УДК 517.9

В. М. Горбачук (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ),
М. Л. Горбачук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗОБРАЖЕННЯ ГРУПИ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ НА МНОЖИНІ ЦІЛИХ ВЕКТОРІВ ЇЇ ГЕНЕРАТОРА

For a strongly continuous one-parameter group $\{U(t)\}_{t\in(-\infty,\infty)}$ of linear operators in a Banach space $\mathfrak{B}$, with generator A, we prove the existence of a set $\mathfrak{B}_1$ dense in $\mathfrak{B}$ on the elements of which x the function $U(t)x$ admits an extension to an entire $\mathfrak{B}$-valued vector function. The description of the vectors from $\mathfrak{B}_1$ for which this extension has a finite order of growth and a finite type is presented. It is also established that the inclusion $x \in \mathfrak{B}_1$ is a necessary and sufficient condition for the existence of the limit $\lim_{n\to\infty}\left(I+\dfrac{tA}{n}\right)^n x$ and this limit is equal to $U(t)x$.

Для сильно непрерывной однопараметрической группы $\{U(t)\}_{t\in(-\infty,\infty)}$ линейных операторов в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ с генератором A доказано существование плотного в $\mathfrak{B}$ множества $\mathfrak{B}_1$, на элементах x которого $U(t)x$ допускает продолжение до целой $\mathfrak{B}$-значной вектор-функции. Приведено описание тех векторов из $\mathfrak{B}_1$, для которых это продолжение имеет конечный порядок роста и конечный тип. Установлено также, что включение $x \in \mathfrak{B}_1$ является необходимым и достаточным условием для существования $\lim_{n\to\infty}\left(I+\dfrac{tA}{n}\right)^n x$ и этот предел совпадает с $U(t)x$.

1. Нехай $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — C_0-група лінійних операторів у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|\cdot\|$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, тобто

(i) $U(0) = I$ (I — одиничний оператор в $\mathfrak{B}$);

(ii) $\forall t, s \in (-\infty,\infty)\colon U(t+s) = U(t)U(s)$;

(iii) $\forall x \in \mathfrak{B}\colon \lim_{t\to 0}\|U(t)x - x\| = 0$.

Позначимо через A генератор групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$:

$$Ax = \lim_{t\to 0}\frac{U(t)x - x}{t}, \qquad \mathcal{D}(A) = \left\{x \in \mathfrak{B}\colon \lim_{t\to 0}\frac{U(t)x - x}{t} \text{ існує}\right\}$$

$\big(\mathcal{D}(\cdot)$ — область визначення оператора$\big)$. Як відомо (див. [1]), оператор A замкнений і $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{B}$. Він є неперервним тоді і тільки тоді, коли $U(t) \to I$, $t \to 0$, в рівномірній операторній топології.

У випадку, коли $\mathfrak{B} = \mathbb{C}$, а $U(t)$ — неперервна скалярна функція, що задовольняє (i) — (iii), О. Коші показав (див. [2]), що $U(t) = e^{At}$. Зауважимо, що функція e^{At}, $A \in \mathbb{C}$, була визначена ще Л. Ейлером у 1728 р. [3] двома способами:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k A^k}{k!} \tag{1}$$

і

$$e^{At} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{tA}{n}\right)^n. \tag{2}$$

Цей результат був поширений у 1920 р. С. Банахом [4] і В. Серпінським [5] на вимірні $U(t)$, а в 1887 р. Ж. Пеано [6] довів, що у випадку скінченновимірного $\mathfrak{B}$ ряд в (1) збігається в операторній нормі і для його суми $U(t)$ виконуються співвідношення (i) – (iii); більш того, для будь-якого $x \in \mathfrak{B}$ вектор-функція $U(t)x$ є єдиним розв’язком задачі Коші

$$\begin{aligned} &\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \\ &y(0) = x. \end{aligned} \tag{3}$$

У подальшому це твердження було узагальнено (див. [7 – 10]) на випадок довільного неперервного оператора A у нескінченновимірному $\mathfrak{B}$, а саме, було показано, що для такого оператора ряд в (1) збігається в рівномірній операторній топології і його сума $U(t)$ є неперервною в цій топології оператор-функцією, що задовольняє співвідношення (i) – (iii). Навпаки, якщо неперервна в рівномірній операторній топології оператор-функція $U(t)$ задовольняє співвідношення (i) – (iii), то існує єдиний неперервний лінійний оператор A, за допомогою якого $U(t)$ можна подати як у вигляді (1), так і у вигляді (2). Що стосується C_0-груп з необмеженим генератором (а саме вони найчастіше виникають у задачах математичної фізики), то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k A^k x}{k!}$ збігається не для всіх $x \in \mathfrak{B}$, а отже, зображення (1), взагалі кажучи, не має місця. Проте ще у 1772 р. Ж. Л. Лангранж (див. [11]) навів формулу

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}) \quad \forall t \in (-\infty, \infty) : x(t+s) = \exp\left(t\frac{d}{ds}\right) x(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^{(n)}(s)}{n!}, \tag{4}$$

в якій, як бачимо, група зсувів $U(t)x(s) = x(t+s)$ у просторі $L^2(\mathbb{R})$ зображується у вигляді експоненти від її генератора — оператора диференціювання. Що ж до надання їй сенсу для довільної C_0-групи, тобто усвідомлення того, а що ж саме треба розуміти під e^{At}, де A — генератор цієї групи, то для цього знадобилось майже два століття, і це стало одним із найважливіших досягнень математичного аналізу середини 20-го ст.

Якщо розглядати формулу (4) у різних функціональних банахових просторах, наприклад у $L^p(\mathbb{R})$, $C_b(\mathbb{R})$ тощо, то можна побачити, що її ліва частина $x(t+s)$ визначена на всьому просторі, а ряд справа — лише на певних класах цілих функцій, щільних у цих просторах. Тому постає питання: чи існують для довільної C_0-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ щільні в ньому підпростори $\mathfrak{B}_1$ і $\mathfrak{B}_2$ такі, що

$$\forall x \in \mathfrak{B}_1 : U(t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x, \tag{5}$$

$$\forall x \in \mathfrak{B}_2 : U(t)x = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x\,? \tag{6}$$

Якщо $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — унітарна група у гільбертовому просторі, то відповідь на (5) дає теорема Стоуна [12] про її спектральне зображення. Для довільної C_0-групи у банаховому просторі проблема (5) була поставлена А. М. Колмогоровим і розв'язана І. М. Гельфандом [13] у 1939 р. у випадку, коли розглядувана група є обмеженою. В даній роботі ця проблема розв'язується у загальному випадку. Очевидно тоді, що із збіжності ряду (5) випливає можливість продовження $U(t)x$ до цілої вектор-функції $U(z)x$, $z \in \mathbb{C}$, і, якщо оператор A неперервний в $\mathfrak{B}$, то $U(z)x$ є експоненціального типу для будь-якого $x \in \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$. Це, взагалі кажучи, не так у випадку необмеженого A. Ми наводимо умови на вектор $x \in \mathfrak{B}_1$, за яких $U(z)x$ має скінченний тип і скінченний порядок росту.

Що стосується проблеми існування щільної в $\mathfrak{B}$ множини $\mathfrak{B}_2$, на елементах якої існує границя (6), то вона була поставлена у 1946 р. Е. Хілле для сильно неперервних півгруп. Як було зазначено ним (див. [1, с. 285]), „поширити формулу (6) на сильний випадок мабуть надзвичайно важко; імовірно, що навіть при $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}} \mathcal{D}(A^n)$ границя (6) не завжди існує”. Справді, неважко навести приклад C_0-півгрупи, для якої ця границя існує лише для $x = 0$. Ми доводимо, що для C_0-групи $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ границя (6) існує тоді і тільки тоді, коли $x \in \mathfrak{B}_1$ (таким чином, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1$), і ця границя збігається з сумою ряду (5).

2. Нехай A — довільний замкнений, щільно заданий в $\mathfrak{B}$ лінійний оператор. Множину таких операторів позначимо через $E(\mathfrak{B})$, а множину всіх обмежених на $\mathfrak{B}$ лінійних операторів — через $L(\mathfrak{B})$. Вектор $x \in C^\infty(A) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ називається цілим вектором оператора A, якщо ряд у правій частині (1), застосований до цього вектора, збігається в $\mathbb{C}$. Очевидно, що $x \in C^\infty(A)$ є цілим вектором оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ тоді і тільки тоді, коли

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists c = c(x) > 0 \colon \|A^n x\| \le c\alpha^n n^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

(Скрізь у подальшому під c розумітимемо сталу, відповідну до розглядуваного випадку.) Для оператора $A \in L(\mathfrak{B})$ будь-який вектор $x \in \mathfrak{B}$ є цілим. Що ж до необмежених операторів, то серед них є такі, для яких жоден вектор, відмінний від нульового, не є цілим.

Будемо говорити, що цілий вектор x оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ має скінченний порядок, якщо існує число $\gamma \in (-\infty, 1)$ таке, що, починаючи з деякого номера $n_0 = n_0(x)$,

$$\forall n \ge n_0 \colon \|A^n x\| \le n^{n\gamma}.$$

Точну нижню межу $p(x)$ таких γ назвемо порядком вектора x відносно оператора A. Неважко переконатись, що

$$p(x) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln \|A^n x\|}{n \ln n}.$$

Тип $s(x)$ вектора x порядку $p(x)$ визначається як

$$s(x) = \inf\left\{\alpha > 0 \colon \|A^n x\| \le \alpha^n n^{p(x)} \quad (n \ge n_0)\right\}.$$

Вважатимемо, що цілий вектор x оператора A порядку $p(x)$ має мінімальний тип, якщо $s(x) = 0$, і нормальний — за умови, що $0 < s(x) < \infty$. Зрозуміло, що

$$s(x) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{\|A^n x\|}}{n^{p(x)}}.$$

Для числа $\beta \in [0, 1]$ покладемо

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A) \quad \text{при} \quad 0 \le \beta < 1, \qquad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \bigcap_{\alpha > 0} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A) \quad \text{при} \quad 0 < \beta \le 1,$$

де

$$\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A) = \left\{x \in C^{\infty}(A) \middle| \exists c = c(x) > 0 \colon \|A^n x\| \leq c\alpha^n n^{n\beta} \quad (n \in \mathbb{N}_0)\right\}$$

— банахів простір відносно норми

$$\|x\|_{\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A)} = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\|A^n x\|}{\alpha^n n^{n\beta}}.$$

Неважко переконатись, що множина цілих векторів оператора A скінченного порядку $p \in [0,1)$ і нормального типу збігається з $\mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$, а множина його цілих векторів порядку $p \in (0,1]$ мінімального типу — з $\mathfrak{G}_{(p)}(A)$. Елементи простору $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ називаються цілими векторами експоненціального типу оператора A.

У просторах $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ і $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ вводиться топологія індуктивної та, відповідно, проективної границі просторів $\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A)$ (див. [14]):

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \operatorname*{ind\,lim}_{\alpha \to \infty} \mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A), \qquad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{\alpha \to 0} \mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A).$$

Зауважимо, що простір $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ є регулярною індуктивною границею, а тому послідовність $x_n \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ збігається до x у цьому просторі тоді і тільки тоді, коли існує $\alpha > 0$ таке, що $x_n \in \mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A)$ і $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ у цьому банаховому просторі. Збіжність у просторі $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ рівносильна збіжності в $\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A)$ для довільного $\alpha > 0$. $\mathfrak{B}$-значна вектор-функція $f(z)$ називається цілою в $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ $(\mathfrak{G}_{(\beta)}(A))$, якщо вона є цілою у банаховому просторі $\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A)$ з деяким (будь-яким) α. Як показано в [15], має місце таке твердження.

Твердження 1. *Нехай $A \in E(\mathfrak{B})$. Тоді для кожного $x \in \mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$ з $\gamma \leq 1$ вектор-функція*

$$\exp(Az)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n x}{k!}$$

є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$.

У конкретному випадку, коли $\mathfrak{B} = C([a,b])$, $-\infty < a < b < \infty$, а

$$Ax(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \qquad \mathcal{D}(A) = C^1([a,b]),$$

$C^{\infty}(A)$ є не що інше, як множина всіх нескінченно диференційовних на $[a,b]$ функцій, $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ $(\mathfrak{G}_{\{0\}}(A))$ — простір усіх неперервних на $[a,b]$ функцій, що допускають продовження до цілих (цілих експоненціального типу) функцій.

3. У наведеному вище прикладі простір $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ є щільним в $C([a,b])$. Оскільки для довільного $\beta \in (0,1)$ має місце включення $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) \supseteq \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) \supseteq \mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$, то $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = C([a,b])$. Але це, взагалі кажучи, не так у випадку довільного замкненого A. Неважко навести приклад оператора $A \in E(\mathfrak{B})$, для якого $\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \{0\}$. Проте якщо A — генератор C_0-групи, то, як показано в [16, 17], справджується таке твердження.

Твердження 2. *Нехай A — генератор C_0-групи $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ в $\mathfrak{B}$. Тоді*

$$\forall \beta \in (0,1) : \overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}.$$

За умови, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \big\|U(t)\big\|}{1+t^2}\, dt < \infty, \tag{7}$$

маємо також $\overline{\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)} = \mathfrak{B}$.

Зазначимо, що умова (7) є близькою до необхідної. Це підтверджує наступний приклад.

Приклад 1. Нехай $\mathfrak{B} = L_2(\mathbb{R}, \tau^2(t)dt)$, де вимірна локально обмежена функція $\tau(t) \geq 1$, $t \in \mathbb{R}$, задовольняє умови:

1) $\forall t, s \in \mathbb{R}\colon \tau(t+s) \leq \tau(t) \cdot \tau(s)$;

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \tau(t)}{1+t^2}\, dt = \infty$.

Тоді оператор

$$(Ax)(t) = -x'(t),$$

$$\mathcal{D}(A) = \big\{x(t) \in C(\mathbb{R}) \big| x(t) \quad \text{абсолютно неперервна і} \quad x(t), x'(t) \in L_2(\mathbb{R}, \tau^2(t)dt)\big\}$$

породжує C_0-групу $(U(t)x)(s) = x(s-t)$, для якої $\big\|U(t)\big\| \leq \tau(t)$. Покажемо, що для будь-якого $\alpha > 0$ $\mathfrak{G}_0^{\alpha}(A) = \{0\}$.

Припустимо, що це не так. Тоді існують $\alpha > 0$ та $x(t) \not\equiv 0$ із простору $L_2(\mathbb{R}, \tau^2(t)dt)$ такі, що $x \in \mathfrak{G}_0^{\alpha}(A)$, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|x^{(n)}(t)\big|^2\, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \big|x^{(n)}(t)\big|^2 \tau^2(t)\, dt < (c\alpha^n)^2\,, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

а отже, $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ допускає продовження до цілої функції експоненціального типу. З нерівності $2\ln_+ \big|x(t)\big| < \big|x(t)\big|^2$ випливає, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln_+ \big|x(t)\big|}{1+t^2}\, dt < \infty,$$

звідки (див. [18, с. 315])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|x(t)||}{1+t^2}\, dt < \infty.$$

Покладемо тепер $y(t) = \tau(t)x(t)$. Оскільки

$$|y(t)|^2 = \exp\left(\frac{2(1+t^2)}{1+t^2} \ln|y(t)|\right) > \frac{2(1+t^2)}{1+t^2} \ln|y(t)| \geq \frac{\ln|y(t)|}{1+t^2} = \frac{\ln|x(t)|}{1+t^2} + \frac{\ln|\tau(t)|}{1+t^2},$$

то $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\, dt = \infty$, що суперечить включенню $x(t) \in L_2\big(\mathbb{R}, \tau^2(t)dt\big)$.

Нагадаємо, що ціла $\mathfrak{B}$-значна вектор-функція $f(z)$ має скінченний порядок росту, якщо для достатньо великих $|z|$ виконується нерівність $\|f(z)\| \leq \exp\left(|z|^{\gamma}\right)$ з деяким $\gamma > 0$. Точна нижня межа $\rho = \rho(f)$ таких γ називається порядком $f(z)$. Під типом вектор-функції $f(z)$ порядку ρ розуміється число

$$\sigma(f) = \inf\big\{a > 0\colon \|f(z)\| \le \exp\left(a|z|^\rho\right)\big\}.$$

Якщо $\sigma(f) = 0$, то тип $f(z)$ вважається мінімальним, а при $0 < \sigma(f) < \infty$ — нормальним. Якщо ж $\rho(f) \le 1$, то $f(z)$ називається цілою вектор-функцією експоненціального типу. Як і в скалярному випадку (див. [18]), порядок росту $\rho = \rho(f)$ і тип $\sigma = \sigma(f)$ вектор-функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n \in \mathfrak{B},$$

визначаються як

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln\left(\|c_n\|^{-1}\right)}, \qquad (e\sigma\rho)^{1/\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{1/\rho} \sqrt[n]{\|c_n\|}. \tag{8}$$

4. Нехай $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — C_0-група лінійних операторів в $\mathfrak{B}$, а A — її генератор. Вектор-функція $U(t)x,\ x \in \mathfrak{B}$, називається орбітою цієї групи, породженою вектором x. Якщо $A \in L(\mathfrak{B})$, то для будь-якого $x \in \mathfrak{B}$ орбіта $U(t)x$ може бути продовжена до цілої $\mathfrak{B}$-значної вектор-функції $U(z)x$ експоненціального типу і

$$\|U(z)x\| \le e^{\|A\||z|}\|x\|.$$

Якщо ж $A \in E(\mathfrak{B})$, то це, взагалі кажучи, не так. Природно постає питання: за яких умов на вектор x орбіта $U(t)x$, породжена ним, допускає продовження до цілої вектор-функції, і якщо це так, то для яких x продовження буде мати скінченний порядок росту і скінченний тип? Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — C_0-група лінійних операторів у $\mathfrak{B}$ з генератором A. Для того щоб орбіта $U(t)x$ допускала продовження до цілої $\mathfrak{B}$-значної вектор-функції $U(z)x$, необхідно і достатньо, щоб $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Це продовження має скінченний порядок росту ρ і нормальний (мінімальний) тип σ тоді і тільки тоді, коли x є цілим вектором оператора A порядку p і нормального (мінімального) типу s, пов'язаних з ρ і σ співвідношеннями*

$$\rho = \frac{1}{1-p}, \qquad \sigma = \frac{(se)^\rho}{\rho e}.$$

Більш того, якщо $x \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\beta \in (0,1]$ $\big(x \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ з $\beta \in (0,1)\big)$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k x$ збігається у просторі $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ $(\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A))$ до $U(z)x$ в усій комплексній площині.

Доведення. Нехай $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді неважко переконатись, що вектор-функція

$$\exp(At)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x$$

є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) \quad (t \in (-\infty, \infty)), \quad y(0) = x.$$

Оскільки A — генератор C_0-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, то, як відомо, її розв'язок єдиний і має вигляд $y(t) = U(t)x$. Тому

$$U(t)x = \exp(At)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x.$$

За твердженням 1 $U(t)x$ допускає продовження до цілої вектор-функції із значеннями в $\mathfrak{B}$.

Припустимо тепер, що орбіта $y(t) = U(t)x$ може бути продовжена до цілої вектор-функції $U(z)x$ порядку ρ і типу σ. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon = \mathrm{const}\colon \|U(z)x\| \le c_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|^\rho},$$

звідки, завдяки тотожності

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon y^{(n)}(t) = A^n y(t),$$

маємо

$$\forall r > 0\colon \|A^n x\| = \|A^n U(0)x\| \le \frac{n!}{2\pi} \int\limits_{|z|=r} \frac{\|y(z)\|}{|z|^{n+1}}\, dz \le c_\varepsilon n! \frac{e^{(\sigma+\varepsilon)r^\rho}}{r^n}.$$

Враховуючи, що мінімум функції $\dfrac{e^{ar^\rho}}{r^n}$ досягається в точці $r = \left(\dfrac{n}{a\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$, а ε можна вибрати як завгодно малим, за допомогою формули Стірлінга

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{9}$$

одержуємо нерівність

$$\|A^n x\| \le c \left(e^{1-\rho} \sigma\rho\right)^{\frac{n}{\rho}} n^{\frac{\rho-1}{\rho} n}, \tag{10}$$

яка показує, що x — цілий вектор оператора A скінченного порядку

$$p \le \frac{\rho - 1}{\rho} \Longleftrightarrow \rho \ge \frac{1}{1-p}. \tag{11}$$

Нехай тепер цілий вектор x оператора A має скінченні порядок p і тип s. Тоді формула (8), застосована до вектор-функції $U(z)x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k A^k x}{k!}$, та формула Стірлінга (9) обумовлюють співвідношення

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln \frac{n!}{\|A^n x\|}} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{c(\rho+\varepsilon)^n n^{np}} = \frac{1}{1-p}. \tag{12}$$

З (11) і (12) випливає, що

$$\rho = \frac{1}{1-p}.$$

Для типу тієї самої вектор-функції $U(z)x$, виходячи з (8), одержуємо нерівність

$$(e\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\frac{\|A^n x\|}{n!}} \right) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\frac{(s+\varepsilon)^n n^{n\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}}{n!}} \right) < e(s+\varepsilon).$$

Беручи до уваги, що $\varepsilon > 0$ може бути як завгодно малим, робимо висновок, що

$$(e\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}} \leq es.$$

Тоді з нерівності (10) випливає, що

$$\sigma = \frac{(se)^\rho}{\rho e},$$

що й потрібно було довести.

З теореми 1 і твердження 2 випливає, що для довільної C_0-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ лінійних операторів в $\mathfrak{B}$ з генератором A проблема (5) завжди має розв'язок, а простір $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ є максимальним підпростором з $\mathfrak{B}$, на якому ця проблема розв'язна. Це означає, що якщо ряд у правій частині (5) збігається для довільного $t \in \mathbb{R}$, то $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, а сума цього ряду дорівнює $U(t)x$. Що ж до множини векторів x, для яких $U(z)x$ має порядок росту $\rho > 1$ і скінченний тип, то вона збігається зі щільним у $\mathfrak{B}$ підпростором $\mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$, де $p = \dfrac{\rho - 1}{\rho}$; множина ж цілих векторів x оператора A, що породжують орбіти порядку ρ і мінімального типу, є не що інше, як $\mathfrak{G}_{(p)}(A)$, і $\overline{\mathfrak{G}_{(p)}(A)} = \mathfrak{B}$. Множина векторів x, для яких $U(z)x$ є цілою експоненціального типу, збігається з $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$, але, як показує наведений вище приклад, не завжди щільна в $\mathfrak{B}$. Вона буде щільною лише тоді, коли півгрупа $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ є квазіаналітичною, тобто виконується умова (7).

5. Перейдемо до другої проблеми, поставленої в п. 2, про існування для C_0-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ границі (6). Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді послідовність $\left(I + \dfrac{zA}{n}\right)^n x$, $n \in \mathbb{N}$, збігається рівномірно до $U(z)x$ на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Навпаки, якщо послідовність $\left(I + \dfrac{tA}{n}\right)^n x$, $x \in C^\infty(A)$, збігається для довільного $t \in \mathbb{R}$, то $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і*

$$\lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x = U(t)x.$$

Доведення. Припустимо, що $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Для $k \in \mathbb{N}$ покладемо

$$c_j(k) = \begin{cases} \dfrac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{k^j}, & \text{якщо} \quad 1 \leq j \leq k, \quad c_0(k) = 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad k < j. \end{cases}$$

Неважко переконатись, що для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ $c_j(k) \leq 1$, $c_j(k) \to 1$, $k \to \infty$, і

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j(k) z^j}{j!} A^j x = \left(I + \frac{zA}{k}\right)^k x. \tag{13}$$

Позначимо через $S_n(k, z)x$ частинну суму ряду в (13), тобто

$$S_n(k, z)x = \sum_{j=0}^{n} \frac{c_j(k) z^j}{j!} A^j x.$$

Тоді

$$\big\|S_{n+m}(k,z)x - S_n(k,z)x\big\| = \left\|\sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{c_j(k)z^j}{j!} A^j x\right\| \leq \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{c_j(k)|z|^j}{j!} \|A^j x\| \leq \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{|z|^j}{j!} \|A^j x\|.$$

Оскільки x — цілий вектор оператора A, то

$$\big\|S_{n+m}(k,z)x - S_n(k,z)x\big\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тому ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{c_j(k)z^j}{j!} A^j x$ збігається рівномірно по $k \in \mathbb{N}$ і $z \in K$. Отже, в нерівності (13) можна перейти до границі під знаком суми при $k \to \infty$, звідки

$$\lim_{k\to\infty} \left(I + \frac{zA}{k}\right)^k x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} A^n x = U(z)x.$$

Більш того, збіжність послідовності $\left(I + \dfrac{zA}{k}\right)^k x$ є рівномірною на K.

Навпаки, припустимо, що послідовність $\left(I + \dfrac{tA}{n}\right)^n x$, $n \in \mathbb{N}$, збігається для кожного $t \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\left(\frac{tA}{n}\right)^n x = \left(I + \frac{tA}{n} - I\right)^n x = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(I + \frac{tA}{n}\right)^k (-1)^{n-k} x.$$

Беручи до уваги, що внаслідок збіжності послідовність $\left(I + \dfrac{tA}{n}\right)^n x$ є обмеженою, тобто

$$\left\|\left(I + \frac{tA}{k}\right)^k\right\| \leq M_t$$

(t є довільним фіксованим), одержуємо

$$\left\|\left(\frac{tA}{n}\right)^k x\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k M_t = M_t \cdot 2^n,$$

звідки

$$\|A^n x\| \leq M_t \left(\frac{2}{t}\right)^n n^n.$$

Це дозволяє зробити висновок, що

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists c = c(\alpha) : \|A^n x\| \leq c\alpha^n n^n \ (\forall n \in \mathbb{N}),$$

а це й означає, що x — цілий вектор оператора A.

6. З огляду на застосування до теорії груп одержаний вище результат — це фактично спосіб побудови C_0-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ у банаховому просторі за її генератором A, оскільки розв'язок задачі Коші (3) записується у вигляді $y(t) = U(t)x$, якщо ця задача, за висловом Ж. Адамара (див. [19]), поставлена коректно. Є кілька підходів до такої побудови, серед яких, наприклад, а) $U(t)x = \lim_{n\to\infty}(1 - tA/n)^{-n}x$, $x \in \mathfrak{B}$ (Ейлера – Хілле);

б) $U(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$, $e^{tA_\lambda}x = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^k}{k!}A_\lambda^k x$, $x \in \mathfrak{B}$, де $A_\lambda = \lambda^2 R_\lambda(A) - \lambda I$ — обмежений оператор, і $A_\lambda \to A$ при $\lambda \to \infty$ (Іосіди).

У всіх цих підходах C_0-група $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ відновлюється не безпосередньо за її генератором A, а за допомогою деяких функцій від нього (резольвенти $R_\lambda(A)$ в а) і наближень A_λ в б)), знаходження яких часто-густо не є тривіальним. Спосіб відновлення $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, запропонований в теоремах 1 і 2, має ту перевагу, що розв'язок задачі Коші (3) з початковими даними, які є цілими векторами оператора A, зображується за допомогою його степенів. Оскільки за теоремою 2 множина $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ цілих векторів оператора A є щільною в $\mathfrak{B}$, то

$$\forall x \in \mathfrak{B} \quad \exists \{x_n \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \colon U(t)x_n \to U(t)x \quad \text{при} \quad n \to \infty \ (\forall t \in \mathbb{R}). \tag{14}$$

Більш того, збіжність в (14) є рівномірною на будь-якому компакті з $\mathbb{R}$ і

$$U(t)x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k x_n.$$

1. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 619 с.
2. *Cauchy A. L.* Cours d'Analise de l'Ecole Royale Polytechnique // Première Partie Analyse Algébrique. – 1821.
3. *Euler L.* Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus // Comment. Acad. Sci. Petropolit. – 1728. – **3**. – P. 124 – 137.
4. *Banach S.* Sur l'équation fonctionelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ // Fund. Math. – 1920. – **1**. – P. 123 – 124.
5. *Sierpiński W.* Sur l'équation fonctionelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ // Fund. Math. – 1920. – **1**. – P. 116 – 122.
6. *Peano G.* Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari // Atti Reale Acad. Sci.Torino. – 1887. – **22**. – P. 293 – 302.
7. *Gramegna M.* Serie di equazioni differenziali lineari edequazioni integro-differenziali // Atti Reale Acad. Sci.Torino. – 1910. – **45**. – P. 291 – 313.
8. *Nathan D. S.* One-parameter groups of transformations in abstract vector spaces // Duke Math. J. – 1935. – **1**. – P. 518 – 526.
9. *Nagumo M.* Einige analitische Untersuchungen in linearen, metrischen Ringen // Jap. J. Math. – 1936. – **13**. – P. 59 – 80.
10. *Yosida K.* On the group embedded in the metrical complete ring // Jap. J. Math. – 1936. – **13**. – P. 7 – 26.
11. *Lagrange J. L.* Nouvelle espèce de calcul // Nouv. Mém. l'Acad. Rouale Sci. ét Belles-Lettres. – 1772. – **3**. – P. 185 – 218.
12. *Stone M. H.* On one-parameter unitary groups in Hilbert space // Ann. Math. – 1932. – **33**. – P. 643 – 648.
13. *Гельфанд И. М.* Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве // Докл. АН СССР. – 1939. – **25**, № 9. – С. 713 – 718.
14. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
15. *Gorbachuk M., Gorbachuk V.* On extensions and restrictions of semigroups of linear operators in a Banach space and their applications // Math. Nachr. – 2012. – **285**, № 14-15. – S. 1860 – 1879.
16. *Горбачук М. Л.* Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 596 – 607.
17. *Gorbachuk M. L., Mokrousov Yu. G.* On density of some sets of infinitely differentiable vectors of a closed operator on a Banach space // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 1. – P. 23 – 29.
18. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеориздат., 1956. – 632 с.
19. *Hadamard J.* Le principe de Huygens // Bull. Soc. Math. France. – 1924. – **52**. – P. 610 – 640.

Одержано 19.03.15