УДК 512.544

Ф. Н. Лиман (Сум. пед. ун-т)

О ГРУППАХ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НЕИНВАРИАНТНЫХ АБЕЛЕВЫХ pd-ПОДГРУПП

We study properties and the structure of non-Abelian groups with minimality condition for Abelian pd-subgroups in the case where they do not satisfy the minimality condition for Abelian pd-subgroups. We prove the solubility of the considered groups and establish relations with non-Abelian groups in which all the infinite Abelian pd-groups are invariant.

Вивчаються властивості і будова неабелевих груп з умовою мінімальності для неінваріантних абелевих pd-підгруп, якщо вони не задовольняють умову мінімальності для абелевих pd-підгруп. Доведено їх розв'язність та встановлено зв'язки з неабелевими групами, в яких всі нескінченні абелеві pd-підгрупи є інваріантними.

Подгруппу группы G, содержащую отличные от единицы p-элементы для некоторого простого числа p, называют pd-подгруппой.

В настоящей работе изучаются I_p-группы. I_p-группой будем называть бесконечную неабелеву pd-группу, удовлетворяющую условию минимальности для неинвариантных абелевых pd-подгрупп.

Таким образом, в I_p-группе G не существует ни одной бесконечной убывающей цепочки неинвариантных абелевых pd-подгрупп.

Класс I_p-групп достаточно широкий. В частности, этому классу принадлежат бесконечные неабелевы pd-группы следующих подклассов: с условием минимальности для абелевых подгрупп, для абелевых pd-подгрупп, для неинвариантных абелевых подгрупп (I-группы С. Н. Черникова, см. [1], гл. 4); с условием инвариантности всех pd-подгрупп (pdI-группы, см. [2]), всех абелевых нециклических pd-подгрупп ($pd\overline{HA}$-группы, см. [3]), всех бесконечных pd-подгрупп (INH_p-группы, см. [4]), всех бесконечных абелевых подгрупп (IH-группы С. Н. Черникова, см. [1], гл. 4), всех бесконечных абелевых pd-подгрупп (IH_p-группы, см. [5]).

Лемма 1. *Непериодическая I_p-группа G, не удовлетворяющая условию минимальности для абелевых pd-подгрупп, содержит инвариантные циклические подгруппы порядка p и бесконечного порядка.*

Доказательство. Пусть A — абелева подгруппа непериодической I_p-группы G, не удовлетворяющая условию минимальности для pd-подгрупп.

Если подгруппа A непериодическая, то она содержит прямое произведение $\langle a\rangle\times\langle x\rangle$, где $|a|=p$, $|x|=\infty$. Согласно определению I_p-групп бесконечная цепочка pd-подгрупп для любого натурального числа $s>1$

$$\langle a,x\rangle\supset\langle a,x^s\rangle\supset\ldots\left\langle a,x^{s^n}\right\rangle\supset\ldots$$

содержит инвариантную подгруппу $\left\langle a,x^{s^k}\right\rangle$. Тогда $\langle a\rangle\lhd G$, $\left\langle x^{p\cdot s^k}\right\rangle\lhd G$, и в этом случае лемма доказана.

Если подгруппа A периодическая, то она содержит прямое произведение

$$\langle a\rangle\times\langle b_1\rangle\times\ldots\times\langle b_n\rangle\times\ldots$$

бесконечного числа групп простых порядков, где $|a|=p$. Тогда бесконечная цепочка подгрупп

$$\langle a,b_1,b_3,\ldots,b_{2n-1},\ldots\rangle\supset\langle a,b_3,\ldots,b_{2n-1},\ldots\rangle\supset\ldots$$

содержит инвариантную подгруппу $\langle a,b_{2k-1},b_{2k+1},\ldots\rangle$, а цепочка

$$\langle a, b_2, b_4, \ldots, b_{2n}, \ldots \rangle \supset \langle a, b_4, \ldots, b_{2n}, \ldots \rangle \supset \ldots$$

— инвариантную подгруппу $\langle a, b_{2m}, b_{2m+2}, \ldots \rangle$. Тогда

$$\langle a, b_{2k-1}, b_{2k+1}, \ldots \rangle \bigcap \langle a, b_{2m}, b_{2m+2}, \ldots \rangle = \langle a \rangle \lhd G.$$

Поскольку централизатор $C_G(a)$ содержит элементы бесконечного порядка, далее все сводится к рассмотренному выше случаю.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если абелева pd-подгруппа I_p-группы G не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то она сама и все ее периодические подгруппы инвариантны в группе G.*

Доказательство. Пусть H — абелева pd-подгруппа I_p-группы G, не удовлетворяющая условию минимальности для подгрупп.

Если подгруппа H непериодическая, то она порождается подгруппами вида $\langle x \rangle \times \langle c \rangle$, где x — элемент бесконечного порядка, c — отличный от единицы pd-элемент, каждая из которых инвариантна в G. Действительно, возьмем два различных простых числа q и r. Тогда бесконечная цепочка подгрупп

$$\langle x, c \rangle \supset \langle x^q, c \rangle \supset \left\langle x^{q^2}, c \right\rangle \supset \ldots \supset \left\langle x^{q^n}, c \right\rangle \supset \ldots$$

содержит инвариантную подгруппу $\left\langle x^{q^k}, c \right\rangle$, а бесконечная цепочка подгрупп

$$\langle x, c \rangle \supset \langle x^r, c \rangle \supset \left\langle x^{r^2}, c \right\rangle \supset \ldots \supset \left\langle x^{r^n}, c \right\rangle \supset \ldots$$

— инвариантную подгруппу $\left\langle x^{r^m}, c \right\rangle$.

Поскольку $(q^k, r^m) = 1$, существуют такие целые числа u и v, что $uq^k +$ $+ vr^m = 1$. Тогда

$$\left\langle x^{q^k}, c \right\rangle \cdot \left\langle x^{r^m}, c \right\rangle = \langle x, c \rangle \lhd G.$$

Если $h \in H$ и h — отличный от единицы pd-элемент, то согласно доказанному $\langle x, h \rangle \lhd G$ и $\langle h \rangle \lhd G$. Если $|h| < \infty$ и $(|h|, p) = 1$, то $\langle x, ha \rangle \lhd G$, где $|a| = p$, и снова $\langle h \rangle \lhd G$. Следовательно, в этом случае $H \lhd G$ и все ее периодические подгруппы инвариантны в группе G.

Пусть теперь подгруппа H периодическая. Тогда она содержит прямое произведение бесконечного числа групп простых порядков. Отсюда следует, что для любых элементов $h \in H$ и $a \in H$, где $|a| = p$, можно указать такое произведение $B = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \ldots \times \langle b_n \rangle \times \ldots$ бесконечного числа групп простых порядков, что $\langle a, h \rangle \bigcap B = E$. Тогда бесконечная цепочка подгрупп

$$\langle a, h, b_1, b_3, \ldots, b_{2n-1}, \ldots \rangle \supset \langle a, h, b_3, \ldots, b_{2n-1}, \ldots \rangle \supset \ldots$$

содержит инвариантную подгруппу $\langle a, h, b_{2k-1}, b_{2k+1}, \ldots \rangle$, а бесконечная цепочка

$$\langle a, h, b_2, b_4, \ldots, b_{2n}, \ldots \rangle \supset \langle a, h, b_4, \ldots, b_{2n}, \ldots \rangle \supset \ldots$$

— инвариантную подгруппу $\langle a, h, b_{2m}, b_{2m+2}, \ldots \rangle$. Следовательно,

$$\langle a, h, b_{2k-1}, b_{2k+1}, \ldots \rangle \bigcap \langle a, h, b_{2m}, b_{2m+2}, \ldots \rangle = \langle a, h \rangle \lhd G.$$

Если $(|h|, p) = 1$, то отсюда следует $\langle h \rangle \lhd G$. Если h — отличный от единицы pd-элемент, то возьмем $a \in \langle h \rangle$, и тогда $\langle a, h \rangle = \langle h \rangle \lhd G$. Таким образом, и в этом случае подгруппа H и все ее периодические подгруппы инвариантны в группе G.

Лемма доказана.

Лемма 3. *В I_p-группе G с непериодическим центром инвариантны все бесконечные абелевы pd-подгруппы.*

Доказательство. Пусть H — бесконечная абелева pd-подгруппа группы G. Если H не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то согласно лемме 2 $H \lhd G$. Если H удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то она периодическая. Тогда согласно лемме 2 из подгруппы $\langle z, H \rangle$, где $|z| = \infty$ и $z \in Z(G)$, инвариантны в группе G все периодические подгруппы. Поэтому $H \lhd G$, и лемма доказана.

Лемма 4. *В непериодической I_p-группе G, содержащей в центре элемент порядка p, инвариантны все бесконечные абелевы pd-подгруппы.*

Доказательство. Пусть $a \in Z(G)$, $|a| = p$ и H — любая бесконечная абелева pd-подгруппа группы G. Если подгруппа H не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то согласно лемме 2 она инвариантна в группе G.

Предположим, что H удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Согласно лемме 1 в группе G существует инвариантная бесконечная циклическая подгруппа $\langle x \rangle$. Обозначим централизатор $C_G(x) = C$.

Пусть $H \not\subset C$. Тогда существует такой элемент $h \in H$, что $h \notin C$, $h^2 \in C$ и $h^{-1}xh = x^{-1}$. Поскольку H удовлетворяет условию минимальности, она содержит квазициклическую подгруппу Q по некоторому простому числу q. Очевидно, что $Q \subset C$. Возьмем элемент $y \in Q$ порядка q^3. Согласно лемме 2 подгруппа $\langle xy \rangle \times \langle a \rangle$ инвариантна в G. Тогда

$$(\langle xy \rangle \times \langle a \rangle)^p = \langle x^p y^p \rangle \lhd G.$$

Поскольку $h \notin C_G(x^p y^p)$, то $h^{-1}(x^p y^p) = (x^p y^p)^{-1}$. С другой стороны, $h^{-1}(x^p y^p)h = (h^{-1}x^p h)y^p = x^{-p}y^p$. Отсюда $x^{-p}y^{-p} = x^{-p}y^p$, $y^{2p} = 1$. Но $2p$ не делится на q^3. Следовательно, $H \subset C$ и согласно лемме 2 $H \lhd G$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Непериодическая I_p-группа G, не удовлетворяющая условию минимальности для абелевых pd-подгрупп, является IH_p-группой.*

Доказательство. Пусть H — бесконечная абелева pd-подгруппа группы G. Если подгруппа H не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то согласно лемме 2 она инвариантна в группе G.

Предположим, что подгруппа H удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Согласно лемме 1 группа G имеет инвариантную бесконечную циклическую подгруппу $\langle x \rangle$ и инвариантную подгруппу $\langle a \rangle$ порядка p. Если $[H, x] = 1$, то согласно лемме 2 $H \lhd G$. Если $[H, x] \neq 1$, то полная часть P подгруппы H удовлетворяет условиям $[P, x] = 1$ и $[P, a] = 1$ и существует такой элемент $y \in H$, что $y^{-1}xy = x^{-1}$. Возьмем элемент $b \in P$ порядка q^3 для некоторого простого числа $q \in \pi(P)$ и рассмотрим подгруппу $\langle a \rangle \times \langle bx \rangle$, инвариантную в G согласно лемме 2. Тогда

$$(\langle a \rangle \times \langle bx \rangle)^p = \langle b^p x^p \rangle \lhd G.$$

Поскольку $[h, b^p x^p] = [h, x^p] \neq 1$, то $h^{-1}(b^p x^p)h = (b^p x^p)^{-1} = b^{-p}x^{-p}$. С другой стороны, $h^{-1}(b^p x^p)h = b^p(h^{-1}x^p h)^{-1} = b^p x^{-p}$. Отсюда $b^{-p}x^{-p} = b^p x^{-p}$, $b^{2p} = 1$. Но $2p$ не делится на q^3. Следовательно, случай $[H, x] \neq 1$ невозможен, и теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Непериодическая I_p-группа G, не удовлетворяющая условию минимальности для абелевых pd-подгрупп, разрешима.*

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 1 и описания непериодических IH_p-групп в работе [5].

***Замечание* 1.** Непериодическая I_p-группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых pd-подгрупп, может содержать неинвариантные бесконечные абелевы pd-подгруппы и быть неразрешимой.

Соответствующим примером такой группы является группа

$$G = ((\langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle) \rtimes \langle b \rangle) \times A \times F,$$

где $|x_1| = |x_2| = \infty$, $|b| = 3$, $b^{-1}x_1 b = x_2$, $b^{-1}x_2 b = x_1^{-1}x_2^{-1}$, A — квазициклическая q-группа и $q \neq 3$, $F = Sz(2^{2n+1})$ — простая группа Судзуки порядка, не делящегося на 3.

Эта группа удовлетворяет условию минимальности для абелевых $3d$-подгрупп, и все они неинвариантны в G. Это следует из того, что произвольная абелева $3d$-подгруппа группы G периодическая и ее нормализатор не содержит элементов бесконечного порядка.

Лемма 5. *Пусть периодическая I_p-группа G содержит бесконечную абелеву pd-подгруппу*

$$H = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n \times \ldots,$$

где H_i, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, — циклические группы простых порядков. Тогда централизатор $C_G(x)$ является дедекиндовой группой, все подгруппы которой инвариантны в G. При этом $C_G(H)$ порождается всеми абелевыми pd-подгруппами группы G, не удовлетворяющими условию минимальности, и фактор-группа $G / C_G(H)$ абелева без квазициклических подгрупп.

Доказательство. Согласно лемме 2 $H_i \lhd G$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$. Следовательно, $C_G(H_i) = C_i \lhd G$ и G / C_i — циклическая группа. Поэтому $C_i \supset G'$, а значит,

$$G' \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = C_G(H)$$

и для подгруппы $C = C_G(H)$ фактор-группа G / C абелева.

Пусть A — произвольная бесконечная абелева pd-подгруппа группы G, не удовлетворяющая условию минимальности. Тогда согласно лемме 2 $A \lhd G$, и так как $H \lhd G$, AH — нильпотентная подгруппа. Поскольку каждая из подгрупп H_i, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, простого порядка и инвариантна в G, подгруппа AH абелева и $A \subset C$. Ввиду произвольности подгруппы A отсюда следует, что C содержит подгруппу K, порожденную всеми бесконечными абелевыми pd-подгруппами, не удовлетворяющими условию минимальности. Возьмем произвольный элемент $c \in C$. Тогда $\langle c \rangle H$ — абелева pd-подгруппа, не удовлетворяющая условию минимальности, и поэтому $\langle c \rangle H \subset K$. Следовательно, $C = K$.

Согласно лемме 2 каждая подгруппа из $\langle c \rangle H$ инвариантна в G. Отсюда следует, что все подгруппы из C инвариантны в G и поэтому C — дедекиндова группа.

Покажем, что G/C не содержит квазициклических подгрупп. Предположим, что P/C — квазициклическая подгруппа G/C. Поскольку централизатор $C_p(H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, имеет конечный индекс в P, с учетом изоморфизма

$$(P/C)/(C_p(H_i)/C) \simeq P/C_p(H_i),$$

$C_p(H_i) = P$, $P \subseteq C_i$, и поэтому $P \subseteq C$ и фактор-группа P/C — единичная подгруппа группы G/C, что противоречит предположению.

Лемма доказана.

***Следствие* 2.** *Периодическая I_p-группа G, не удовлетворяющая условию минимальности для абелевых pd-подгрупп, разрешима.*

***Замечание* 2.** Периодическая I_p-группа G, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых pd-подгрупп, может содержать неинвариантные бесконечные абелевы pd-подгруппы и быть неразрешимой.

Примером такой группы является группа

$$G = (A \leftthreetimes \langle b \rangle) \times P \times F,$$

где A — бесконечная элементарная абелева q-группа, $|b| = p \neq q$, для любого элемента $a \in A$ подгруппа $\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$ — неабелева порядка pq, P — квазициклическая r-группа, $(r, pq) = 1$, F — конечная простая неабелева группа и $(|F|, pqr) = 1$.

Группа G не удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, удовлетворяет условию минимальности для абелевых pd-подгрупп, все ее отличные от единичной абелевы pd-подгруппы неинвариантны и она неразрешима.

***Следствие* 3.** *Если в лемме 5 подгруппа H является бесконечной элементарной абелевой p-подгруппой, то $G/C_G(H)$ — циклическая группа.*

Доказательство. Возьмем $C_i = C_G(H_i)$ и $C_j = C_G(H_j)$ при $i \neq j$. Пусть $C_i \neq C_j$ и $x \in C_j \setminus C_i$. Если $H_i = \langle h_i \rangle$, $H_j = \langle h_j \rangle$, то из условия инвариантности в группе G всех подгрупп из H имеем

$$x^{-1}(h_i h_j)x = (h_i h_j)^k = h_i^k h_j^k.$$

С другой стороны,

$$x^{-1}(h_i h_j)x = (x^{-1} h_i x) h_j = h_i^m h_j.$$

Поэтому $h_i^k h_j^k = h_i^m h_j$. Отсюда $m = k = 1$ и $x \in C_i$, что противоречит предположению. Таким образом, $C_i = C_j$ и $C_G(H) = C_G(H_m)$ для всех $m = 1, 2, \ldots$. Поэтому фактор-группа $G/C_G(H)$ циклическая, и следствие 3 доказано.

***Замечание* 3.** В общем случае фактор-группа $G/C_G(H)$ может быть нециклической. Соответствующим примером является группа

$$G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b_1 \rangle) \times ((\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \ldots \langle a_n \rangle \times \ldots) \leftthreetimes \langle b_2 \rangle),$$

где $|a| = p \neq 2$, $|b_1| = |b_2| \neq 2$, $|a_i| = q$, $q \neq 2$, $q \neq p$,

$$b_1^{-1}ab_1 = a^{-1}, \quad b_2^{-1}a_ib_2 = a_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots .$$

В этой группе $H = \langle a \rangle \times \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_n \rangle \times \ldots$, $C_G(H) = H$ и G / H — элементарная абелева группа порядка 4.

Теорема 2. *Периодическая I_p-группа G, не удовлетворяющая условию минимальности для абелевых pd-подгрупп, является абелевым расширением дедекиндовой подгруппы K, порожденной всеми бесконечными абелевыми pd-подгруппами, не удовлетворяющими условию минимальности. При этом все подгруппы из K инвариантны в G, а фактор-группа G / K не содержит квазициклических подгрупп. Если группа G содержит бесконечную элементарную абелеву p-подгруппу, то фактор-группа G / K является циклической.*

Все утверждения теоремы доказаны в лемме 5 и следствии 3.

Объединяя следствия 1 и 2, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Группа G разрешима, если для некоторого простого числа p она не удовлетворяет условию минимальности для абелевых pd-подгрупп и удовлетворяет условию минимальности для неинвариантных абелевых pd-подгрупп.*

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Лиман Ф. Н.* Группы с некоторыми системами инвариантных pd-подгрупп // Группы и системы их подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 100–118.
3. *Лиман Ф. Н.* О группах, все абелевы нециклические pd-подгруппы которых нормальны // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7-8. – С. 974–980.
4. *Лиман Ф. Н.* О бесконечных группах, все бесконечные pd-подгруппы которых нормальны // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 3. – С. 75–78.
5. *Лиман Ф. Н.* О группах, все бесконечные абелевы pd-подгруппы которых нормальны // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 6. – С. 796–800.

Получено 25.12.2003