь

$$J_N(\theta, m, r, h) = \max\left\{J_N^1(\theta, m, r, h),\ J_N^2(M, \theta, m, r, h)\right\} = J_N^1(M, \theta, m, r, h)$$

и

$$J_N^1(\theta, m, r, h) = \max_{k \leq N} \frac{|1 - \mu_k|^2}{\int_h^1 \left(1 - \lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda) d\lambda} = \frac{\left|1 - \mu_{k_0}\right|^2}{\int_h^1 \left(1 - \lambda^{k_0}\right)^{2m} k_0^{2r} \theta(\lambda) d\lambda}.$$

Положим

$$f^*(\boldsymbol{u}) = H_{k_0,1}(\boldsymbol{u}).$$

Будем иметь

$$E_N^M(f^*)_2^2 = \left|1 - \mu_{k_0}\right|^2$$

и

$$\left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 = \left(1 - \lambda^{k_0}\right)^{2m} k_0^{2r}.$$

Поэтому

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r(S^{n-1}) \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_N^M(f)_2^2}{\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda} \geq \frac{E_N^M\left(f^*\right)_2^2}{\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m \left(f^*\right)^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda} =$$

$$= \frac{\left|1 - \mu_{k_0}\right|^2}{\int_h^1 \left(1 - \lambda^{k_0}\right)^{2m} (k_0)^{2r} \theta(t) dt} = J_N^1(M, \theta, m, r, h).$$

Таким образом,

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r(S^{n-1}) \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_N^M(f)_2^2}{\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda} \geq J_N(M, \theta, m, r, h)$$

и соотношение (3.5) доказано.

Для доказательства соотношений (3.6) и (3.7) достаточно повторить с очевидными изменениями приведенные выше рассуждения. Можно также вывести их из (3.4) и (3.5), полагая для $0 < \delta < h$

$$\theta_\delta(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta}, & h \leq \lambda \leq h + \delta, \\ 0, & h + \delta < \lambda \leq 1, \end{cases}$$

устремляя $\delta \to 0$ и учитывая, что для любой непрерывной на $[h, 1]$ функции g

$$\lim_{\delta \to 0} \int_h^1 \theta_\delta(\lambda) g(\lambda) d\lambda = g(h).$$

Теорема доказана.

При $M = I$ получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1 *имеют место неулучшаемые неравенства*

$$E_N(f)_2^2 \leq \frac{\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda}{(N+1)^{2r} \int_h^1 \theta(\lambda) \left(1 - \lambda^{N+1}\right)^{2m} d\lambda} \tag{3.9}$$

и

$$E_N(f)_2^2 \leq \frac{\left\| \Delta_h^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2}{(N+1)^{2r} \left(1 - h^{N+1}\right)^{2m}}. \tag{3.10}$$

Полагая в неравенствах (3.9) и (3.10) $h = 2^{-\frac{1}{N+1}}$, получаем такое следствие.

***Следствие* 2.** *В условиях теоремы* 1 *имеют место неулучшаемые неравенства*

$$E_N^M(f)_2^2 \leq \max\left\{ \max_{k \leq N} \frac{2^{2m} |1 - \mu_k|^2}{k^{2r}}, \frac{2^{2m}}{(N+1)^{2r}} \right\} \left\| \Delta_{2^{-1/(N+1)}}^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2. \tag{3.11}$$

В частности,

$$E_N(f)_2^2 \leq \frac{2^{2m}}{(N+1)^{2r}} \left\| \Delta_{2^{-1/(N+1)}}^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2. \tag{3.12}$$

Замечание. Сопоставляя неравенства (3.11) и (3.12), видим, что если линейный метод приближения таков, что

$$\forall\, k \leq N \quad |1 - \mu_k| \leq \left(\frac{k}{N+1} \right)^r,$$

то константы в этих неравенствах совпадают.

4. Случай $p = \infty$. Положим

$$D_N(M, \theta, m, r, h) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{|1 - \mu_k|^2 a_k \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1 - \lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda) d\lambda} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1 - \lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda) d\lambda} \right)^{1/2}$$

и

$$\tilde{D}_N(M, m, r, h) = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{|1-\mu_k|^2 a_k \sigma_{n-1}}{\left(1-h^k\right)^{2m} k^{2r}} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k \sigma_{n-1}}{\left(1-h^k\right)^{2m} k^{2r}} \right)^{1/2},$$

где σ_{n-1} — площадь поверхности сферы S^{n-1}.

Теорема 2. *Для любой функции* $f \in L_2^r\left(S^{n-1}\right)$, *любой последовательности* $M = \{\mu_k\}$, *любого* $h \in (0,1)$ *и любой ненулевой, неотрицательной функции* $\theta \in L_1(h,1)$ *при всех* $N, m = 1, 2, \ldots$ *и при каждом* $r \in \mathbb{R}_+$ *выполняется неравенство*

$$E_N^M(f)_\infty \le D_N(M, \theta, m, r, h) \left(\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda \right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

При этом

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r\left(S^{n-1}\right) \\ f \ne \mathrm{const}}} \frac{E_N^M(f)_\infty}{\left(\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda \right)^{1/2}} = D_N(M, \theta, m, r, h), \tag{4.2}$$

т. е. неравенство (4.1) *неулучшаемо.*

Для любой функции $f \in L_2^r\left(S^{n-1}\right)$, *любой последовательности* $M = \{\mu_k\}$, *любого* $h \in (0,1)$ *при всех* $N, m = 1, 2, \ldots$ *и при каждом* $r \in \mathbb{R}_+$ *имеет место неравенство*

$$E_N^M(f)_\infty \le \tilde{D}_N(M, m, r, h) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2. \tag{4.3}$$

При этом

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r\left(S^{n-1}\right) \\ f \ne \mathrm{const}}} \frac{E_N^M(f)_\infty}{\left\| \Delta_h^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2} = \tilde{D}_N(M, \theta, m, r, h). \tag{4.4}$$

Доказательство. Для $f \in L_2^r\left(S^{n-1}\right)$, последовательности $M = \{\mu_k\}$ и числа N имеем

$$\left| f(\boldsymbol{u}) - S_N^M(f, \boldsymbol{u}) \right| = \left| \sum_{k=0}^{N} (1-\mu_k) \sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j} H_{k,j}(\boldsymbol{u}) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j} H_{k,j}(\boldsymbol{u}) \right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{N} |1-\mu_k| \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_{k,j} \right| \left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}) \right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_{k,j} \right| \left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}) \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_{k,j} \right| \left(\int_h^1 (1-\lambda^k)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda) d\lambda \right)^{1/2} \frac{|1-\mu_k| \left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}) \right|}{\left(\int_h^1 (1-\lambda^k)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda) d\lambda \right)^{1/2}} +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_{k,j} \right| \left(\int_h^1 (1-\lambda^k)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda) d\lambda \right)^{1/2} \frac{\left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}) \right|}{\left(\int_h^1 (1-\lambda^k)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda) d\lambda \right)^{1/2}}.$$

Применяя вначале неравенство Коши – Буняковского, а затем его модификацию

$$\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{c}\sqrt{d} \le \sqrt{a+c}\sqrt{b+d}, \quad a, b, c, d \ge 0,$$

получаем

$$\left| f(\boldsymbol{u}) - S_N^M(f, \boldsymbol{u}) \right| \le$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_{k,j} \right|^2 \int_h^1 (1-\lambda^k)^{2m} k^{2r}\, \theta(\lambda)\, d\lambda \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{|1-\mu_k|^2 \sum_{j=1}^{a_k} \left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}) \right|^2}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\, dt} \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_{k,j} \right|^2 \int_h^1 (1-\lambda^k)^{2m} k^{2r}\, \theta(\lambda)\, d\lambda \right)^{1/2} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^{a_k} \left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}) \right|^2}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\, d\lambda} \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_{k,j} \right|^2 \int_h^1 (1-\lambda^k)^{2m} k^{2r}\, \theta(\lambda)\, d\lambda \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{|1-\mu_k|^2 \sum_{j=1}^{a_k} \left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}) \right|^2}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\, d\lambda} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^{a_k} \left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}) \right|^2}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\, d\lambda} \right)^{1/2}.$$

Учитывая, что (см., например, [32])

$$\sum_{j=1}^{a_k} \left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}) \right|^2 = a_k\, \sigma_{n-1},$$

а также соотношение (3.8), полученное неравенство можно записать в виде

$$\left| f(\boldsymbol{u}) - S_N^M(f, \boldsymbol{u}) \right| \le \left(\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{|1-\mu_k|^2 a_k\, \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\, d\lambda} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k\, \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\, d\lambda} \right)^{1/2}.$$

Полагая

$$D_N(M, \theta, m, r, h) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{|1-\mu_k|^2 a_k\, \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\, d\lambda} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k\, \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\, d\lambda} \right)^{1/2},$$

окончательно получаем

$$\left| f(\boldsymbol{u}) - S_N^M(f, \boldsymbol{u}) \right| \le D_N(M, \theta, m, r, h) \left(\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda \right)^{1/2}.$$

Отсюда следует неравенство (4.1).

Повторяя с очевидными изменениями приведенные выкладки, нетрудно установить справедливость следующего неравенства:

$$\left| f(\boldsymbol{u}) - S_N^M(f, \boldsymbol{u}) \right| \le$$

$$\le \left\| \Delta_h^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2 \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{|1-\mu_k|^2 a_k\, \sigma_{n-1}}{\left(1-h^k\right)^{2m} k^{2r}} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k\, \sigma_{n-1}}{\left(1-h^k\right)^{2m} k^{2r}} \right)^{1/2}.$$

Отсюда следует неравенство (4.3). Впрочем, это неравенство можно получить и в качестве следствия из неравенства (4.1), выбирая такую же, как и при доказательстве неравенства (3.6), функцию $\theta_\delta(\lambda)$ и устремляя $\delta \to 0$.

Докажем неулучшаемость неравенства (4.1). Для этого зафиксируем произвольную точку $\boldsymbol{u}_0 \in S^{n-1}$ и построим функцию, которая обращает неравенство (4.1) в равенство при $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0$. Положим

$$f_{\boldsymbol{u}_0}(\boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\overline{(1-\mu_k)}\,\overline{H_{k,j}(\boldsymbol{u}_0)}\,H_{k,j}(\boldsymbol{u})}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\overline{H_{k,j}(\boldsymbol{u}_0)}\,H_{k,j}(\boldsymbol{u})}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda}.$$

Для этой функции

$$\left| f_{\boldsymbol{u}_0}(\boldsymbol{u}_0) - S_N^M(f_{\boldsymbol{u}_0}, \boldsymbol{u}_0) \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{|1-\mu_k|^2 \sum_{j=1}^{a_k} \left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}_0) \right|^2}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^{a_k} \left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}_0) \right|^2}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{|1-\mu_k|^2 a_k \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda}, \tag{4.5}$$

$$\Delta_\lambda^m f_{\boldsymbol{u}_0}^{(r)}(\boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\overline{(1-\mu_k)}\left(1-\lambda^k\right)^m k^r\, \overline{H_{k,j}(\boldsymbol{u}_0)}\,H_{k,j}(\boldsymbol{u})}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda} +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\left(1-\lambda^k\right)^m k^r\, \overline{H_{k,j}(\boldsymbol{u}_0)}\,H_{k,j}(\boldsymbol{u})}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda},$$

$$\left\| \Delta_\lambda^m f_{\boldsymbol{u}_0}^{(r)}(\boldsymbol{u}) \right\|_2^2 = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{|1-\mu_k|^2 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}_0) \right|^2}{\left(\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda \right)^2} +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \left| H_{k,j}(\boldsymbol{u}_0) \right|^2}{\left(\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda \right)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{|1-\mu_k|^2 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} a_k \sigma_{n-1}}{\left(\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda \right)^2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} a_k \sigma_{n-1}}{\left(\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda \right)^2} \tag{4.6}$$

и, наконец,

$$\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f_{\boldsymbol{u}_0}^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{|1-\mu_k|^2 a_k \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda)\,d\lambda}. \tag{4.7}$$

Учитывая соотношения (4.5) – (4.7), видим, что

$$\left| f_{\boldsymbol{u}_0}(\boldsymbol{u}_0) - S_N^M(f_{\boldsymbol{u}_0}, \boldsymbol{u}_0) \right| = \left(\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{|1-\mu_k|^2 a_k \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda) d\lambda} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda) d\lambda} \right)^{1/2},$$

т. е. неравенство (4.1) действительно обращается в равенство для функции $f_{\boldsymbol{u}_0}(\boldsymbol{u}_0)$.

Аналогично, рассматривая функцию

$$f_{\boldsymbol{u}_0}^*(\boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\overline{(1-\mu_k)}\,\overline{H_{k,j}(\boldsymbol{u}_0)}\, H_{k,j}(\boldsymbol{u})}{\left(1-h^k\right)^{2m} k^{2r}} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\overline{H_{k,j}(\boldsymbol{u}_0)}\, H_{k,j}(\boldsymbol{u})}{\left(1-h^k\right)^{2m} k^{2r}},$$

нетрудно убедиться в том, что для нее обращается в равенство неравенство (4.3).

Теорема доказана.

***Следствие* 3.** *В условиях теоремы* 2 *имеют место неулучшаемые неравенства*

$$E_N(f)_\infty \le \left(\int_h^1 \theta(\lambda) \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k \sigma_{n-1}}{\int_h^1 \left(1-\lambda^k\right)^{2m} k^{2r} \theta(\lambda) d\lambda} \right)^{1/2} \tag{4.8}$$

и

$$E_N(f)_\infty \le \left\| \Delta_\lambda^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_2 \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k \sigma_{n-1}}{\left(1-h^k\right)^{2m} k^{2r}} \right)^{1/2}. \tag{4.9}$$

***Следствие* 4.** *Для любой последовательности* $M \neq I$ *точные константы в неравенствах* (4.1) *и* (4.3) *строго больше точных констант в неравенствах* (4.8) *и* (4.9) *для равномерных приближений суммами Фурье.*

1. *Jackson D.* Über die Genauigkeit des Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegeben Grades und trigonometrischen Summen gegehener Ordnung: Diss. – Göttingen, 1911.
2. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**. – С. 219 – 242.
3. *Корнейчук Н. П.* Точная константа в теореме Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**, № 3. – С. 514 – 515.
4. *Корнейчук Н. П.* О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Мат. заметки. – 1982. – **32**, № 6. – С. 669 – 674.
5. *Жук В. В.* Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // Докл. АН СССР. – 1967. – **201**. – С. 263 – 266.
6. *Лигун А. А.* Некоторые неравенства для верхних граней полунорм на классах периодических функций // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 5. – С. 647 – 654.
7. *Лигун А. А.* О точных константах в неравенствах типа Джексона // Там же. – 1985. – **39**, № 5. – С. 248 – 256.
8. *Жук В. В.* К вопросу приближения периодических функций линейными методами суммирования рядов Фурье // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 3. – С. 717 – 718.
9. *Шалаев В. В.* К вопросу о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил. – Днепропетровск, 1977. – С. 39 – 43.
10. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
11. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 71 – 74.

12. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 5. – С. 513 – 522.
13. *Бабенко А. Г.* О точной константе в неравенстве типа Джексона в L_2 // Там же. – 1986. – **39**, № 5. – С. 651 – 664.
14. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности в L_2 // Там же. – 1976. – **20**, № 3. – С. 433 – 438.
15. *Лигун А. А.* Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Там же. – **19**, № 3. – С. 353 – 364.
16. *Тайков Л. В.* Наилучшее приближение дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Там же. – 1977. – **22**, № 4. – С. 535 – 542.
17. *Юдин В. А.* Диофантовы приближения в экстремальных задачах в L_2 // Докл. АН СССР. – 1980. – **251**, № 1. – С. 54 – 57.
18. *Лигун А. А.* Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 6. – С. 757 – 768.
19. *Ligun A. A.* Jackson's type inequalities // East J. Approxim. – 1996. – **2**, № 2.
20. *Лигун А. А.* Точные константы в неравенствах типа Джексона // Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными ресурсами / А. А. Лигун, В. Е. Капустян, Ю. И. Волков (Сер. Новое в науке и технике). – Киев: Выща шк., 1990. – С. 3 – 75.
21. *Doronin V. G., Ligun A. A.* On exact constants in Jackson's type inequalities in the space L_2 // East J. Approxim. – 1995. – **1**, № 2. – P. 189 – 197.
22. *Волчков В. В.* О точных константах в неравенствах типа Джексона в пространстве L_2 // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 108 – 110.
23. *Черных Н. И.* Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ $(1 \le p < 2)$ // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1992. – **198**. – С. 232 – 241.
24. *Юдин В. А.* Многомерная теорема Джексона в L_2 // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 2. – С. 309 – 315.
25. *Шалаев В. В.* Точные оценки приближения непрерывных на сфере функций линейными операторами типа свертки // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 565 – 567.
26. *Арестов В. В., Попов В. Ю.* Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 8. – С. 13 – 20.
27. *Бабенко А. Г.* Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 с весом Якоби // Матер. междунар. конф. и чебышев. чтений, посв. 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышева. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1996. – Т. 1. – С. 40 – 43.
28. *Бабенко А. Г.* Точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Мат. заметки. – 1996. – **60**, № 3. – С. 333 – 355.
29. *Бабенко А. Г.* Точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве $L^2(R^m)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 1998. – **5**. – С. 183 – 198.
30. *Попов В. Ю.* Многомерные приближения в $L_2(T_m)$ // Теория функций и приближений: Тр. 3-й Саратов. зимн. шк. (27 янв. – 7 февр. 1986 г.). – Саратов: Саратов. ун-т, 1998. – Ч. 3. – С. 22 – 25.
31. *Горбачев Д. В.* Точное неравенство Джексона в пространстве L_p на сфере // Мат. заметки. – 1999. – **66**, № 1. – С. 50 – 62.
32. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.

Получено 24.05.2004