УДК 517.98

В. Н. Молибога (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА С МАТРИЧНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

We study 1D Schrödinger operators $\mathrm{L}(q)$ with distributional matrix potentials from the negative space $H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$. In particular, the class $H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$ contains periodic and almost periodic generalized functions. We establish the equivalence of different definitions of the operators $\mathrm{L}(q)$, investigate their approximation by operators with smooth potentials $q \in L^{1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$, and also prove that the spectra of operators $\mathrm{L}(q)$ belong to the interior of a certain parabola.

Вивчаються одновимірні оператори Шредінгера $\mathrm{L}(q)$ з матричними потенціалами із негативного простору $H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$. Зокрема, клас $H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$ містить періодичні та майже періодичні узагальнені функції. Встановлено еквівалентність різних визначень операторів $\mathrm{L}(q)$, досліджено апроксимацію операторами з гладкими потенціалами $q \in L^{1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$, а також доведено, що спектри операторів $\mathrm{L}(q)$ знаходяться всередині деякої параболи.

1. Введение и основные результаты. Начиная с классической работы Кронига и Пенни [15] в математическую физику вошли операторы Шредингера с потенциалами, являющимися обобщенными функциями. Развитие квантовой механики стимулировало дальнейшее активное развитие этого научного направления (см. библиографию в [1, 2], а также работы [3, 5, 6, 10, 14, 21]).

В данной работе изучаются в общем случае несимметричные операторы Шредингера $\mathrm{L}(q)$ с матричными потенциалами-распределениями из пространства $H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$. Изучаемые операторы могут быть корректно определены в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ как:

1) квазидифференциальные операторы [18]: минимальный и максимальный; случай симметричных операторов исследован в [5, 19] (см. также [23]);

2) форм-сумма;

3) предел в смысле равномерной резольвентной сходимости последовательности операторов с гладкими потенциалами.

Основной результат работы состоит в доказательстве эквивалентности указанных определений для рассматриваемых операторов. Мы также показываем, что оператор Шредингера $\mathrm{L}(q)$ может быть аппроксимирован в смысле равномерной резольвентной сходимости последовательностью операторов с потенциалами, являющимися бесконечно дифференцируемыми и равномерно локально суммируемыми матричными функциями. Кроме того, покажем, что спектр оператора Шредингера $\mathrm{L}(q)$ лежит внутри некоторой параболы. Скалярный случай $m = 1$ исследован в работах [11, 12], где потенциал предполагается вещественнозначным, общий случай изучен в [17].

Перейдем к точной постановке задачи и формулировке основных результатов.

В комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$, $m \in \mathbb{N}$, рассмотрим операторы, порожденные формальным дифференциальным выражением

$$\mathrm{l}[u] := -u'' + qu, \quad u = (u_1, \ldots, u_m), \tag{1}$$

где матричный потенциал $q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^m$ принадлежит пространству $H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$. По определению это означает, что потенциал имеет представление

$$q = Q' + s, \qquad Q \in L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}), \quad s \in L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}), \tag{2}$$

где производная понимается в смысле распределений, а через $L^p_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$, $1 \leqslant p < \infty$, обозначены пространства Степанова матричных функций [16]

$$L^p_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}) :=$$

$$:= \left\{ f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}) \,\middle|\, \|f\|^p_{L^p_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})} := \sum_{i,j=1}^m \sup_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_a^{a+1} |f_{ij}(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

Отметим, что пространство $H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$ уже, чем пространство $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$, но шире, чем пространство $H^{-1}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$. В частности, пространство $H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$ содержит периодические меры Радона и производные почти периодических по Степанову функций.

Формальное дифференциальное выражение (1) определим, следуя [21], как квазидифференциальное (см. также [9, 10]). Тогда максимальный и предминимальный операторы определяются следующим образом [18]:

$$\mathrm{L}(q)u \equiv \mathrm{L}u := \mathrm{l}[u], \qquad \mathrm{l}[u] := -(u' - Qu)' - Q(u' - Qu) - (Q^2 - s)u,$$

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{L}) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \,\middle|\, u,\, u' - Qu \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m),\ \mathrm{l}[u] \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \right\}$$

и

$$\mathrm{L}_{00}(q)u \equiv \mathrm{L}_{00}u := \mathrm{l}[u], \qquad \mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{00}) := \{ u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L}) \mid \mathrm{supp}\, u \Subset \mathbb{R} \}.$$

Через $\mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ мы обозначаем класс локально абсолютно непрерывных вектор-функций. Предминимальный оператор L_{00} является плотно определенным и допускающим замыкание в $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ [18] (предложение 7). Обозначим через L_0 замыкание предминимального оператора L_{00}.

Ниже мы покажем, что форма, порожденная потенциалом q, является 0-ограниченной относительно формы, порожденной свободным гамильтонианом. Поэтому операторы, порожденные формальным дифференциальным выражением (1), также могут быть определены как форм-суммы:

$$\mathrm{L}_{fs}(q) \equiv \mathrm{L}_{fs} := -\frac{d^2}{dx^2} \dotplus q, \qquad \mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs}) := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \,\middle|\, -u'' + qu \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \right\}.$$

Теорема 1. *Операторы, порожденные формальным дифференциальным выражением* (1), *могут быть корректно определены в пространстве* $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ *следующим образом*:

1) *как квазидифференциальные операторы*: *минимальный* L_0 *и максимальный* L;

2) *как форм-сумма* L_{fs}.

Эти определения эквивалентны:

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_0 = \mathrm{L}_{fs}, \qquad \mathrm{Dom}(\mathrm{L}) = \bigl\{u \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \,|\, u,\ u' - Qu \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m),\ \mathrm{l}[u] \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)\bigr\}.$$

Оператор L *является* m*-секториальным.*

Напомним, что оператор называется *секториальным*, если его числовая область значений принадлежит некоторому сектору с вершиной на оси абсцисс и углом раствора меньшим π. Оператор называется m*-секториальным*, если дополнение до замыкания числовой области значений на плоскости принадлежит резольвентному множеству оператора [13] (§ V.10), [22] (§ 3.3).

***Замечание* 1.** Ниже мы докажем, что предминимальный оператор L_{00} является секториальным. Поэтому операторы, порожденные (1), также могут быть определены как расширение по Фридрихсу L_F предминимального оператора L_{00}. Несложно убедиться, что операторы L_F и L_{fs} совпадают, так как соответствующие им квадратичные формы равны.

Следующая теорема позволяет определить оператор $\mathrm{L}(q)$ как предел в смысле равномерной резольвентной сходимости последовательности операторов $\mathrm{L}(q_n)$, $n \geq 1$. С этой целью мы сперва опишем сходимость в $H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$, введя норму (ср. [11], теорема 2.1):

$$H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}) :=$$

$$:= \bigl\{f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}) \,\bigm|\, f = g' + h,\ g \in L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}), h \in L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})\bigr\}, \tag{3}$$

$$\|f\|_{H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})} := \inf_{g'+h=f} \left(\|g\|_{L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})} + \|h\|_{L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})}\right). \tag{4}$$

Теорема 2 (о сходимости). *Пусть* q *и* q_n, $n \geq 1$, *принадлежат пространству* $H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$. *Тогда последовательность операторов* $\mathrm{L}(q_n)$, $n \geq 1$, *сходится к оператору* $\mathrm{L}(q)$ *в смысле равномерной резольвентной сходимости*:

$$\bigl\|\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{L}(q)) - \mathrm{R}(\lambda, \mathrm{L}(q_n))\bigr\| \to 0, \qquad n \to \infty, \quad \lambda \in \mathrm{Resolv}(\mathrm{L}(q)),$$

если только

$$q_n \to q \quad \textit{в} \quad H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}) \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Из теоремы 2 выводим следующий важный результат.

Теорема 3 (об аппроксимации). *Пусть задан оператор* $\mathrm{L}(q)$ *с* $q \in H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$, *где* q *имеет представление*

$$q = Q' + s, \qquad Q \in L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}), \quad s \in L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}).$$

Тогда существует последовательность операторов $\mathrm{L}(q_n)$, $n \geq 1$, *с* $q_n \in H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$, *где* q_n *имеют представление*

$$q_n = Q_n' + s_n, \qquad Q_n \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}) \cap L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}),$$

$$s_n \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}) \cap L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}),$$

такая, что оператор $\mathrm{L}(q)$ *является ее пределом в смысле равномерной резольвентной сходимости.*

В частности, если Q и s являются почти периодическими функциями Степанова, то Q_n и s_n могут быть выбраны конечными тригонометрическими многочленами (см. [16], теорема I.5.7.2). Если же Q и s являются ограниченными и равномерно непрерывными на всей действительной оси $\mathbb{R}$, то Q_n и s_n могут быть выбраны целыми аналитическими функциями (см. [16], теорема I.1.10.1, замечание).

Скалярный случай сильно сингулярных потенциалов исследован в [8] (см. также приведенную там библиографию).

В следующей теореме мы локализуем спектр оператора $\mathrm{L}(q)$.

Теорема 4. *Числовая область значений оператора* $\mathrm{L}(q)$, *а следовательно, и его спектр принадлежат параболе*

$$|\mathrm{Im}\,\lambda| \leq 5K\left(\mathrm{Re}\,\lambda + 4(2K+1)^4\right)^{3/4},$$

$$K := 2\left(\|s\|_{L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})} + m\|Q\|_{L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})}\right). \tag{6}$$

В работе мы используем следующие обозначения. Через $(\cdot\,,\cdot)_{\mathbb{C}^m}$ обозначаем скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^m$:

$$(u,v)_{\mathbb{C}^m} := \sum_{i=1}^{m} u_i\overline{v_i}, \qquad u = (u_1,\ldots,u_m), \quad v = (v_1,\ldots,v_m) \in \mathbb{C}^m;$$

через $(\cdot\,,\cdot)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)$ суммируемых с квадратом вектор-функций:

$$(u,v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} := \int\limits_{\mathbb{R}} (u,v)_{\mathbb{C}^m}\,dx;$$

через $H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)$ — пространство Соболева вектор-функций, компоненты которых принадлежат пространствам Соболева $H^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$:

$$H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \left\{f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \middle| f', f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})\right\},$$

$$\|f\|^2_{H^1(\mathbb{R},\mathbb{C})} := \|f'\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})} + \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})};$$

через $\mathfrak{D}'(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})$ — пространство обобщенных матричных функций над пространством $C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})$ бесконечно дифференцируемых матричных функций с компактным носителем.

Для произвольной матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{m\times m}$ через $A^T = \{a_{ij}^T\}_{i,j=1}^m$ обозначаем транспонированную матрицу, через $A^* = \{a_{ij}^*\}_{i,j=1}^m$ — эрмитово-сопряженную матрицу: $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$, где символом $\overline{a}$ обозначено соответствующее комплексно-сопряженное число.

Функциональная матрица $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^m$ принадлежит пространству $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})$, если каждый элемент матрицы $a_{ij}(x)$ принадлежит пространству $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $p \in [1,\infty)$.

Работа построена следующим образом. В пункте 2 для удобства читателя приведены известные вспомогательные результаты. Пункт 3 посвящен доказательству основных результатов. Предварительно мы докажем вспомогательный результат (теорему 6), утверждающий, что форма t_q, порожденная потенциалом $q \in H^{-1}_{\text{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$, является 0-ограниченной относительно формы t_0, порожденной свободным лапласианом.

2. Предварительные результаты. Определим сначала формально сопряженное за Лагранжем к квазидифференциальному выражению $\mathrm{l}[\cdot]$ квазидифференциальное выражение $\mathrm{l}^+[\cdot]$ и опишем свойства соответствующих предминимальных, минимальных и максимальных операторов. Более детальное изложение этих результатов можно найти в [18].

Основы теории квазидифференциальных операторов были заложены в работах Шина и Зеттла (см. [24] и приведенную там библиографию). С ее детальным изложением можно ознакомиться, например, в монографии [7]. В работе [10] авторы с помощью квазипроизводных определяют дифференциальные операторы произвольного порядка с сильно сингулярными коэффициентами, обобщая известные результаты [20] (гл. V), [21]. Автор работы [4] (см. также библиографию) продолжает дальнейшее обобщение теории квазидифференциальных операторов.

Определим формально сопряженное за Лагранжем к $\mathrm{l}[\cdot]$ квазидифференциальное выражение следующим образом:

$$\mathrm{l}^+[v] := -\left(v' - Q^* v\right)' - Q^*\left(v' - Q^* v\right) - \left((Q^*)^2 - s^*\right)v.$$

Тогда соответствующие максимальный и предминимальный операторы определяются так:

$$\mathrm{L}^+(q)v \equiv \mathrm{L}^+ v := \mathrm{l}^+[v],$$

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{L}^+) := \left\{v \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \;\middle|\; v,\, v' - Q^* v \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m),\ \mathrm{l}^+[v] \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)\right\}$$

и

$$\mathrm{L}^+_{00}(q)v \equiv \mathrm{L}^+_{00} v := \mathrm{l}^+[v],$$

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{L}^+_{00}) := \left\{v \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L}^+) \;\middle|\; \operatorname{supp} v \Subset \mathbb{R}\right\}.$$

Через L^+_0 мы обозначаем замыкание предминимального оператора L^+_{00} — минимальный оператор.

Предложение 1 (предложение 7 [18]). *Для операторов* L, L_0, L_{00} *и* L^+, L^+_0, L^+_{00} *справедливы следующие утверждения*:

1^0. *Операторы* L_{00} *и* L^+_{00} *плотно определены в гильбертовом пространстве* $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$.

2^0. *Справедливы равенства*

$$(\mathrm{L}_{00})^* = \mathrm{L}^+, \qquad \left(\mathrm{L}^+_{00}\right)^* = \mathrm{L}.$$

В частности, операторы L, L^+ *замкнуты, а операторы* L_{00}, L^+_{00} *допускают замыкание.*

3^0. *Области определения минимальных операторов* L_0, L^+_0 *допускают следующее описание*:

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{L}_0) = \left\{u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L}) \;\middle|\; [u, v]^{\infty}_{-\infty} = 0 \quad \forall v \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L}^+)\right\},$$

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{L}^+_0) = \left\{v \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L}^+) \;\middle|\; [u, v]^{\infty}_{-\infty} = 0 \quad \forall u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L})\right\}.$$

4^0. *Имеют место включения*

$$\mathrm{Dom(L)} \subset H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m),$$

$$\mathrm{Dom(L^+)} \subset H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m).$$

Напомним общие результаты, касающиеся локализации числовой области значений положительной формы, возмущенной сильно подчиненной формой [17]. Эти результаты мы применим для локализации спектра изучаемых операторов.

Пусть в гильбертовом пространстве H задана плотно определенная, замкнутая, положительная полуторалинейная форма $t_0[u,v]$ с областью определения $\mathrm{Dom}(t_0) \subset H$ и $\tau[u,v]$ — определенная в H полуторалинейная форма с областью определения $\mathrm{Dom}(\tau) \supset \mathrm{Dom}(t_0)$.

Предположим, что форма τ сильно подчинена форме t_0 и выполнены оценки

$$\exists\, a, b, s > 0: \qquad |\tau[u]| \leq a\varepsilon t_0[u] + b\varepsilon^{-s}\|tu\|^2_H \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad u \in \mathrm{Dom}(t_0). \tag{7}$$

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H сумму форм t_0 и τ:

$$t[u,v] := t_0[u,v] + \tau[u,v], \qquad \mathrm{Dom}(t) := \mathrm{Dom}(t_0).$$

Полуторалинейная форма t является плотно определенной, замкнутой, секториальной полуторалинейной формой в гильбертовом пространстве H. Пусть $\Theta(t)$ — числовая область значений квадратичной формы t:

$$\Theta(t) := t[u], \qquad u \in \mathrm{Dom}(t), \quad \|u\|_H = 1.$$

В силу сделанных предположений $\Theta(t_0) \subset [0, \infty)$. Выясним свойства множества $\Theta(t)$.

Лемма 1. *Имеют место оценки*

$$|\mathrm{Im}\, t[u]| \leq 2a\varepsilon \mathrm{Re}\, t[u] + 2b\varepsilon^{-s}\|u\|^2_H, \quad 0 < \varepsilon \leq (2a+1)^{-1}. \tag{8}$$

Введем обозначения

$$\mathcal{S}_{a,b,s,\varepsilon} := \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\Big|\, |\mathrm{Im}\,\lambda| \leq 2a\varepsilon \mathrm{Re}\,\lambda + 2b\varepsilon^{-s}\right\},$$

$$\mathcal{M}_{a,b,s} := \bigcap_{0<\varepsilon\leq(2a+1)^{-1}} \mathcal{S}_{a,b,s,\varepsilon}.$$

Тогда в силу леммы 1 имеем $\Theta(t) \subset \mathcal{M}_{a,b,s}$.

Лемма 2. *Множество $\mathcal{M}_{a,b,s}$ имеет следующее описание*:

$$\mathcal{M}_{a,b,s} = \begin{cases} \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\mathrm{Im}\,\lambda| \leq \dfrac{2a}{2a+1}\mathrm{Re}\,\lambda + 2b(2a+1)^s\right\}, & \lambda_0 \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq \lambda_1, \\ \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\mathrm{Im}\,\lambda| \leq 2(s+1)b^{1/(s+1)}\left(\dfrac{a}{s}\right)^{s/(s+1)}(\mathrm{Re}\,\lambda)^{s/(s+1)}\right\}, & \lambda_1 < \mathrm{Re}\,\lambda, \end{cases}$$

где $\lambda_0 := -\dfrac{b}{a}(2a+1)^{s+1}$ *— вершина сектора*

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\mathrm{Im}\,\lambda| \leq \frac{2a}{2a+1}\mathrm{Re}\,\lambda + 2b(2a+1)^s\right\}, \quad \lambda_1 := \frac{bs}{a}(2a+1)^{s+1}.$$

Из лемм 1 и 2 следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Числовая область значений $\Theta(t)$ полуторалинейной формы t принадлежит множеству $\mathcal{M}_{a,b,s}$:*

$$\mathcal{M}_{a,b,s} = \begin{cases} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\operatorname{Im}\lambda| \le \dfrac{2a}{2a+1}\operatorname{Re}\lambda + 2b(2a+1)^s \right\}, & \lambda_0 \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_1, \\ \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\operatorname{Im}\lambda| \le 2(s+1)b^{1/(s+1)} \left(\dfrac{a}{s}\right)^{s/(s+1)} (\operatorname{Re}\lambda)^{s/(s+1)} \right\}, & \lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda, \end{cases}$$

где $\lambda_0 = -\dfrac{b}{a}(2a+1)^{s+1}$ — вершина сектора

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\operatorname{Im}\lambda| \le \frac{2a}{2a+1}\operatorname{Re}\lambda + 2b(2a+1)^s \right\}, \quad \lambda_1 = \frac{bs}{a}(2a+1)^{s+1}.$$

***Замечание* 2.** Непосредственные вычисления показывают, что имеет место включение

$$\mathcal{M}_{a,b,s} \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\operatorname{Im}\lambda| \le 2(s+1)b^{1/(s+1)} \left(\frac{a}{s}\right)^{s/(s+1)} \left(\operatorname{Re}\lambda + \frac{b}{a}(2a+1)^{s+1}\right)^{s/(s+1)} \right\}.$$

3. Доказательство теорем. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ квадратичную форму, порожденную предминимальным оператором L_{00}:

$$\dot{t}_{\mathrm{L}_{00}}[u] := (\mathrm{L}_{00}u, u)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}, \qquad \operatorname{Dom}(\dot{t}_{\mathrm{L}_{00}}) := \operatorname{Dom}(\mathrm{L}_{00}).$$

Напомним, что $\operatorname{Dom}(\mathrm{L}_{00}) \subset H^1_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$. После упрощений получаем

$$\dot{t}_{\mathrm{L}_{00}}[u] = \left(u', u'\right)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - \left(Q, u'\overline{u} + u\overline{u}'\right)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + (su, u)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}.$$

Далее, для того чтобы говорить о свойствах формы $\dot{t}_{\mathrm{L}_{00}}$, мы сначала исследуем свойства квадратичных форм, порожденных лапласианом и функциями Q и s:

$$t_0[u] := \left(u', u'\right)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}, \qquad \operatorname{Dom}(t_0) := H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m),$$

$$t_Q[u] := -\left(Q, u'\overline{u} + u\overline{u}'\right)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}, \qquad \operatorname{Dom}(t_Q) := H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m),$$

$$t_s[u] := (su, u)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}, \qquad \operatorname{Dom}(t_s) := H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m).$$

Известно, что квадратичная форма t_0 плотно определена, замкнута и положительна. Ключевым при доказательстве основных теорем является следующий результат.

Теорема 6. *Формы t_Q и t_s являются 0-ограниченными относительно формы t_0, при этом для произвольного $\varepsilon \in (0, 1]$ выполнены оценки*

$$|t_s[u]| \le \|s\|_{L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})} \left(\varepsilon t_0[u] + 8\varepsilon^{-1}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}\right), \quad u \in \operatorname{Dom}(t_0), \tag{9}$$

$$|t_Q[u]| \le 2m\|Q\|_{L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})} \left(\varepsilon^{1/2} t_0[u] + 4\varepsilon^{-3/2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}\right), \quad u \in \operatorname{Dom}(t_0). \tag{10}$$

Симметричный скалярный вариант этой теоремы доказан в [11].

Из теоремы 6 получаем следующее важное следствие.

***Следствие* 1.** *Сумма форм $t_s + t_Q$ является формой, 0-ограниченной относительно формы t_0, при этом для произвольного $\varepsilon \in (0,1]$ имеет место оценка*

$$|t_s[u]| + |t_Q[u]| \le K\varepsilon t_0[u] + 4K\varepsilon^{-3}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}, \quad u \in \mathrm{Dom}(t_0), \tag{11}$$

$$K := 2\left(\|s\|_{L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})} + m\|Q\|_{L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})}\right).$$

Для доказательства теоремы 6 нам будут необходимы следующие известные оценки.

Лемма 3 (лемма 3.1 [11] (IV.1.19), [13])**.** *Для произвольной функции $f \in H^1([0,1],\mathbb{C})$ и произвольного $\varepsilon \in (0,1]$ выполнена оценка*

$$\max_{t\in[0,1]} |f(t)|^2 \le \varepsilon\|f'\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C})} + 8\varepsilon^{-1}\|f\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C})}. \tag{12}$$

Докажем теперь векторный вариант неравенств (12).

Лемма 4. *Для произвольной вектор-функции $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in H^1\big([0,1],\mathbb{C}^m\big)$, произвольного $\varepsilon \in (0,1]$ и произвольных индексов i, j таких, что $1 \le i,\ j \le m$, выполнены оценки*

$$\max_{t\in[0,1]} |f_i(t)| \max_{t\in[0,1]} |f_j(t)| \le \varepsilon\|f'\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C}^m)} + 8\varepsilon^{-1}\|f\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C}^m)}. \tag{13}$$

Доказательство. Используя (12) и тот факт, что

$$\|g_i\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C})} \le \|g\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C}^m)}, \qquad g \in L^2\big((0,1),\mathbb{C}^m\big), \quad 1 \le i \le m, \tag{14}$$

получаем необходимые оценки

$$\max_{t\in[0,1]} |f_i(t)| \max_{t\in[0,1]} |f_j(t)| \le$$

$$\le (\varepsilon\|f_i'\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C})} + 8\varepsilon^{-1}\|f_i\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C})})^{1/2}(\varepsilon\|f_j'\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C})} + 8\varepsilon^{-1}\|f_j\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C})})^{1/2} \le$$

$$\le \varepsilon\|f'\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C}^m)} + 8\varepsilon^{-1}\|f\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C}^m)}.$$

***Следствие* 2.** *Для произвольной вектор-функции $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in H^1\big([0,1],\mathbb{C}^m\big)$, произвольного $\varepsilon \in (0,1]$ и произвольных индексов i, j таких, что $1 \le i,\ j \le m$, выполнены оценки*

$$\left(\int\limits_0^1 \left|f_i'(t)\overline{f_j(t)}\right|^2 dt\right)^{1/2} \le \varepsilon^{1/2}\|f'\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C}^m)} + 4\varepsilon^{-3/2}\|f\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C}^m)}. \tag{15}$$

Доказательство. Используя (12), (13) и учитывая (14), имеем

$$\int\limits_0^1 \left|f_i'(t)\overline{f_j(j)}\right|^2 dt \le \max_{t\in[0,1]} |f_j(t)|^2 \|f_i'\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C})} \le \varepsilon\|f'\|^4_{L^2((0,1),\mathbb{C}^m)} +$$

$$+ 8\varepsilon^{-1}\|f\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C}^m)}\|f'\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C}^m)} \le$$

$$\leq \left(\varepsilon^{1/2}\|f'\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C}^m)} + 4\varepsilon^{-3/2}\|f\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{C}^m)}\right)^2,$$

откуда получаем (15).

***Доказательство теоремы* 6.** Использовав оценки (14) и (15), докажем (9) и (10). Имеем

$$|t_s[u]| =$$

$$= \left| (su,u)_{L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})} \right| = \left| \sum_{i,j=1}^m \int\limits_{\mathbb{R}} s_{ij}(t)u_j(t)\overline{u_i(t)}dt \right| \leq \sum_{i,j=1}^m \int\limits_{\mathbb{R}} \left| s_{ij}(t)u_j(t)\overline{u_i(t)} \right| dt \leq$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i,j=1}^m \int\limits_n^{n+1} |s_{ij}(t)|\, dt \max_{t\in[n,n+1]} |u_i(t)| \max_{t\in[n,n+1]} |u_j(t)| \leq$$

$$\leq \|s\|_{L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})} \left(\varepsilon\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + 8\varepsilon^{-1}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}\right).$$

Оценка (9) доказана.

Для доказательства оценки (10) используем оценки (15). Имеем

$$|t_Q[u]| \leq 2\left| \left(Q, u'\overline{u}\right)_{L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})} \right| = 2\left| \sum_{i,j=1}^m \int\limits_{\mathbb{R}} Q_{ij}(t)u_j(t)\overline{u_i'(t)}dt \right| \leq$$

$$\leq 2\sum_{i,j=1}^m \int\limits_{\mathbb{R}} \left| Q_{ij}(t)u_j(t)\overline{u_i'(t)} \right| dt = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i,j=1}^m \int\limits_n^{n+1} \left| Q_{ij}(t)u_j(t)\overline{u_i'(t)} \right| dt \leq$$

$$\leq 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i,j=1}^m \left(\int\limits_n^{n+1} |Q_{ij}(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_n^{n+1} \left| u_j(t)\overline{u_i'(t)} \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i,j=1}^m \int\limits_n^{n+1} |Q_{ij}(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \left(\varepsilon^{1/2}\|u'\|^2_{L^2((n,n+1),\mathbb{C}^m)} + \right.$$

$$\left. + 4\varepsilon^{-3/2}\|u\|^2_{L^2((n,n+1),\mathbb{C}^m)}\right) \leq$$

$$\leq 2m\|Q\|_{L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})}\left(\varepsilon^{1/2}t_0[u] + 4\varepsilon^{-3/2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}\right).$$

Оценка (10) доказана.

Теорема 6 доказана.

Таким образом, форма $\dot{t}_{\mathrm{L}_{00}}$ является суммой форм:

$$\dot{t}_{\mathrm{L}_{00}} = \dot{t}_0 + \dot{t}_Q + \dot{t}_s,$$

где через $\dot{t}_0$, $\dot{t}_Q$, $\dot{t}_s$ обозначены сужения соответствующих форм на $\mathrm{Dom}(\dot{t}_{\mathrm{L}_{00}})$. Учитывая свойство 1^0 предложения 1, а также следствие 1, получаем следующий результат.

Предложение 2. *Форма $\dot{t}_{\mathrm{L}_{00}}$ плотно определена, секториальна и замыкаема. Ее замыкание $t_{\mathrm{L}_{00}} := (\dot{t}_{\mathrm{L}_{00}})^{\sim}$ определено следующим образом*:

$$t_{\mathrm{L}_{00}}[u] = \big(u', u'\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - \big(Q, u'\overline{u} + u\overline{u}'\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + (su, u)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}\,,$$

$$\mathrm{Dom}(t_{\mathrm{L}_{00}}) = H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^m).$$

Теперь перейдем к доказательству основных результатов.

***Доказательство теоремы* 1.** Выше было показано, что операторы, порожденные формальным дифференциальным выражением (1), могут быть корректно определены в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)$ как квазидифференциальные. Их свойства описаны в предложении 1.

Пусть, как и выше, t_0 — квадратичная форма, порожденная лапласианом:

$$t_0[u] = (u', u')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}, \qquad \mathrm{Dom}(t_0) = H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^m).$$

Напомним, что квадратичная форма t_0 плотно определена, замкнута и положительна в $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$.

Рассмотрим форму, порожденную потенциалом $q \in H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})$:

$$t_q[u] := \langle qu, u\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}, \qquad \mathrm{Dom}(t_q) = H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^m).$$

Здесь через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}$ обозначена полуторалинейная форма, спаривающая дуальные относительно нулевого пространства $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)$ пространства $H^{-1}(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)$ и $H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)$. В силу предположений (2) форма t_q допускает представление

$$t_q[u] = \langle Q'u + su, u\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} = (Q'u, u)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + (su, u)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} =$$

$$= -(Q, u'\overline{u} + u\overline{u'})_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + (su, u) = t_Q[u] + t_s[u].$$

Теперь, принимая во внимание оценку (11), заключаем, что квадратичная форма

$$t[u] := t_0[u] + t_q[u] \equiv t_0[u] + t_Q[u] + t_s[u], \qquad \mathrm{Dom}(t) = H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^m),$$

является плотно определенной, замкнутой и секториальной в $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)$. Аналогично рассматривается соответствующая полуторалинейная форма $t[u,v]$.

Согласно первой теореме о представлении [13] (теорема VI.2.1) с формой t ассоциирован m-секториальный оператор $\mathrm{L}_{fs}(q) \equiv \mathrm{L}_{fs}$, имеющий следующие свойства:

(i) $\mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs}) \subset \mathrm{Dom(t)}$ и $t[u,v] = (\mathrm{L}_{fs}u, v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}$ $\forall u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs})$ $\forall v \in \mathrm{Dom}(t)$;

(ii) $\mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs})$ является ядром формы t;

(iii) если $u \in \mathrm{Dom}(t)$, $\omega \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)$ и $t[u,v] = (\omega, v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}$ имеет место для любого v, принадлежащего ядру формы t, то $u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs})$ и $\mathrm{L}_{fs}u = \omega$.

m-Секториальный оператор L_{fs} единственным образом определяется условием (i).

Оператор L_{fs} называется оператором, *ассоциированным с суммой форм* $t = t_0 + t_q$ (или просто *форм-суммой*), и обозначается следующим образом:

$$\mathrm{L}_{fs} = -\frac{d^2}{dx^2} \dotplus q, \qquad \mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs}) = \big\{u \in H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^m) \;\big|\, -u'' + qu \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)\big\}.$$

Покажем, что

$$\mathrm{L}_{fs}u = \mathrm{l}[u] \equiv -(u' - Qu)' - Q(u' - Qu) - (Q^2 - s)u, \quad u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs}),$$

и область определения $\mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs})$ оператора L_{fs} совпадает с множеством

$$\mathcal{N} := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \,\middle|\, u,\ u' - Qu \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m),\ \mathrm{l}[u] \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \right\}.$$

Пусть $u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs})$ и $\omega := \mathrm{L}_{fs}u$. Для произвольной функции $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \subset \mathrm{Dom}(t)$ имеем

$$t[u, v] = (\mathrm{L}_{fs}u, v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} = (\omega, v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} =$$

$$= (u', v')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - (Q, v'\overline{u} + v\overline{u'})_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + (su, v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} =$$

$$= (u' - Qu, v')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - (Qu', v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + (su, v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)},$$

откуда получаем соотношение

$$(\omega + Qu' - su, v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} = (u' - Qu, v')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}. \tag{16}$$

Введем обозначение $h' := \omega + Qu' - su$. Очевидно, что

$$h' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m), \quad \text{т. е.} \quad h \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m). \tag{17}$$

Из (16) получаем

$$(h', v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} = -(h, v')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} = (u' - Qu, v')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}$$

и

$$(h + u' - Qu, v')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} = 0. \tag{18}$$

Из (18) следует, что $h + u' - Qu = C$ (C — константа) и, как следствие, с учетом (17)

$$u' - Qu \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m). \tag{19}$$

Далее, учитывая (19), получаем

$$t[u, v] = (u', v')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - (Q, v'\overline{u} + v\overline{u'})_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + (su, v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} =$$

$$= (u' - Qu, v')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - (Qu', v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + (su, v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} =$$

$$= -\big((u' - Qu)', v\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - \big(Q(u' - Qu), v\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - \big((Q^2 - s)u, v\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} =$$

$$= \big(\mathrm{l}[u], v\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}.$$

Поэтому в силу первой теоремы о представлении

$$\mathrm{L}_{fs}u = \mathrm{l}[u] \equiv -(u' - Qu)' - Q(u' - Qu) - (Q^2 - s)u$$

и, как следствие, $\mathrm{l}[u] \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$.

Таким образом, включение
$$\mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs}) \subset \mathcal{N}$$
доказано. Докажем обратное включение.

Пусть $u \in \mathcal{N} \subset \mathrm{Dom}(t)$. Тогда для произвольной функции $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$, как и выше, имеем

$$t[u,v] = (u', v')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - (Q, v'\overline{u} + v\overline{u'})_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + (su, v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} = \big(\mathrm{l}[u], v\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)},$$

откуда, согласно первой теореме о представлении, следует, что $u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs})$ и $\mathrm{L}_{fs}u = \mathrm{l}[u]$. Таким образом, обратное включение

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs}) \supset \mathcal{N}$$

также доказано. Итак, мы показали, что

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{fs}) = \big\{u \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \;\big|\; u,\, u' - Qu \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m),\ \mathrm{l}[u] \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)\big\}. \tag{20}$$

Докажем теперь соотношения
$$\mathrm{L}_0 \subset \mathrm{L}_{fs} \subset \mathrm{L}. \tag{21}$$

Для произвольных $u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L}_{00}) \subset \mathrm{Dom}(t)$ и $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \subset \mathrm{Dom}(t)$ имеем

$$t[u,v] = (u', v')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - (Q, v'\overline{u} + v\overline{u'})_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + (su, v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} =$$

$$= (\mathrm{l}[u], v)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} = \big(\mathrm{L}_{00}u, v\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)},$$

откуда согласно следствию VI.2.4 [13] следует, что $\mathrm{L}_{00} \subset \mathrm{L}_{fs}$ и $\mathrm{L}_0 \subset \mathrm{L}_{fs}$.

Включение $\mathrm{L}_{fs} \subset \mathrm{L}$ следует из описания областей определения соответствующих операторов.

Далее, выше (см. предложение 2), было показано, что квадратичная форма $\dot{t}_{\mathrm{L}_{00}}$, порожденная предминимальным оператором L_{00}, является секториальной. Это означает, что оператор L_{00} также является секториальным, и тем более квазиаккретивным.

Аналогичным образом можно убедиться, что квадратичная форма $\dot{t}_{\mathrm{L}_{00}^+}$, порожденная предминимальным оператором L_{00}^+, также является секториальной. Следовательно, оператор L_{00}^+ также является секториальным, и тем более квазиаккретивным.

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно применить теорему 1 [18]: оператор L_0 является m-аккретивным тогда и только тогда, когда предминимальные операторы L_{00} и L_{00}^+ являются аккретивными, при этом $\mathrm{L}_0 = \mathrm{L}$, а также учесть соотношения (21) и (20).

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Пусть t — форма, с которой ассоциирован оператор $\mathrm{L}(q)$, а t_n — форма, с которой ассоциирован оператор $\mathrm{L}(q_n)$:

$$t[u] = \big(u', u'\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - (Q, u'\overline{u} + u\overline{u}')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + (su, u)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)},$$

$$\mathrm{Dom}(t) = H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m),$$

$$t_n[u] = \big(u', u'\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - (Q_n, u'\overline{u} + u\overline{u}')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + (s_n u, u)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)},$$

$$\mathrm{Dom}(t_n) = H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m).$$

Тогда, применяя оценку (11) с $s - s_n$ и $Q - Q_n$ вместо s и Q соответственно, получаем

$$\big|t[u] - t_n[u]\big| \le \big|(Q - Q_n, u'\overline{u} + u\overline{u}')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}\big| +$$

$$+\Big|\big((s - s_n)u, u\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}\Big| \le a_n\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + 4a_n\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}, \tag{22}$$

где

$$a_n := 2\Big(\|s - s_n\|_{L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})} +$$

$$+m\|Q - Q_n\|_{L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})}\Big) \to 0 \quad \text{при} \quad q_n \overset{H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})}{\longrightarrow} q, \quad n \to \infty. \tag{23}$$

Далее, снова используя оценку (11), имеем

$$\mathrm{Re}\, t[u] = \|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - \mathrm{Re}(Q, u'\overline{u} + u\overline{u}')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + \mathrm{Re}(su, u)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} \ge$$

$$\ge \|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - \big|(Q, u'\overline{u} + u\overline{u}')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}\big| - \big|(su, u)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}\big| \ge$$

$$\ge (1 - K\varepsilon)\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - 4K\varepsilon^{-3}\|u\|L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)^2. \tag{24}$$

Положим $\varepsilon := (2K + 1)^{-1}$, тогда из (24) получаем

$$\mathrm{Re}\, t[u] \ge (1 - K\varepsilon)\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - 4K\varepsilon^{-3}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} \ge$$

$$\ge 1/2\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - 4K(2K + 1)^3\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}$$

и, как следствие,

$$2\mathrm{Re}\, t[u] + 8K(2K + 1)^3\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} \geqslant \|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}.$$

Поэтому из (22) имеем

$$\big|t[u] - t_n[u]\big| \le 2a_n\, \mathrm{Re}\, t[u] + \big(8a_nK(2K + 1)^3 + 4a_n\big)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)},$$

и для завершения доказательства теоремы осталось применить теорему VI.3.6 [13].

Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** В силу теоремы 2, поскольку множество $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}) \cap$ $\cap L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$ является всюду плотным в пространстве $H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$ [17] (следствие 10.1), для произвольного потенциала

$$q = Q' + s \in H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$$

мы можем выбрать последовательность $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ бесконечно дифференцируемых функций, принадлежащих пространству Степанова $L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$:

$$q_n = Q'_n + s_n, \qquad Q_n \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}) \cap L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}),$$

$$s_n \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}) \cap L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}),$$

которая сходится в $H^{-1}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$ к q.

Для завершения доказательства теоремы 3 осталось только учесть, что сходимость (5), в силу определения (3), (4), эквивалентна сходимости

$$Q_n \to Q \quad \text{в} \quad L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}), \quad s_n \to s \quad \text{в} \quad L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 3 доказана.

***Доказательство теоремы* 4.** Рассмотрим квадратичную форму t, с которой ассоциирован оператор L :

$$t[u] = (u', u')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} - \big(Q, u'\overline{u} + u\overline{u}'\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)} + \big(su, u\big)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)},$$

$$\mathrm{Dom}(t) = H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m).$$

Согласно доказанному выше (следствие 1) для произвольного $\varepsilon \in (0,]$ имеет место оценка

$$\big|(Q, u'\overline{u} + u\overline{u}')_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}\big| + \big|(su, u)_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)}\big| \le K\varepsilon t_0[u] + 4K\varepsilon^{-3}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)},$$

$$K = 2\left(\|s\|_{L^1_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})} + m\|Q\|_{L^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{m\times m})}\right).$$

Для завершения доказательства осталось применить теорему 5 с $a = K$, $b = 4K$, $s = 3$.

Теорема 4 доказана.

1. *Albeverio S., Gestezy F., Hoegh Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. – Providence, RI: AMS Chelsea Publ., 2005.
2. *Albeverio S., Kurasov P.* Singular perturbations of differential operators. Solvable Schrödinger type operators // London Math. Soc. Lect. Note Ser. – 2000. – **271**.
3. *Albeverio S., Kostenko A., Malamud M.* Spectral theory of semibounded Sturm — Liouville operators with local point interactions on a discrete set // J. Math. Phys. – 2010. – **51**, № 10. – 24 p.
4. *Bruk V.* Invertible linear relations generated by an integral equation with Nevanlinna measure // Rus. Math. (Iz. VUZ). – 2013. – **57**, № 2. – P. 13 – 24.
5. *Eckhardt J., Gesztesy F., Nichols R., Teschl G.* Supersymmetry and Schrödinger-type operators with distributional matrix-valued potentials // J. Spectr. Theory. – 2014. – **4**, № 4. – P. 715 – 768.
6. *Eckhardt J., Gesztesy F., Nichols R., Teschl G.* Weyl — Titchmarsh theory for Sturm — Liouville operators with distributional potentials // Opusc. Math. – 2013. – **33**, № 3. – P. 467 – 563.
7. *Everitt W., Markus L.* Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators // Math. Surv. Monogr. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. – **61**.
8. *Golovaty Yu.* Schrödinger operators with $\alpha\delta' + \beta\delta$-like potentials: norm resolvent convergence and solvable models // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2012. – **18**, № 3. – P. 243 – 255.
9. *Goriunov A., Mikhailets V.* Regularization of singular Sturm — Liouville equations // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 2. – P. 120 – 130.
10. *Goriunov A., Mikhailets V., Pankrashkin K.* Formally self-adjoint quasi-differential operators and boundary value problems // Electron. J. Different. Equat. – 2013. – 16 p.
11. *Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Schrödinger operators with periodic singular potentials // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2001. – **7**, № 4. – P. 31 – 42.
12. *Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Self-adjointness of Schrödinger operators with singular potentials // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2012. – **18**, № 2. – P. 152 – 159.
13. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. – Berlin etc.: Springer, 1995.

14. *Kostenko A., Malamud M.* 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set // J. Different. Equat. – 2010. – **249**. – P. 253 – 304.
15. *de L. Kronig R., Penny W. G.* Quantum mechanics of electrons in crystal lattices // Proc. Roy. Soc. London A. – 1931. – **130**. – P. 499 – 513.
16. *Levitan B.* Almost periodic functions (in Russian). – Moscow: Gostekhtheorizdat, 1953.
17. *Mikhailets V., Molyboga V.* Schrödinger operators with complex singular potentials // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2013. – **19**, № 1. – P. 16 – 28.
18. *Mikhailets V., Molyboga V.* Remarks on Schrödinger operators with singular matrix potential // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2013. – **19**, № 2. – P. 161 – 167.
19. *Mirzoev K., Safonova T.* Singular Sturm — Liouville operators with distribution potential on spaces of vector functions // Dokl. Math. – 2011. – **84**, № 3. – P. 791 – 794.
20. *Naimark M.* Linear differential operators (in Russian). – Moscow: Nauka, 1969.
21. *Savchuk A., Shkalikov A.* Sturm — Liouville operators with distribution potentials (in Russian) // Tr. Mosk. Mat. Obshch. – 2003. – **64**. – P. 159 – 212.
22. *Schmüdgen K.* Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space // Grad. Texts Math. – Dordrecht etc.: Springer, 2012. – **265**.
23. *Weidmann J.* Spectral theory of ordinary differential operators // Lect. Notes Math. – 1987. – **1258**.
24. *Zettl A.* Formally self-adjoint quasi-differential operator // Rocky Mountain J. Math. – 1975. – **5**, № 3. – P. 453 – 474.

Получено 16.01.15