УДК 517.946+511.37

В. С. Ільків, Н. І. Страп (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У ШКАЛІ ПРОСТОРІВ СОБОЛЄВА ТА УТОЧНЕНІЙ ШКАЛІ

The paper is devoted to the investigation of the solvability of nonlocal boundary-value problem with one parameter for a system of differential-operator equations in the Sobolev scale of spaces of functions of many complex variables and in the scale of Hörmander of spaces which form a refined Sobolev scale. By using the metric approach, we prove the theorems on lower estimates of small denominators appearing in the construction of solutions of the analyzed problem. They imply the unique solvability of the problem for almost all vectors formed by the coefficients of the equation and the parameter of nonlocal conditions.

Изучена разрешимость нелокальной краевой задачи с одним параметром для системы дифференциально-операторных уравнений в шкале пространств Соболева функций многих комплексных переменных и в шкале пространств Хермандера, которые образуют уточненную шкалу Соболева. Доказаны теоремы метрического характера об оценках снизу малых знаменателей, появившихся при построении решения исследуемой задачи, из которых следуют условия ее однозначной разрешимости для почти всех векторов, составленных из коэффициентов уравнения и параметра нелокальных условий.

1. Вступ. В теорії рівнянь з частинними похідними важливим є питання про розв'язність некоректних задач, зокрема нелокальних крайових задач для різних типів рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними у соболєвських просторах [1, 2]. В останні роки посилився інтерес до розгляду задач для таких рівнянь та систем у просторах, показником гладкості елементів яких є функціональний параметр [3, 4], а не число, як у просторах Соболєва. Такими просторами є простори Хермандера [5], які займають центральне місце серед просторів узагальненої гладкості. Отже, значний науковий інтерес має поширення теорії нелокальних крайових задач для рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними на клас гільбертових просторів Хермандера, які утворюють уточнену шкалу соболєвських просторів. Цю шкалу введено і проаналізовано в роботах [6, 7], також застосовано до еліптичних задач [3, 6 – 8].

Особливістю даної роботи є дослідження та порівняння умов однозначної розв'язності нелокальної задачі для системи диференціально-операторних рівнянь у шкалі соболєвських просторів функцій багатьох комплексних змінних та у шкалі просторів Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу. Гладкість функцій у соболєвських просторах визначається лише числовим параметром, а в уточненій соболєвській шкалі — двома параметрами: числовим та функціональним (повільно змінною на нескінченності функцією). Цей функціональний параметр може задавати додатну або від'ємну гладкість і дозволяє більш тонко охарактеризувати гладкість функцій простору. У роботі встановлено необхідні та достатні умови єдиності розв'язку розглядуваної задачі у шкалі просторів Соболєва та в уточненій шкалі, а також достатні умови існування розв'язку у даних шкалах просторів. Аналогічні дослідження раніше були проведені і для одного диференціально-операторного рівняння.

2. Основні позначення та постановка задачі. Нехай $\mathcal{S}$ — однозв'язна область проколотої у нулі комплексної площини, $\mathcal{D}^p = [0, T] \times \mathcal{S}^p$, де $T > 0$, $p \geq 2$.

Введемо лінійний простір **W** кратних скінченних сум (основних функцій) вигляду $P(z) = \sum_k P_k z^k = \sum_{k_1} \ldots \sum_{k_p} P_{k_1,\ldots,k_p} z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p}$, де $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathcal{S}^p$, P_k — комплексні коефіцієнти, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$. Елементи цього простору є многочленами $2p$ комплексних змінних $z_1, \ldots, z_p$, $z_1^{-1}, \ldots, z_p^{-1}$, а також дробово-раціональними функціями векторної змінної z.

Простір $\mathbf{W}'$ спряжений із простором $\mathbf{W}$; це простір узагальнених функцій (лінійних неперервних функціоналів), які є формальними рядами Лорана $Q(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} Q_k z^k$, що діють на основну функцію $P \in \mathbf{W}$ за правилом $\langle Q, P\rangle = \sum_k Q_k \overline{P}_k$.

Позначимо через $\mathcal{M}_1$ множину всіх повільно змінних на ∞ за Караматою функцій, тобто множину таких функцій ψ, для яких $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)} = 1$ для кожного $\lambda > 0$, а через $\mathcal{M}$ множину всіх вимірних за Борелем на півосі $[1, \infty)$ функцій $\psi\colon [1, \infty) \to (0, \infty)$ з $\mathcal{M}_1$ таких, що функції ψ і $1/\psi$ обмежені на кожному відрізку $[1; b]$, де $1 < b < \infty$.

Введемо шкалу просторів $\{\mathbf{H}_q^\psi(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R},\psi\in\mathcal{M}}$, де $\mathbf{H}_q^\psi(\mathcal{S}^p)$, $q\in\mathbb{R}$, $\psi\in\mathcal{M}$, — гільбертів простір функцій $v = v(z)$ із заданим в ньому скалярним добутком $(v, w)_{\mathbf{H}_q^\psi(\mathcal{S}^p)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2q}\psi^2(\tilde{k}) v_k \bar{w}_k$, де $\tilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \ldots + k_p^2}$, $v = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k z^k$, $w = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} w_k z^k$, який стандартним чином породжує норму $\|v\|^2_{\mathbf{H}_q^\psi(\mathcal{S}^p)} = (v, v)_{\mathbf{H}_q^\psi(\mathcal{S}^p)}$. У шкалі $\{\mathbf{H}_q^\psi(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R},\psi\in\mathcal{M}}$ числовий параметр q визначає основну (степеневу) гладкість, а функціональний параметр ψ — допоміжну, тобто параметр ψ уточнює основну q-гладкість. Сім'ю функціональних просторів $\{\mathbf{H}_q^\psi(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R},\psi\in M}$ назвемо уточненою шкалою в $\mathcal{S}^p$. При $\psi \equiv 1$ простір $\mathbf{H}_q^\psi(\mathcal{S}^p)$ збігається з соболєвським простором, зокрема, позначаємо через $\mathbf{H}_q^1(\mathcal{S}^p) \neq \mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$ гільбертів простір функцій $v = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k z^k$ із заданим скалярним добутком $(v, w)_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} v_k \overline{w}_k$ і квадратом норми $\|v\|^2_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)} = (v, v)_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)}$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливими є вкладення $\mathbf{W} \subset \mathbf{H}_{q+\varepsilon}(\mathcal{S}^p) \hookrightarrow \mathbf{H}_q^\psi(\mathcal{S}^p) \hookrightarrow \hookrightarrow \mathbf{H}_{q-\varepsilon}(\mathcal{S}^p) \subset \mathbf{W}'$.

Введемо шкали просторів $\{\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R},\psi\in\mathcal{M}}$ і $\{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ і $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — банахові простори функцій $u = u(t, z)$ таких, що похідні $\dfrac{\partial^r u(t, z)}{\partial t^r} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(r)}(t) z^k$, $r = 0, 1, \ldots, n$, для кожного $t \in [0, T]$ належать до просторів $\mathbf{H}_{q-r}^\psi(\mathcal{S}^p)$ і $\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S}^p)$ відповідно і неперервні по t у цих просторах. Норми у даних просторах задають формули $\|u\|^2_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)} = \sum_{r=0}^n \max_{[0,T]} \left\| \dfrac{\partial^r u(t, \cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S}^p)}$ та $\|u\|^2_{\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)} = \sum_{r=0}^n \max_{[0,T]} \left\| \dfrac{\partial^r u(t, \cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{\mathbf{H}^\psi_{q-r}(\mathcal{S}^p)}$.

Нехай $\bar{\mathbf{H}}_q^\psi(\mathcal{S}^p)$ і $\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)$ — простори вектор-функцій $v = v(z) = \mathrm{col}\big(v_1(z), \ldots, v_m(z)\big)$, де $v_j = v_j(z)$, $j = 1, \ldots, m$, належать до просторів $\mathbf{H}_q^\psi(\mathcal{S}^p)$ і $\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$ відповідно. Норми в даних просторах задаються формулами $\|v\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_q^\psi(\mathcal{S}^p)} = \sum_{j=1}^m \|v_j\|^2_{\mathbf{H}_q^\psi(\mathcal{S}^p)}$ і $\|v\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)} = \sum_{j=1}^m \|v_j\|^2_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)}$.

Простори $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$ і $\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ є просторами функцій $u = u(t, z) = \mathrm{col}\big(u_1(t, z), \ldots, u_m(t, z)\big)$ із складовими $u_j = u_j(t, z)$, $j = 1, \ldots, m$, відповідно з просторів $\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ і $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$ та квадратами норм $\|u\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)} = \sum_{j=1}^m \|u_j\|^2_{\mathbf{H}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)}$ і $\|u\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)} = \sum_{j=1}^m \|u_j\|^2_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)}$.

Введемо функцію $\zeta(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{-z}$, яка існує у півплощині $\mathrm{Re}\, z > p$, та функції $\omega_j(r) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{-p}\psi_j^{-r}(\tilde{k})$, $j = 1, 2$, де $\psi_j \in \mathcal{M}$, $r \in \mathbb{R}$ і $\omega_1(\nu) < \infty$ для $\nu = \dfrac{2}{m(mn-1)}$,

$\omega_2(2) < \infty$. Функції ψ_1 та ψ_2 з такими властивостями існують (зокрема, степені логарифма), і якщо справджується $\psi_1\psi_2^m = \psi_2^{m^2 n}$, то умови $\omega_1(\nu)<\infty$, $\omega_2(2)<\infty$ виконуються одночасно.

Позначимо через $\mathcal{O}_R$ круг радіуса R із центром у початку координат комплексної площини.

Розглянемо в області $\mathcal{D}^p$ задачу з двоточковими нелокальними умовами для системи однорідних диференціально-операторних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\sum_{s_0+|s|\le n} A_{s_0,s} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0, \tag{1}$$

$$\mu \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=T} = \varphi_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

де $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $A_{s_0,s}$ — квадратні матриці розміру m, $A_{n,0,\ldots,0} = I_m$ — одинична матриця; $\varphi_j = \varphi_j(z) = \operatorname{col}\big(\varphi_{j1}(z), \ldots, \varphi_{jm}(z)\big)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, — задані вектор-функції, $u = u(t,z) = \operatorname{col}\big(u_1(t,z), \ldots, u_m(t,z)\big)$ — шукана вектор-функція, $n, m \ge 1$. Оператор $B = (B_1, B_2, \ldots, B_p)$ складено з операторів $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$ узагальненого диференціювання, $B^s = B_1^{s_1} \ldots B_p^{s_p}$ — степені оператора B. З рівностей $B_j(z^k) = k_j z^k$, де $j = 1, \ldots, p$, $k \in \mathbb{Z}^p$, випливає, що B_j для довільного $s \in \mathbb{R}$ діють неперервно з $\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)$ у $\mathbf{H}_{q-1}^{\psi}(\mathcal{S}^p)$. Знайдемо умови розв'язності задачі (1), (2) у просторах $\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ і $\bar{\mathbf{H}}_q^{n}(\mathcal{D}^p)$.

Означення. *Під розв'язком задачі* (1), (2) *у просторі* $\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ *розуміємо вектор-функцію* $u = u(t,z) = \operatorname{col}\big(u_1(t,z), \ldots, u_m(t,z)\big)$ *у просторі* $(\mathbf{W}')^m$ *для всіх* $t \in [0,T]$, *яка задовольняє систему* (1) *і умови* (2) *та належить до простору* $\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$.

Вважаємо, що елементи матриць $A_{s_0,s}$ з системи (1) розглядаються у крузі $\mathcal{O}_A$, параметр μ з умов (2) — у крузі $\mathcal{O}_M$, де A та M — додатні фіксовані радіуси кругів.

3. Побудова формального розв'язку. Теорема єдиності. Для побудови розв'язку задачі (1), (2) введемо псевдодиференціальні оператори $F(B)$ на основі довільних послідовностей комплексних матриць $F(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Кожна така послідовність породжує псевдодиференціальний оператор $F(B) = F(B_1, \ldots, B_p) = F\left(z_1 \dfrac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, z_p \dfrac{\partial}{\partial z_p}\right)$, який діє на $\varphi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \phi(k) z^k$ за формулою $F(B)\varphi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} F(k)\phi(k) z^k$.

Послідовність $\phi(k)$ коефіцієнтів розвинення функції $\varphi(z)$ у ряд Фур'є також породжує відповідний оператор $\phi(B)$. Таким чином, кожну функцію φ з простору $\mathbf{H}_q^{\psi}(\mathcal{S}^p)$ або $\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$ пов'яжемо з псевдодиференціальним оператором $\phi(B)$ формулою $\varphi(z) = \phi(B)\delta(z)$, де $\delta(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} z^k$. Послідовність функцій $F(t,k)$, $t \in [0,T]$, породжує оператор-функцію $F(t,B)$, а функція $v(t,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} V(t,k) z^k$ з простору $\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ або $\bar{\mathbf{H}}_q^{n}(\mathcal{D}^p)$ — оператор-функцію $V(t,B)$, причому $v(t,z) = V(t,B)\delta(z)$.

Нелокальна задача (1), (2) еквівалентна задачі з нелокальними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку за часовою змінною

$$\frac{\partial v(t,z)}{\partial t} = L(B) v(t,z), \tag{3}$$

$$\mu v(0,z) - v(T,z) = \varphi(z), \tag{4}$$

де $v(t,z)=\mathrm{col}\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \dfrac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}\right)=\mathrm{col}(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$, $\varphi(z)=\mathrm{col}\big(\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z)\big)$,

$$L(B) = \begin{pmatrix} 0 & & I_{(n-1)m} & \\ -L_n(B) & -L_{n-1}(B) & \ldots & -L_1(B) \end{pmatrix},$$

$$L_r(B) = \sum_{|s|\le r} A_{n-r,s} B^s, \qquad L_r(B) = (L_r^{ij}(B))_{i,j=1,\ldots,m}, \quad r = 1, \ldots, n.$$

Врахувавши введені псевдодиференціальні оператори, запишемо рівності

$$v(t,z) \equiv V(t,B)\delta(z) \equiv \mathrm{col}\big(V_0(t,B), V_1(t,B), \ldots, V_{n-1}(t,B)\big)\delta(z), \tag{5}$$

$$\varphi(z) \equiv \phi(B)\delta(z) \equiv \mathrm{col}\big(\phi_0(B), \phi_1(B), \ldots, \phi_{n-1}(B)\big)\delta(z). \tag{6}$$

Тоді задача (3), (4) еквівалентна множині нелокальних крайових задач на проміжку $[0,T]$ для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dV(t,k)}{dt} = L(k)V(t,k), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{7}$$

$$\mu V(0,k) - V(T,k) = \phi(k). \tag{8}$$

Нехай $Z=\mathrm{diag}(\tilde{k}^n I_m, \ldots, \tilde{k}^2 I_m, \tilde{k} I_m)$, $ZV(t,k)=\tilde{V}(t,k)$ і $Z\phi(k)=\tilde{\phi}(k)$, тоді систему (7), (8) запишемо у вигляді

$$\frac{d\tilde{V}(t,k)}{dt} = \tilde{k}\tilde{L}(k)\tilde{V}(t,k), \tag{9}$$

$$\mu\tilde{V}(0,k) - \tilde{V}(T,k) = \tilde{\phi}(k), \tag{10}$$

де

$$\tilde{L}(k)=\begin{pmatrix} 0 & & I_{(n-1)m} & \\ -\tilde{L}_n(k) & -\tilde{L}_{n-1}(k) & \ldots & -\tilde{L}_1(k) \end{pmatrix},$$

а $\tilde{L}_j(k)=\tilde{k}^{-j}L_j(k) = \sum_{|s|\le j} A_{n-j,s}\left(\dfrac{k}{\tilde{k}}\right)^s \tilde{k}^{|s|-j}$.

Якщо величини $\lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, nm$, є коренями характеристичного рівняння $f(\lambda, k) = = \det\big(\lambda I_{nm} - \tilde{L}(k)\big) = 0$, то $\gamma_j(k) = \tilde{k}\lambda_j(k)$ є коренями рівняння $\det\big(\gamma I_{nm} - L(k)\big)=0$, тобто власними значеннями матриці $L(k)$. Визначник $f(\lambda,k)$ можна записати у вигляді формули $f(\lambda,k) = \sum_{j=0}^{mn} f_j(k)\lambda^{mn-j} = \lambda^{mn} + \ldots + (-1)^{mn}\det\tilde{L}(k)$.

З оцінки Коші [9] для коренів $\lambda_j(k)$ маємо нерівності $|\lambda_j(k)| \le 1+\max\big\{|f_1(k)|, \ldots, |f_{mn}(k)|\big\}$, $j = 1, \ldots, nm$. Отже, величини $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{mn}(k)$ є рівномірно обмеженими по k разом із коефіцієнтами $f_1(k), \ldots, f_{mn}(k)$ многочлена $f(\lambda,k)$.

Загальний розв'язок рівняння (9) запишемо у вигляді

$$\tilde{V}(t,k) = e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)t}C(k), \tag{11}$$

де $C(k)$ — довільний вектор із констант. Підставимо рівність (11) в умови (10) і отримаємо систему алгебраїчних рівнянь $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})C(k) = \tilde{\phi}(k)$ невідомого вектора $C(k)$. Якщо матриця $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})$ невироджена, то $C(k) = (\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})^{-1}\tilde{\phi}(k)$ і

$$\tilde{V}(t,k) = e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)t}(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})^{-1}\tilde{\phi}(k). \tag{12}$$

Оскільки визначник матриці дорівнює добутку її власних значень, а власними значеннями матриці $\big(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T}\big)$ є числа $\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}$, то

$$\det(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T}) = \prod_{j=1}^{nm}(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}). \tag{13}$$

Сформулюємо теорему єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторах $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$ і $\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторах* $\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ *і* $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння*

$$\det\left(\frac{\ln\mu - i2\pi k_0}{\tilde{k}T} I_{nm} - \tilde{L}(k)\right) = 0 \tag{14}$$

не мало розв'язків у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай розв'язок задачі (1), (2) є єдиним. Тоді задача (9), (10) має єдиний розв'язок для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, що зображується у вигляді (12). Отже, матриця $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})$ є невиродженою. Таким чином, з урахуванням рівності (13) $\mu \neq e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}$, де числа $\lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, nm$, є коренями характеристичного рівняння $\det\Big(\lambda I_{nm} - \tilde{L}(k)\Big) = 0$. Логарифмуючи, отримуємо, що рівняння (14) не має розв'язків у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$.

Достатність доведемо методом від супротивного. Нехай числа $k_0^*, k_1^*, \ldots, k_p^*$ є розв'язком рівняння (14). Тоді, вважаючи $\lambda_1(k^*) = (\ln\mu - i2\pi k_0^*)/(\widetilde{k^*}T)$ для $k^* = (k_1^*, \ldots, k_p^*)$, робимо висновок, що однорідна задача (9), (10) має безліч розв'язків $\tilde{V}(t, k^*)$, що утворюють підпростір та визначаються формулою (11), у якій $C(k)$ є загальним розв'язком виродженої однорідної системи алгебраїчних рівнянь $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})C(k) = 0$ для $k = k^*$. Таким чином, розв'язок задачі (1), (2) не є єдиним.

Теорему доведено.

Якщо корені $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{mn}(k)$ многочлена $f = f(\lambda, k)$ є різними, то позначимо через $\Omega(t,k)$ вектор значень функції $\rho(t,\lambda) = \dfrac{e^{\tilde{k}\lambda t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda T}}$ на цих коренях, $W(k)$ — матриця Вандермонда, побудована за коренями $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{nm}(k)$, і $R(k) = \big(\tilde{\phi}(k), \tilde{L}(k)\tilde{\phi}(k), \ldots, \tilde{L}^{nm-1}(k)\tilde{\phi}(k)\big)$. У таких позначеннях розв'язок (12) задачі (9), (10) записується у вигляді [10]

$$\tilde{V}(t,k) = R(k)W^{-T}(k)\Omega(t,k), \tag{15}$$

де $W^{-T}(k) = \big(W^{-1}(k)\big)^T = \big(W^T(k)\big)^{-1}$ — матриця, обернена до транспонованої матриці Вандермонда, для обчислення якої використовуємо формулу

$$W^{-T}(k) = \big(f_{mn+1-i-j}(k)\big)_{i,j=1}^{mn} W(k)\big(\mathrm{diag}\big(f'(\lambda_j(k),k)\big)_{j=1}^{mn}\big)^{-1}, \qquad f' = \frac{\partial f}{\partial\lambda}. \tag{16}$$

Тут $f_j(k)$ — коефіцієнти многочлена $f(\cdot,k)$, зокрема $f_0(k)=1$, $f_j(k)=0$ при $j<0$. Вирази $\big(f'(\lambda_j(k),k)\big)^{-2}$ перетворимо до дробів $\dfrac{1}{\mathrm{Res}\,(f,f')}\prod_{\substack{1\le\alpha<\beta\le mn\\ \alpha,\beta\ne j}}(\lambda_\alpha(k)-\lambda_\beta(k))^2$, де $\mathrm{Res}\,(f,f')=\prod_{j=1}^{mn}f'(\lambda_j(k),k)$ — результант [11] многочленів f та f' і $\mathrm{Res}\,(f,f')=\det S(f)$, а $S(f)$ — матриця Сильвестра многочлена $f=f(\lambda,k)$, яка є блочно-тепліцевою матрицею

$$S(f)=\begin{pmatrix}\big(f_{j-i}(k)\big)_{i,j=1}^{mn-1,2mn-1}\\ \big((mn-j+i)f_{j-i}(k)\big)_{i,j=1}^{mn,2mn-1}\end{pmatrix},\quad f_j(k)=0\quad\text{при}\quad j>mn.$$

4. Дослідження умов розв'язності задачі в уточненій шкалі. Встановимо умови, за яких розв'язок задачі (1), (2) існує у просторі $\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$. Оскільки

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n}=-L_n(B)u-L_{n-1}(B)\frac{\partial u}{\partial t}-\ldots-L_1(B)\frac{\partial^{n-1}u}{\partial t^{n-1}}$$

для розв'язку u, то існує таке число $C_1=C_1(n,m,p,A)>0$, що

$$\Big\|\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\Big\|_{\bar{\mathbf{H}}^\psi_{q-n}(\mathcal{S}^p)}\le C_1\left(\|u\|^2_{\bar{\mathbf{H}}^\psi_{q}(\mathcal{S}^p)}+\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{\bar{\mathbf{H}}^\psi_{q-1}(\mathcal{S}^p)}+\ldots+\Big\|\frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}\Big\|^2_{\bar{\mathbf{H}}^\psi_{q-n+1}(\mathcal{S}^p)}\right).$$

Тобто у просторі $\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ виконується нерівність

$$\|u\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)}\le(C_1+1)\sum_{j=0}^{n-1}\max_{[0,T]}\Big\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big\|_{\bar{\mathbf{H}}^\psi_{q-j}(\mathcal{S}^p)}=$$

$$=(C_1+1)\sum_{j=0}^{n-1}\max_{[0,T]}\|v_j\|_{\bar{\mathbf{H}}^\psi_{q-j}(\mathcal{S}^p)}=$$

$$=(C_1+1)\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{[0,T]}|\tilde{k}^{q-j}\psi(\tilde{k})V_j(t,k)|^2=$$

$$=(C_1+1)\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{[0,T]}|\tilde{k}^{q-n}\psi(\tilde{k})\tilde{V}_j(t,k)|^2. \tag{17}$$

Запишемо оцінку

$$|\tilde{k}^{q-n}\psi(\tilde{k})\tilde{V}_j(t,k)|^2\le C_2\|\Omega(t,k)\|^2\|W^{-T}(k)\|^2\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}^{q-n}\psi(\tilde{k})\tilde{\phi}_j(k)|^2=$$

$$=C_2\|\Omega(t,k)\|^2\|W^{-T}(k)\|^2\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}^{q-j}\psi(\tilde{k})\phi_j(k)|^2, \tag{18}$$

де $C_2>0$ — величина, яка залежить від n, m, p та коефіцієнтів системи (1).

Сформулюємо та доведемо теорему існування розв'язку задачі (1), (2) у $\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 2. *Нехай $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$, $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2 \in \mathcal{M}$, виконуються умови теореми 1 та для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ та всіх $t \in [0, T]$ виконуються нерівності*

$$|\det S(f)| \geq \tilde{\psi}_1^{-1}(\tilde{k})\tilde{k}^{-\eta_1}, \tag{19}$$

$$\big|\rho\big(t, \lambda_l(k)\big)\big| \leq \tilde{\psi}_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}, \quad l = 1, \ldots, mn. \tag{20}$$

Якщо $\varphi_j \in \bar{\mathbf{H}}^{\hat{\psi}}_{q-j+\gamma_1}(\mathcal{S}^p)$, де $\gamma_1 = \eta_1 + \eta_2$, $\hat{\psi} = \psi\tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_2$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) *з простору $\bar{\mathbf{H}}^{n\psi}_q(\mathcal{D}^p)$, який неперервно залежить від правих частин умов* (2).

Доведення. З урахуванням оцінок (18) – (20), формули (16) для обчислення $W^{-T}(k)$, а також обмеженості зверху величини $|\det S(f)|\|W^{-T}(k)\|$ нерівність (17) набере вигляду $\|u\|^2_{\bar{\mathbf{H}}^{n\psi}_q(\mathcal{D}^p)} \leq$ $\leq C_3 \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\bar{\mathbf{H}}^{\hat{\psi}}_{q-j+\gamma_1}(\mathcal{S}^p)}$, де величина $C_3 > 0$ залежить від параметрів задачі (1), (2), а із властивостей множини M випливає, що $\widehat{\psi} \in \mathcal{M}$.

Теорему доведено.

Встановимо умови, за яких виконується (19), для чого використаємо такі леми [12].

Лема 1. *Нехай многочлен $g(\lambda)$ має вигляд $g(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} g_j \lambda^{n-j}$, тоді*

$$\det S(g) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} (-1)^{\alpha + n\alpha} \alpha^\alpha (n-\alpha)^{n-\alpha} g_0^\alpha g_n^{n-\alpha-1} g_\alpha^n + \ldots,$$

де три крапки означають доданки, що не містять n-х степенів коефіцієнтів g_α.

Лема 2. *Якщо $f(\lambda) = h(\lambda) + ag(\lambda)$, де $f(\lambda)$, $h(\lambda)$, $g(\lambda)$ — комплексні многочлени і $f(\lambda) =$ $= f_0\lambda^t + f_1\lambda^{t-1} + \ldots + f_t$, $h(\lambda) = h_0\lambda^t + h_1\lambda^{t-1} + \ldots + h_t$, $g(\lambda) = g_0\lambda^s + g_1\lambda^{s-1} + \ldots + g_s$, де $s < t$, а $S(f)$, $S(h)$, $S(g)$ — матриці Сильвестра цих многочленів, то визначник $\det S(f)$ матриці $S(f)$ є многочленом за змінною a степеня не вищого за $t + s - 1$, причому*

$$\det S(f) = \big((s-t)h_0 g_0\big)^{t-s} \det S(g) a^{t+s-1} + \ldots + \det S(h).$$

Доведення леми 1 і часткове (при $t = 2s$) доведення леми 2 наведено у роботі [12].

Позначимо через $b_1, \ldots, b_p$ коефіцієнти при степенях $B_1^n, \ldots, B_p^n$ оператора $\tilde{L}_n^{11}(B)$, через $b_{p+1}, \ldots, b_{2p}$ відповідні коефіцієнти оператора $\tilde{L}_n^{22}(B)$ і т. д., через $b_{(m-1)p+1}, \ldots, b_{mp}$ відповідні коефіцієнти оператора $\tilde{L}_n^{mm}(B)$, де $\tilde{L}_n = (\tilde{L}_n^{ij})_{i,j=1,\ldots,m}$, і нехай $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{mp})$.

Многочлен $f(\lambda, k)$ можна записати у вигляді $f(\lambda, k) = b_j \left(\dfrac{k_j}{\tilde{k}}\right)^n g_1(\lambda, k) + h_1(\lambda, k)$, $j =$ $= 1, \ldots, p$, де $g_1(\lambda, k)$ та $h_1(\lambda, k)$ залежать від j, але не залежать від b_j. Аналогічно многочлен $g_1(\lambda, k)$ можна записати так: $g_1(\lambda, k) = b_{p+j} \left(\dfrac{k_j}{\tilde{k}}\right)^n g_2(\lambda, k) + h_2(\lambda, k)$, $j = 1, \ldots, p$, де $g_2(\lambda, k)$ та $h_2(\lambda, k)$ не залежать від b_{p+j}. Многочлени $g_i(\lambda, k)$ для кожного $i = 1, \ldots, m-2$ мають вигляд $g_i(\lambda, k) = b_{ip+j} \left(\dfrac{k_j}{\tilde{k}}\right)^n g_{i+1}(\lambda, k) + h_{i+1}(\lambda, k)$, $j = 1, \ldots, p$, де $g_{i+1}(\lambda, k)$ та $h_{i+1}(\lambda, k)$ не залежать від b_{ip+j}. Застосувавши для $f(\lambda, k)$ і $g_i(\lambda, k)$, $i = 1, \ldots, m-2$, лему 2 при $a =$ $= b_j \left(\dfrac{k_j}{\tilde{k}}\right)^n$ у розкладі многочлена $f(\lambda, k)$ і $a = b_{ip+j} \left(\dfrac{k_j}{\tilde{k}}\right)^n$ у розкладі многочленів $g_i(\lambda, k)$

та при $g_{l0} = h_{l0} = 1$, де g_{l0} і h_{l0} — старші коефіцієнти многочленів $g_l(\lambda,k)$ і $h_l(\lambda,k)$, $l = 1,2,\ldots,m-1$, отримаємо

$$\det S\big(f(\lambda,k)\big) = (-1)^n n^n \left(\frac{k_j}{\tilde{k}}\right)^{n(2mn-n-1)} (b_j)^{2mn-n-1} \det S(g_1) + \ldots, \tag{21}$$

$$\det S\big(g_i(\lambda,k)\big) = (-1)^n n^n \left(\frac{k_j}{\tilde{k}}\right)^{n(2mn-(2i+1)n-1)} (b_{ip+j})^{2mn-(2i+1)n-1} \det S(g_{i+1}) + \ldots. \tag{22}$$

Тут три крапки означають доданки зі степенями b_{ip+j}^{α}, якщо $0 \le \alpha \le 2mn-(2i+1)n-2$. Використаємо лему 1 при $g = g_{m-1}=\tilde{L}_n^{mm}$ для знаходження визначника матриці $S\big(g_{m-1}(\lambda,k)\big)$:

$$\det S\big(g_{m-1}(\lambda,k)\big) = n^n b_{(m-1)p+j}^{n-1} \left(\frac{k_j}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)} + \ldots, \quad j = 1,\ldots,p, \tag{23}$$

де три крапки означають доданки зі степенями $b_{(m-1)p+j}^{\alpha}$, якщо $0 \le \alpha \le n-2$.

Теорема 3. *Нехай* $0<\delta<1$, $\nu = \dfrac{2}{m(mn-1)}$, $\eta_1 = \dfrac{p}{\nu}$, *коефіцієнти системи* (1) *фіксовані* (*за винятком коефіцієнтів* $b_1,\ldots,b_{mp}$), *функція* $\psi_1 \in \mathcal{M}$ *задовольняє умову* $\omega_1(\nu) < \infty$. *Тоді існує множина* $\mathrm{W}\Psi_\delta \subset \mathcal{O}_R^{mp}$ *така, що* $\operatorname{meas}\mathrm{W}\Psi_\delta \le \delta\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}$ *і для всіх векторів* $b \in \mathcal{O}_R^{mp} \setminus \mathrm{W}\Psi_\delta$ *та* $k \neq 0$ *справджується оцінка*

$$\big|\det S\big(f(\lambda,k)\big)\big| \ge \sqrt[\nu]{\delta} C_4 \psi_1^{-1}(\tilde{k})\tilde{k}^{-\eta_1}, \tag{24}$$

де $C_4 = n^{mn}\sqrt[\nu]{\dfrac{\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}}{\omega_1(\nu)m(p+1)^n\pi^{mp}R^{2mp-2}}} > 0.$

Доведення. Використавши рівності (22) і (23), формулу (21) запишемо так:

$$\det S\big(f(\lambda,k)\big) = (-1)^{n(m-1)} n^{mn} \left(\frac{k_j}{\tilde{k}}\right)^{n\big((2mn-n-1)+(2mn-3n-1)+\ldots+(3n-1)+(n-1)\big)} \times$$

$$\times (b_j)^{2mn-n-1}(b_{p+j})^{2mn-3n-1}\ldots(b_{(m-2)p+j})^{3n-1}(b_{(m-1)p+j})^{n-1} + \ldots =$$

$$= (-1)^{n(m-1)} n^{mn} \left(\frac{k_j}{\tilde{k}}\right)^{mn(mn-1)} B_j(k)B_{p+j}(k)\ldots B_{(m-1)p+j}(k),$$

де $B_{ip+j}(k)$, $i = 0,1,\ldots,m-1$, — унітальний степеня $2(m-i)n-n-1$ многочлен змінної b_{ip+j}, коефіцієнти якого не залежать від $b_1,\ldots,b_{ip+j-p}$, $j = 1,\ldots,p$, і знайдемо

$$\big|\det S\big(f(\lambda,k)\big)\big| = n^{mn}\left(\frac{|k_j|}{\tilde{k}}\right)^{mn(mn-1)} |B_j(k)||B_{p+j}(k)|\ldots|B_{(m-1)p+j}(k)|. \tag{25}$$

Для рівності (25) виберемо найменший індекс $j = j(k)$ так, щоб $k_j = \max\{k_1,\ldots,k_p\}$.

Позначимо через $\mathrm{W}\Psi_\delta^i(k)$, $i = 0,1,\ldots,m-1$, множину тих векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp}$, для яких при фіксованому k виконується оцінка

$$|B_{ip+j}(k)| < \left(\frac{\delta\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}\big(\psi_1(\tilde{k})\big)^{-\nu}\tilde{k}^{-p}}{m\omega_1(\nu)\pi^{mp}R^{2mp-2}}\right)^{(m-i)n-(n+1)/2}, \quad j = 1,\ldots,p. \tag{26}$$

Знайдемо оцінки мір множин $\mathrm{W}\Psi_\delta^i(k)$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Нехай $\widetilde{\mathrm{W}\Psi}_\delta^i(k) \subset \mathcal{O}_R^{(m-i)p}$ — множина тих векторів $b_{ip+1}, \ldots, b_{mp}$, а $\widetilde{\mathrm{W}\Psi}_\delta^i(k, \tilde{b}_{ip+j})$ — множина тих значень змінної b_{ip+j} для фіксованого $\tilde{b}_{ip+j}$ із останніми $(m-i-1)p$ компонентами з множини $\widetilde{\mathrm{W}\Psi}_\delta^{i+1}(k)$, де $\tilde{b}_{ip+j}$ — вектор з компонентами $b_{ip+1}, \ldots, b_{mp}$ без компоненти b_{ip+j}, для яких виконується нерівність (26). Оскільки $\mathrm{W}\Psi_\delta^i(k) = \mathcal{O}_R^{ip} \times \widetilde{\mathrm{W}\Psi}_\delta^i(k)$, то $\operatorname{meas} \mathrm{W}\Psi_\delta^i(k) = (\pi R^2)^{ip} \operatorname{meas} \widetilde{\mathrm{W}\Psi}_\delta^i(k)$. Використаємо лему Картана [13] та знайдемо $\operatorname{meas} \widetilde{\mathrm{W}\Psi}_\delta^i(k, \tilde{b}_{ip+j}) \leq \dfrac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp}\big(\psi_1(\tilde{k})\big)^{-\nu} \tilde{k}^{-p}}{m\omega_1(\nu)(\pi R^2)^{mp-1}}$. Інтегруючи по області $\mathcal{O}_R^{ip-1} \times \Big(\mathcal{O}_R^{(m-i-1)p} \setminus \widetilde{\mathrm{W}\Psi}_\delta^{i+1}(k)\Big)$, отримуємо $\operatorname{meas} \widetilde{\mathrm{W}\Psi}_\delta^i(k) \leq \dfrac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp}\big(\psi_1(\tilde{k})\big)^{-\nu} \tilde{k}^{-p}}{m\omega_1(\nu)(\pi R^2)^{ip}}$. Таким чином, для міри множини $\mathrm{W}\Psi_\delta^i(k)$ маємо нерівність

$$\operatorname{meas} \mathrm{W}\Psi_\delta^i(k) \leq \frac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp}\big(\psi_1(\tilde{k})\big)^{-\nu} \tilde{k}^{-p}}{m\omega_1(\nu)}.$$

Множини $\mathrm{W}\Psi_\delta^i(k)$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, об'єднаємо у множину $\mathrm{W}\Psi_\delta(k)$ з мірою $\operatorname{meas} \mathrm{W}\Psi_\delta(k) \leq \leq \sum_{i=0}^{m-1} \operatorname{meas} \mathrm{W}\Psi_\delta^i(k) \leq \dfrac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp}\big(\psi_1(\tilde{k})\big)^{-\nu} \tilde{k}^{-p}}{\omega_1(\nu)}$. В свою чергу множини $\mathrm{W}\Psi_\delta(k)$ об'єднаємо в одну виняткову множину

$$\mathrm{W}\Psi_\delta = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \mathrm{W}\Psi_\delta(k) \tag{27}$$

і оцінимо її міру $\operatorname{meas} \mathrm{W}\Psi_\delta \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \operatorname{meas} \mathrm{W}\Psi_\delta(k) = \delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp}$. Вектор b вважатимемо елементом множини $\mathcal{O}_R^{mp} \setminus \mathrm{W}\Psi_\delta$, для міри якої справджується оцінка

$$\operatorname{meas}(\mathcal{O}_R^{mp} \setminus \mathrm{W}\Psi_\delta) \geq (1-\delta) \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp}. \tag{28}$$

На множині $\mathcal{O}_R^{mp} \setminus \mathrm{W}\Psi_\delta$ із рівності (25) та нерівностей (26) – (28) випливає нерівність

$$\big|\det S\big(f(\lambda, k)\big)\big| \geq n^{mn} \sqrt[\nu]{\frac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp}}{m\omega_1(\nu)(p+1)^n \pi^{mp} R^{2mp-2}}} \psi_1^{-1}(\tilde{k}) \tilde{k}^{-p/\nu} = \sqrt[\nu]{\delta} C_4 \psi_1^{-1}(\tilde{k}) \tilde{k}^{-\eta_1}$$

для фіксованого вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$. Отже, поза множиною $\mathrm{W}\Psi_\delta$ нерівність (24) виконується для всіх $k \neq 0$.

Теорему доведено.

Розглянемо умови виконання нерівностей (20). Для оцінювання $\rho(t, \lambda_l(k))$ побудуємо виняткові множини малої міри на комплексній площині для параметра $\mu \in \mathcal{O}_M$, використання яких є варіантом метричного підходу до оцінювання малих знаменників [12, 14].

Використаємо раніше введену функцію $\psi_2 \in \mathcal{M}$ та виберемо додатні числа η_2 та χ_ψ з умов $\eta_2 > p/2$, $32nT^2\omega_2(2)\chi_\psi^2 = \pi$. Нехай $0 < \varepsilon < 1$ і, додатково, $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi_\psi T)$, якщо $n = 1$. Тоді для $n > 1$ виконується нерівність $\ln 2/(2\chi_\psi T) = \ln 2\sqrt{8n\omega_2(2)/\pi} > \sqrt{8n/\pi}/2 = = \sqrt{2n/\pi} > 1$, тобто також $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi_\psi T)$.

Позначимо $\chi_{1\psi} = \chi_{1\psi}(k) = \sqrt{\varepsilon}\chi_\psi \psi_2^{-1}(\tilde{k})\tilde{k}^{-\eta_2}$ та $\mu_l(k) = e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$, $\mu(k) = e^{\tilde{k}\lambda T}$. Враховуючи дані позначення, отримуємо $\chi_{1\psi} > 0$, а $\rho(t, \lambda) = \dfrac{e^{\tilde{k}\lambda t}}{\mu - \mu(k)}$.

Виберемо множини $V\Psi_l(k)$ для тих $l = 1, \ldots, n$ та $k \in \mathbb{Z}^p$, що задовольняють умову $|\mu_l(k)| < 2M$, за формулою $V\Psi_l(k) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\mathrm{Re}\,(\lambda - \lambda_l(k))| < \dfrac{\chi_{1\psi}}{2}, |\mathrm{Im}\,(\lambda - \lambda_l(k))| < \dfrac{\chi_{1\psi}}{2}\right\}$. Множина $V\Psi_l(k)$ — це квадрат зі стороною $\chi_{1\psi}$, центром $\lambda_l(k)$ і вершинами M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-} у комплексній площині змінної λ. Точки M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-} зображують відповідно комплексні числа $\lambda_l(k) - (1+i)\chi_{1\psi}/2$, $\lambda_l(k) - (1-i)\chi_{1\psi}/2$, $\lambda_l(k) + (1+i)\chi_{1\psi}/2$, $\lambda_l(k) + (1-i)\chi_{1\psi}/2$.

Нехай $V\Psi_{l,2}(k) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : e^{-\chi_{1\psi}T/2} \le \left|\dfrac{\mu}{\mu_l(k)}\right| \le e^{\chi_{1\psi}T/2}, \left|\arg\dfrac{\mu}{\mu_l(k)}\right| \le \chi_{1\psi}T/2\right\}$ — образ квадрата $V\Psi_l(k)$ при відображенні $\lambda \to e^{\tilde{k}\lambda T}$, а множина $V\Psi_{l,1}(k)$ є образом концентричного до $V\Psi_l(k)$ квадрата зі стороною $2\chi_{1\psi}$: $V\Psi_{l,1}(k) = \left\{\mu \in \mathbb{C} \colon e^{-\chi_{1\psi}T} \le \left|\dfrac{\mu}{\mu_l(k)}\right| \le e^{\chi_{1\psi}T}, \left|\arg\dfrac{\mu}{\mu_l(k)}\right| \le \le \chi_{1\psi}T\right\}$. Міра множини $V\Psi_{l,1}(k)$, яку назвемо винятковою множиною для заданого k, обчислюється так:

$$\mathrm{meas}\, V\Psi_{l,1}(k) = \frac{2\chi_{1\psi}T}{2\pi}\big(\pi|\mu_l(k)|^2 e^{2\chi_{1\psi}T} - \pi|\mu_l(k)|^2 e^{-2\chi_{1\psi}T}\big) = \chi_{1\psi}T|\mu_l(k)|^2\big(e^{2\chi_{1\psi}T} - e^{-2\chi_{1\psi}T}\big).$$

Оскільки $e^{2\chi_{1\psi}T} < 2$ і $\dfrac{e^{y_2\chi_{1\psi}T} - e^{y_1\chi_{1\psi}T}}{y_2 - y_1} = \chi_{1\psi}Te^{y_3\chi_{1\psi}T} \le \chi_{1\psi}Te^{y_2\chi_{1\psi}T}$, де $y_3 \in (y_1, y_2) \subset \mathbb{R}$, то для міри множини $V\Psi_{l,1}(k)$ виконується нерівність

$$\mathrm{meas}\ V\Psi_{l,1}(k) = 4\chi_{1\psi}T|\mu_l(k)|^2 \frac{e^{2\chi_{1\psi}T} - e^{-2\chi_{1\psi}T}}{4} \le 4\big(\chi_{1\psi}T|\mu_l(k)|\big)^2 e^{2\chi_{1\psi}T} < 32(\chi_{1\psi}TM)^2.$$

Об'єднаємо множини $V\Psi_{l,1}(k)$ в одну виняткову множину

$$V\Psi_\varepsilon = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z}^p \\ |\mu_l(k)| < 2M}} \bigcup_{l=1}^{n} V\Psi_{l,1}(k) \tag{29}$$

і знайдемо $\mathrm{meas}\ V\Psi_\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p;\, |\mu_l(k)| < 2M} \sum_{l=1}^{n} \mathrm{meas}\, V\Psi_{l,1}(k) \le 30(TM)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \chi_{1\psi}^2$. Враховуючи позначення $\chi_{1\psi}$ та χ_ψ, отримуємо $\mathrm{meas}\ V\Psi_\varepsilon \le 30nT^2\omega_2(2)\chi_\psi^2 \varepsilon M^2 = \varepsilon\, \mathrm{meas}\ \mathcal{O}_M$. Параметр μ вважатимемо елементом множини $\mathcal{O}_M \setminus V\Psi_\varepsilon$, для міри якої запишемо оцінку

$$\mathrm{meas}\,(\mathcal{O}_M \setminus V\Psi_\varepsilon) \ge (1 - \varepsilon)\, \mathrm{meas}\ \mathcal{O}_M. \tag{30}$$

Теорема 4. *Якщо $\eta_2 = p/2$, функція $\psi_2 \in \mathcal{M}$ задовольняє умову $\omega_2(2) < \infty$, то для всіх векторів $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V\Psi_\varepsilon$ і $k \in \mathbb{Z}^p$ функція $\rho(t, \lambda)$ в області $V\Psi_l(k) \times [0, T]$ має оцінку зверху*

$$|\rho(t, \lambda)| \le \frac{\theta_\psi}{\sqrt{\varepsilon}}\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}, \qquad \theta_\psi = 8\max\{2, 1/|\mu|\}\sqrt{2\pi n\omega_2(2)} > 0. \tag{31}$$

Доведення. Розглянемо випадок таких l і k, що $|\mu_l(k)| \ge 2M$. У кожному такому квадраті $V\Psi_l(k)$ виконуються нерівності $|\mu_l(k)|e^{-\chi_{1\psi}T/2} \le |\mu(k)| \le |\mu_l(k)|e^{\chi_{1\psi}T/2}$, де $e^{2\chi_{1\psi}T} = e^{2\sqrt{\varepsilon}\chi_\psi T\psi_2^{-1}(\tilde{k})\tilde{k}^{-\eta_2}} < 2^{\psi_2^{-1}(\tilde{k})\tilde{k}^{-\eta_2}} \le 2$, тому $3M/2 < 2^{3/4}M \le 2^{-1/4}|\mu_l(k)| \le |\mu(k)| \le 2^{1/4}|\mu_l(k)|$.

Для функції $\rho(t, \lambda)$ маємо

$$|\rho(t, \lambda)| = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu - \mu(k)|} = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T} - 1}}{|\mu/\mu(k) - 1|} \le 3\max\left\{1, \frac{1}{|\mu(k)|}\right\} < \max\left\{3, \frac{2}{M}\right\},$$

а також, враховуючи, що $\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2} > \sqrt{\varepsilon}$, отримуємо

$$|\rho(t,\lambda)| < \frac{\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} \max\left\{3, \frac{2}{M}\right\}. \tag{32}$$

Розглянемо випадок $|\mu_l(k)| < 2M$. Тоді для числа $\mu(k)$ маємо лише три можливості: $|\mu(k)| \leq \leq \dfrac{|\mu|}{2}$, $|\mu(k)| \geq 2|\mu|$ та $\dfrac{|\mu|}{2} < |\mu(k)| < 2|\mu|$.

Розглянемо першу з даних можливостей, а саме, $|\mu(k)| \leq \dfrac{|\mu|}{2}$. Тоді $|\mu - \mu(k)| \geq \dfrac{|\mu|}{2}$ і $|\rho(t,\lambda)|t = \dfrac{|\mu(k)|^{t/T}}{|\mu-\mu(k)|} \leq \dfrac{2|\mu(k)|^{t/T}}{|\mu|} \leq \dfrac{2}{|\mu|}\max\{1,|\mu(k)|\} \leq \dfrac{2}{|\mu|}\max\left\{1,\dfrac{|\mu|}{2}\right\} = \max\left\{1,\dfrac{2}{|\mu|}\right\}$, а також

$$|\rho(t,\lambda)| \leq \frac{\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} \max\left\{1, \frac{2}{|\mu|}\right\}. \tag{33}$$

Нехай $|\mu(k)| \geq 2|\mu|$, тоді виконуються нерівності $|\mu-\mu(k)| = |\mu(k)|\left|\dfrac{\mu}{\mu(k)} - 1\right| \geq \dfrac{|\mu(k)|}{2}$ і $|\rho(t,\lambda)| = \dfrac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu-\mu(k)|} \leq \dfrac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu(k)|/2} = 2|\mu(k)|^{\frac{t-T}{T}} \leq 2\max\left\{1,\dfrac{1}{|\mu(k)|}\right\} \leq \max\left\{2,\dfrac{1}{|\mu|}\right\}$, а отже,

$$|\rho(t,\lambda)| \leq \frac{\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} \max\left\{2, \frac{1}{|\mu|}\right\}. \tag{34}$$

Розглянемо випадок $\dfrac{|\mu|}{2} < |\mu(k)| < 2|\mu|$. Оскільки $\mu \notin \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$, то знаменник $|\mu - \mu(k)|$ не менший, ніж $\min|z_1 - z_2|$, де z_1 і z_2 належать межам областей $\mathrm{V}\Psi_{l,1}(k)$ і $\mathrm{V}\Psi_{l,2}(k)$ відповідно. Даний мінімум досягається, якщо $z_2 = e^{\tilde{k}(\lambda_l(k)-(i+1)\chi_{1\psi}/2)T}$, а z_1 — проекція z_2 на промінь $z = \arg\lambda_l(k) - \chi_{1\psi}T$, і дорівнює $|\mu_l(k)|e^{-\chi_{1\psi}T/2}\sin(\chi_{1\psi}T/2)$. Оскільки справджуються оцінки $\chi_{1\psi}T/2 < \ln 2/4 < 1/4 < \pi/4$ і $\sin x > 2\sqrt{2}x/\pi$ при $x \in [0,\pi/4]$, то $\sin\chi_{1\psi}T/2 \geq \geq 2\sqrt{2}\chi_{1\psi}T/2\pi = \sqrt{2}\chi_{1\psi}T/\pi$. Тому з нерівності $|\mu_l(k)| \geq |\mu(k)|e^{-\chi_{1\psi}T/2}$ випливає, що $|\mu - -\mu(k)| \geq |\mu_l(k)|e^{-\chi_{1\psi}T/2}\sin(\chi_{1\psi}T/2) \geq |\mu(k)|e^{-\chi_{1\psi}T}\sqrt{2}\chi_{1\psi}T/\pi > |\mu|\chi_{1\psi}T/2\pi$. Звідси отримуємо

$$|\rho(t,\lambda)| = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu-\mu(k)|} \leq \frac{\max\{1,|\mu(k)|\}}{|\mu-\mu(k)|} < \frac{2\pi\max\{1,2|\mu|\}}{|\mu|\chi_{1\psi}T} \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}\chi_\psi\psi_2^{-1}(\tilde{k})\tilde{k}^{-\eta_2}T}\max\left\{2,\frac{1}{|\mu|}\right\} =$$

$$= \frac{2\pi\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}\chi_\psi T}\max\left\{2,\frac{1}{|\mu|}\right\} \leq \frac{\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} 8\sqrt{2n\pi\omega_2(2)}\max\left\{2,\frac{1}{|\mu|}\right\}. \tag{35}$$

Праві частини у формулах (32)–(35) оцінюються числом $\dfrac{\theta_\psi\psi_2(\tilde{k})\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}}$. Це означає, що нерівність (31) виконується для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$.

Теорему доведено.

Наслідок. *Оцінка* (20) *виконується для всіх векторів* μ *з множини* $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$.

Це твердження випливає з належності величин $\lambda_l(k)$, $l = 1,\ldots,mn$, до множини $\mathrm{V}\Psi_l(k)$ і рівності $\left|\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right| = \left|\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - \mu_l(k)}\right| = |\rho(t,\lambda_l(k))|$.

Сформулюємо та доведемо теорему існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\bar{\mathbf{H}}_q^{n\psi}(\mathcal{D}^p)$ з урахуванням метричних теорем 3 та 4.

Теорема 5. *Нехай множини* $\mathrm{W}\Psi_\delta$ *і* $\mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ *задаються формулами* (27) *і* (29), *а оцінки мір множин* $\mathcal{O}_R^{mp} \setminus \mathrm{W}\Psi_\delta$ *та* $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ *визначаються рівностями* (28) *та* (30) *відповідно,* $\nu = \dfrac{2}{m(mn-1)}$, $\gamma_1 = p(1/2 + 1/\nu)$, $\widehat{\psi} = \psi\psi_1\psi_2$, *де* ψ_1, ψ_2 *з множини* $\mathcal{M}$ *задовольняють умови* $\omega_1(\nu) < \infty$ *та* $\omega_2(2) < \infty$. *Тоді у випадку* $\varphi_j \in \bar{\mathbf{H}}^{\widehat{\psi}}_{q-j+\gamma_1}(\mathcal{S}^p)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *для всіх векторів* (b, μ) *з множини* $(\mathcal{O}_R^{mp} \setminus \mathrm{W}\Psi_\delta) \times (\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\bar{\mathbf{H}}^{n\psi}_q(\mathcal{D}^p)$, *який неперервно залежить від правих частин умов* (2).

Доведення. За теоремою 3 для всіх векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp} \setminus \mathrm{W}\Psi_\delta$ і $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ виконується оцінка (19) при $\eta_1 = p/\nu$ та для всіх функцій $\psi_1 \in \mathcal{M}$ таких, що $\omega_1(\nu) < \infty$. Згідно з теоремою 4 для довільного $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ виконується оцінка (20) при $\eta_2 = p/2$ для всіх функцій $\psi_2 \in \mathcal{M}$ таких, що $\omega_2(2) < \infty$. Таким чином, виконується нерівність $\|u\|^2_{\bar{\mathbf{H}}^{n\psi}_q(\mathcal{D}^p)} \le \frac{C_5}{\varepsilon\delta^{m(mn-1)}} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\bar{\mathbf{H}}^{\widehat{\psi}}_{q-j+\gamma_1}(\mathcal{S}^p)}$, де величина $C_5 > 0$ залежить від m, n, p та коефіцієнтів системи (1). Тоді з теореми 2 випливає як існування розв'язку задачі (1), (2) з простору $\bar{\mathbf{H}}^{n\psi}_q(\mathcal{D}^p)$, так і його неперервна залежність від функцій $\varphi_j \in \bar{\mathbf{H}}^{\widehat{\psi}}_{q-j+\gamma_1}(\mathcal{S}^p)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Оскільки до $\mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ належать всі розв'язки рівняння (14), то з умови $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$, згідно з теоремою 1, випливає єдиність розв'язку задачі (1), (2) у $\mathbf{H}^{n\psi}_q(\mathcal{D}^p)$. Тому для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ з існування розв'язку у $\mathbf{H}^{n\psi}_q(\mathcal{D}^p)$ випливає його єдиність на $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon$.

Теорему доведено.

5. Умови існування розв'язку задачі у соболєвській шкалі. У просторі $\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)$ виконуються аналогічні до (17) і (18) нерівності

$$\|u\|^2_{\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)} \le (C_6 + 1) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \max_{[0,T]} |\tilde{k}^{q-n} \tilde{V}_j(t, k)|^2, \tag{36}$$

$$|\tilde{k}^{q-n} \tilde{V}_j(t, k)|^2 \le C_7 \|\Omega(t, k)\|^2 \|W^{-T}(k)\|^2 \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}^{q-j} \phi_j(k)|^2, \tag{37}$$

де C_6, $C_7 > 0$ залежать від параметрів задачі (1), (2), і справджується теорема існування та єдиності розв'язку цієї задачі, доведення якої випливає з цих оцінок та означення шкали $\{\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q \in \mathbb{R}}$.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *та для деяких дійсних чисел* η_3, η_4 *для всіх* (*крім скінченного числа*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності*

$$|\det S(f)| \ge \tilde{k}^{-\eta_3}, \tag{38}$$

$$\bigl|\rho\bigl(t, \lambda_l(k)\bigr)\bigr| \le \tilde{k}^{\eta_4}, \quad l = 1, \ldots, mn. \tag{39}$$

Якщо $\varphi_j \in \bar{\mathbf{H}}_{q-j+\gamma_2}(\mathcal{S}^p)$, *де* $\gamma_2 > \eta_3 + \eta_4$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)$, *який неперервно залежить від правих частин умов* (2).

Встановимо умови виконання нерівностей (38) та (39). Введемо множини W_δ та V_ε (за схемою введення множин $\mathrm{W}\Psi_\delta$ і $\mathrm{V}\Psi_\varepsilon$ при $\psi_1 \equiv 1$, $\psi_2 \equiv 1$). Множина W_δ задається рівністю

$$\mathrm{W}_\delta = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \mathrm{W}_\delta(k) \tag{40}$$

з мірою $\operatorname{meas}\mathrm{W}_\delta{\le}\delta\ \operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}$, де $\mathrm{W}_\delta(k) = \bigcup_{i=0}^{m-1}\mathrm{W}_\delta^i(k)$, а $\mathrm{W}_\delta^i(k)$, $i = 0,1,\ldots,m-1$, — множина тих $b{\in}\mathcal{O}_R^{mp}$, для яких виконується $|B_{ip+j}(k)|{<}\left(\dfrac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)\pi^{mp}R^{2mp-2}}\right)^{(m-i)n-(n+1)/2}$, $r > p$, при фіксованому k та кожному $j = 1,\ldots,p$. Вектор b вважатимемо елементом множини $\mathcal{O}_R^{mp}\setminus\mathrm{W}_\delta$ з мірою

$$\operatorname{meas}(\mathcal{O}_R^{mp}\setminus\mathrm{W}_\delta) \ge (1-\delta)\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}. \tag{41}$$

Нехай $\mathrm{V}_{l,1}(k) = \left\{\mu\in\mathbb{C}\colon e^{-\chi_1 T}\le\left|\dfrac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le e^{\chi_1 T}, \left|\arg\dfrac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le\chi_1 T\right\}$, $\chi_1 = \sqrt{\varepsilon}\chi\tilde{k}^{-\eta_4}$, $\eta_4 > p/2$, величина χ визначається з рівності $32nT^2\zeta(2\eta_4)\chi^2 = \pi$. Тоді, аналогічно до формули (29), множина V_ε задається рівністю

$$\mathrm{V}_\varepsilon = \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^p\\ |\mu_l(k)|<2M}}\ \bigcup_{l=1}^{n}\mathrm{V}_{l,1}(k). \tag{42}$$

Міра множини V_ε не перевищує величини $\varepsilon\operatorname{meas}\mathcal{O}_M$. Параметр μ вважатимемо елементом множини $\mathcal{O}_M\setminus\mathrm{V}_\varepsilon$ з мірою

$$\operatorname{meas}(\mathcal{O}_M\setminus\mathrm{V}_\varepsilon) \ge (1-\varepsilon)\operatorname{meas}\mathcal{O}_M. \tag{43}$$

Остаточно, справедливими є наступні метричні теореми 7 і 8, доведення яких проводиться аналогічно до доведення теорем 3 і 4.

Теорема 7. *Нехай* $0<\delta<1$, $\nu = \dfrac{2}{m(mn-1)}$, $\eta_3 > \dfrac{p}{\nu}$, *коефіцієнти системи* (1) *фіксовані* (*за винятком* $b_1,\ldots,b_{mp}$). *Тоді для всіх векторів* $b\in\mathcal{O}_R^{mp}\setminus W_\delta$ *та* $k\neq 0$ *справджується оцінка* $|\det S\big(f(\lambda,k)\big)| \ge \sqrt[\nu]{\delta}C_8\tilde{k}^{-\eta_3}$, *де* $C_8 = n^{mn}\sqrt[\nu]{\dfrac{\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}}{m\zeta(\eta_3\nu)(p+1)^n\pi^{mp}R^{2mp-2}}} > 0.$

Теорема 8. *Якщо* $\eta_4 > p/2$, *то для всіх* $\mu\in\mathcal{O}_M\setminus\mathrm{V}_\varepsilon$ *функція* $\rho(t,\lambda)$ *в області* $\mathrm{V}_l(k)\times[0,T]$ *має оцінку зверху* $|\rho(t,\lambda)| \le \dfrac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{k}^{\eta_4}$, *де* $\theta = 8\max\{2,1/|\mu|\}\sqrt{2\pi n\zeta(2\eta_4)}$.

На основі теорем 7 і 8 доведено наступну теорему.

Теорема 9. *Нехай множини* W_δ *і* V_ε *задаються формулами* (40) *і* (42), *а оцінки мір множин* $\mathcal{O}_R^{mp}\setminus\mathrm{W}_\delta$ *та* $\mathcal{O}_M\setminus\mathrm{V}_\varepsilon$ *визначаються рівностями* (41) *та* (43) *відповідно*, $\gamma_2 > p(1/2+1/\nu)$, $\nu = \dfrac{2}{m(mn-1)}$. *Тоді у випадку* $\varphi_j\in\bar{\mathbf{H}}_{q-j+\gamma_2}(\mathcal{S}^p)$, $j = 0,1,\ldots,n-1$, *для всіх векторів* (b,μ) *з множини* $(\mathcal{O}_R^{mp}\setminus\mathrm{W}_\delta)\times(\mathcal{O}_M\setminus\mathrm{V}_\varepsilon)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$, *який неперервно залежить від правих частин умов* (2).

6. Висновки. У роботі встановлено, що майже будь-яка нелокальна задача (1), (2) розв'язна в (уточненій) шкалі просторів Соболєва. З теореми 5 випливає, що для векторів $(b,\mu)\in(\mathcal{O}_R^{mp}\setminus \mathrm{W}\Psi_\delta)\times(\mathcal{O}_M\setminus\mathrm{V}\Psi_\varepsilon)$, міра якої не менша, ніж $(1-\delta)(1-\varepsilon)\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}\operatorname{meas}\mathcal{O}_M$, оператор, який є оберненим до оператора задачі (1), (2), відображує вектор $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1}$ у розв'язок задачі u і є обмеженим оператором з $\prod_{j=0}^{n-1}\bar{\mathbf{H}}^{\hat{\psi}}_{q-j+\gamma_1}(\mathcal{S}^p)$ в $\bar{\mathbf{H}}^{n\psi}_q(\mathcal{D}^p)$, де $\dfrac{\widehat{\psi}}{\psi}=\psi_1\psi_2$, $\dfrac{\gamma_1}{p}=$ $=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\nu}$, $\nu=\dfrac{2}{m(mn-1)}$, функції ψ_1 і ψ_2 з множини $\mathcal{M}$ задовольняють умови $\omega_1(\nu)<\infty$ та $\omega_2(2)<\infty$. Оператор аналогічно діє і у шкалі просторів Соболєва, а саме, з $\prod_{j=0}^{n-1}\bar{\mathbf{H}}_{q-j+\gamma_2}(\mathcal{S}^p)$ в $\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)$, причому на відміну від уточненої соболєвської шкали, для якої $\dfrac{\gamma_1}{p}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\nu}$, величина $\dfrac{\gamma_2}{p}$ не дорівнює $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\nu}$, а дорівнює $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\nu}+\sigma$, де σ — довільне додатне число. Тобто допоміжний функціональний показник в уточненій соболєвській шкалі усталює основний степеневий показник гладкості розв'язку задачі (1), (2), що відповідно покращує його гладкість. Міра множини $(\mathcal{O}^{mp}_R\setminus \mathrm{W}\Psi_\delta)\times(\mathcal{O}_M\setminus \mathrm{V}\Psi_\varepsilon)$ прямує до міри $\pi^{mp+1}M^2R^{2mp}$ множини $\mathcal{O}^{mp}_R\times\mathcal{O}_M$, якщо $\varepsilon+\delta\to 0$, причому квадрат норми розв'язку може зростати не швидше, ніж $\dfrac{\mathrm{const}}{\varepsilon\delta^{m(mn-1)}}$.

1. *Пташник Б. Й.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
3. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2014. – xii + 297 p. (Російськомовна версія доступна як arXiv:1106.3214.)
4. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
5. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.
6. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. II // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.
7. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. III // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.
8. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Extended Sobolev scale and elliptic operators // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 3. – P. 435 – 447.
9. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
10. *Илькив В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624 – 1650.
11. *Прасолов В. В.* Многочлены. – М.: МЦНМО, 2001. – 336 с.
12. *Магеровська Т. В.* Дослідження гладкості розв'язку задачі Коші для систем рівнянь із частинними похідними за допомогою метричного підходу // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Математика. – 2011. – **1**, № 1-2. – С. 84 – 93.
13. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
14. *Ільків В. С., Страп Н. І.* Нелокальна крайова задача для рівняння з частинними похідними у багатовимірній комплексній області // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Математика і інформатика. – 2013. – **24**, № 1. – С. 60 – 72.

Одержано 05.05.14