УДК 519.21

Я. М. Хусанбаев (Ин-т математики при Нац. ун-те Узбекистана, Ташкент)

ОБ АСИМПТОТИКЕ ДОКРИТИЧЕСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА С ИММИГРАЦИЕЙ

We investigate a subcritical branching process with inhomogeneous immigration in the case where the mean value and variance of immigration are regularly varying at infinity. We show that a properly normalized subcritical process with immigration tends weakly to a deterministic process and prove a limit theorem for the fluctuation of the process.

Розглядається докритичний розгалужений процес із неоднорідною імміграцією у випадку, коли середнє значення і дисперсія імміграції правильно змінюються на нескінченності. Встановлено, що відповідним чином нормований докритичний процес з імміграцією слабко збігається до детермінованого процесу, а також доведено граничну теорему для флуктуації процесу.

Пусть $\{\xi_{k,j}, k, j \in \mathbb{N}\}$ и $\{\varepsilon_k, k \in \mathbb{N}\}$ — две независимые совокупности независимых неотрицательных целозначных и одинаково распределенных случайных величин. Определим последовательность случайных величин $\{X_k, k \geq 0\}$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$X_0 = 0, \qquad X_k = \sum_{j=1}^{X_{k-1}} \xi_{k,j} + \varepsilon_k, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Если интерпретировать величину $\xi_{k,j}$ как число потомков j-й частицы $(k-1)$-го поколения некоторой популяции частиц, а величину ε_k как число частиц, иммигрирующих в популяцию в k-м поколении, то величина X_k будет представлять собой число частиц в популяции в k-м поколении. В силу такой интерпретации случайный процесс $\{X_k, k \geq 0\}$ называют ветвящимся процессом с иммиграцией.

Предположим, что $\mathbf{E}\xi_{1,1}^2 < \infty$ и $\mathbf{E}\varepsilon_1^2 < \infty$. Введем следующие обозначения:

$$m = \mathbf{E}\xi_{1,1}, \qquad \sigma^2 = \mathbf{var}\xi_{1,1}, \qquad \lambda = \mathbf{E}\varepsilon_1, \qquad b^2 = \mathbf{var}\varepsilon_1.$$

Ветвящийся процесс (1) называют докритическим, критическим и надкритическим, если $m < 1$, $m = 1$ и $m > 1$ соответственно.

Определим случайный процесс $X_n(t)$, $t \geq 0$, соотношением $X_n(t) = X_{[nt]}$, $t \geq 0$, где знак $[a]$ обозначает целую часть числа a. Ясно, что траектории процесса $X_n(t)$, $t \geq 0$, принадлежат пространству Скорохода $D[0, \infty)$.

В работах [1, 2] исследованы достаточные условия слабой сходимости конечномерных распределений последовательности ветвящихся процессов без иммиграции ($\varepsilon_k \equiv 0$). K. Kawazu, S. Watanabe [3] и С. Алиев [4] изучали слабую сходимость конечномерных распределений ветвящихся процессов с иммиграцией к соответствующим распределениям процесса Иржины. В работе [5] C. Z. Wei и J. Winnicki рассмотрели критический ветвящийся процесс с иммиграцией и доказали при $n \to \infty$ слабую сходимость в пространстве Скорохода $D[0, \infty)$ последовательности ступенчатых процессов $X_n(t)$, $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, к неотрицательному диффузионному процессу. Аналог этого результата для последовательности почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией доказал T. N. Sriram [6]. В работе [7] показано, что результат T. N. Sriram справедлив и в случае, когда дисперсия числа потомков одной частицы стремится к нулю. Оказывается, в этом случае предельный процесс является неслучайным процессом. В этой работе также доказано, что флуктуация почти критического ветвящегося процесса с иммиграцией слабо сходится в $D[0,\infty)$ к процессу Орнстейна – Уленбека. Z. Li в [8] получил достаточные условия для слабой сходимости ветвящихся процессов с иммиграцией к ветвящемуся процессу с иммиграцией с непрерывным временем и непрерывным пространством состояний. В работе [9] I. Rahimov рассмотрел критический ветвящийся процесс с неоднородной иммиграцией (величины $\varepsilon_k,\ k\in\mathbb{N}$, различно распределены) в случае, когда среднее и дисперсия иммиграции правильно меняются на бесконечности, и доказал функциональные предельные теоремы для флуктуации ветвящегося процесса. В работах [10 – 12] доказаны функциональные предельные теоремы для последовательности почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией, а также для флуктуации процесса при различных условиях на средние и дисперсии числа потомков одной частицы и иммиграции. Однако докритический процесс с иммиграцией исследован мало.

В настоящей работе мы рассмотрим докритический ветвящийся процесс $(m<1)$ с неоднородной и возрастающей иммиграцией и докажем предельные теоремы для такого процесса.

В дальнейшем будем считать, что поток иммиграции неоднороден, т. е. случайные величины $\{\varepsilon_k,k\in\mathbb{N}\}$ различно распределены, причем $\lambda_k=\mathbf{E}\varepsilon_k$ и $b_k^2=\mathbf{var}\varepsilon_k$ конечны для любого $k\in\mathbb{N}$. Пусть величины λ_n и b_n^2 монотонно возрастают по n, причем

$$\lambda_n=n^{\alpha}L_{\alpha}(n)\quad \text{при}\quad n\to\infty, \tag{2}$$

$$b_n^2=n^{\beta}L_{\beta}(n)\quad \text{при}\quad n\to\infty, \tag{3}$$

где $\alpha,\beta\geq 0$ — фиксированные числа, $L_{\alpha}(n)$, $L_{\beta}(n)$ — медленно меняющиеся на бесконечности функции.

Всюду далее $T>0$ — любое фиксированное число.

Теорема 1. *Пусть $0<m<1$ и выполнены условия* (2), (3), *причем $\lambda_n\to\infty$ и $b_n^2=o\left(\lambda_n^2\right)$ при $n\to\infty$. Тогда имеет место слабая сходимость*

$$\frac{X_n}{n^{\alpha}L_{\alpha}(n)}\to\mu\quad \textit{при}\quad n\to\infty$$

в пространстве Скорохода $D[0,T]$, где $\mu(t)=\dfrac{t^{\alpha}}{1-m}$, $t\in[0,T]$.

Из этой теоремы следуют такие утверждения.

***Следствие* 1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{X_n(t)}{n^{\alpha}L_{\alpha}(n)}-\frac{t^{\alpha}}{1-m}\right|\xrightarrow{\text{P}}0\quad \textit{при}\quad n\to\infty,$$

где знак $\xrightarrow{\text{P}}$ означает сходимость по вероятности случайных величин.

Общее число частиц, участвующих в развитии популяции в поколениях до момента времени n, является одной из важных величин, связанных с ветвящимся процессом. Для этой величины имеет место следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любого* $t \geq 0$

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}L_\alpha(n)}\sum_{k=1}^{[nt]}X_{k-1} \xrightarrow{\mathrm{P}} \frac{t^{1+\alpha}}{(1-m)(1+\alpha)} \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Следующая теорема дает представление об асимптотике флуктуации процесса $X_n(t)$, $t \geq 0$, в случае, когда $b_n^2 = o\left(\lambda_n\right)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < m < 1$, $\mathbf{E}\xi_{1,1}^3 < \infty$ *и выполнены условия* (2), (3), *причем* $\lambda_n \to \infty$ *и* $b_n^2 = o(\lambda_n)$ *при* $n \to \infty$. *Тогда конечномерные распределения случайного процесса* $\lambda_n^{-1/2}\left(X_n(t) - \mathbf{E}X_n(t)\right)$, $t \geq 0$, *слабо сходятся при* $n \to \infty$ *к соответствующим распределениям процесса* $\sigma/\sqrt{(1-m)(1-m^2)}W(t^\alpha)$, $t \geq 0$, *где* W — *стандартный винеровский процесс.*

Для доказательства теоремы 1 нам нужна следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $m \in (0,1)$ — *фиксированное число, а монотонно возрастающая последовательность неотрицательных чисел* $\{a_k, k\in\mathbb{N}\}$ *такова, что* $a_n \to \infty$ *и* $a_n = n^\alpha L(n)$ *при* $n \to \infty$ *для некоторого* $\alpha \geq 0$, *где* $L(n)$ — *медленно меняющаяся на бесконечности функция. Тогда для любого* $\gamma > 0$ *имеет место асимптотическое соотношение*

$$\sum_{k=1}^{n} m^{\gamma(n-k)}a_k \sim \frac{a_n}{1-m^\gamma} \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

где символ $\sim$ *означает, что отношение левой части к правой стремится к единице.*

Доказательство. Для удобства записи положим $r_n = \left[\sqrt{n}\right]$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} m^{\gamma(n-k)}a_k = A_n + B_n, \tag{4}$$

где

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-r_n} m^{\gamma(n-k)}a_k, \quad B_n = \sum_{k=n-r_n+1}^{n} m^{\gamma(n-k)}a_k.$$

Сначала покажем, что

$$A_n \to 0 \ \text{ при } \ n\to\infty. \tag{5}$$

Действительно, так как $m < 1$, то

$$A_n \leq m^{\gamma r_n}\sum_{k=1}^{n-r_n}a_k \leq m^{\gamma r_n}\sum_{k=1}^{n}a_k. \tag{6}$$

В силу условия леммы и известной теоремы Карамата о правильно меняющихся функциях [15, с. 322] (теорема 1)

$$\sum_{k=1}^{n}a_k \sim \frac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha}L(n) \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Отсюда с учетом (6) следует, что для достаточно больших n

$$A_n \le 2m^{\gamma r_n} \frac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha} L(n) = \frac{2r_n^{2(1+\alpha)}}{1+\alpha} L(r_n^2)\, e^{\gamma r_n \ln m}. \tag{7}$$

Очевидно, что из свойств медленно меняющихся функций [16, с. 24] следует соотношение

$$x^a e^{-bx} L(x^2) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty$$

для любых фиксированных $a,\, b > 0$. Поэтому отсюда и из (7), учитывая, что $\ln m < 0$, $m < 1$, получаем (5).

Теперь оценим B_n. Для достаточно больших n имеем

$$B_n \le a_n \sum_{k=n-r_n+1}^{n} m^{\gamma(n-k)} \sim \frac{1-m^{\gamma r_n}}{1-m^{\gamma}} n^{\alpha} L(n) \sim \frac{n^{\alpha}}{1-m^{\gamma}} L(n). \tag{8}$$

С другой стороны, учитывая свойства медленно меняющихся функций [16], для достаточно больших n получаем

$$B_n \ge a_{n-r_n+1} \sum_{k=n-r_n+1}^{n} m^{\gamma(n-k)} \sim$$

$$\sim \frac{1-m^{\gamma r_n}}{1-m^{\gamma}} (n-r_n+1)^{\alpha} L(n-r_n+1) \sim \frac{n^{\alpha}}{1-m^{\gamma}} L(n).$$

Отсюда с учетом (8) приходим к выводу, что

$$B_n \sim \frac{n^{\alpha}}{1-m^{\gamma}} L(n) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теперь отсюда и из соотношений (4), (5) следует утверждение леммы.

***Доказательство теоремы* 1.** В силу (1) величину X_k представим в виде

$$X_k = mX_{k-1} + \lambda_k + M_k, \tag{9}$$

где $M_k = \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) + \varepsilon_k - \lambda_k$. Усредняя (9), имеем

$$\mathbf{E}X_k = m\mathbf{E}X_{k-1} + \lambda_k. \tag{10}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{E}X_k = \sum_{j=1}^{k} m^{k-j} \lambda_j.$$

Теперь, учитывая условие (2) и применяя лемму, получаем

$$\mathbf{E}X_n = \sum_{j=1}^{n} m^{n-j} \lambda_j \sim \frac{\lambda_n}{1-m} = \frac{n^{\alpha}}{1-m} L_{\alpha}(n) \tag{11}$$

при $n \to \infty$. Отсюда с учетом определения медленно меняющейся функции следует, что для любого $t > 0$

$$\mathbf{E}\frac{X_n(t)}{n^\alpha L_\alpha(n)} \to \frac{t^\alpha}{1-m} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Теперь докажем, что

$$\mathbf{var}\frac{X_n(t)}{n^\alpha L_\alpha(n)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{13}$$

для любого $t > 0$. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{var}X_n(t) = \frac{\sigma^2}{m(1-m)} \sum_{j=1}^{[nt]-1} m^{[nt]-j} \left[1 - m^{[nt]-j}\right] \lambda_j + \sum_{j=1}^{[nt]} m^{2([nt]-j)} b_j^2.$$

Применяя лемму, приходим к выводу, что

$$\mathbf{var}X_n(t) \sim \frac{\sigma^2 t^\alpha}{(1-m)(1-m^2)} n^\alpha L_\alpha(n) + \frac{t^\beta}{1-m^2} n^\beta L_\beta(n) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{14}$$

В силу условия теоремы 1 из последнего соотношения следует (13). Теперь из соотношений (12), (13) и из неравенства Чебышева следует, что

$$\frac{X_n(t)}{n^\alpha L_\alpha(n)} \xrightarrow{\mathrm{P}} \frac{t^\alpha}{1-m} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Ясно, что отсюда следует слабая сходимость конечномерных распределений процесса $(n^\alpha L_\alpha(n))^{-1} X_n(t),\ t \geq 0$, к соответствующим распределениям $t^\alpha/(1-m),\ t \geq 0$. Если теперь мы докажем плотность семейства $\left\{(n^\alpha L_\alpha(n))^{-1} X_n(t), t \in [0,T], n \geq 1\right\}$, то утверждение теоремы будет следовать из теоремы 15.1 [14]. Поэтому докажем это.

Пусть $0 \leq s < t \leq T$. Применяя известное неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^k C_i\right)^p \leq k^{p-1} \sum_{i=1}^k C_i^p, \qquad C_i \geq 0, \quad p \geq 1, \tag{15}$$

при $k = 3$ и $p = 2$, получаем

$$\mathbf{E}\left(\frac{X_n(t)}{n^\alpha L_\alpha(n)} - \frac{X_n(s)}{n^\alpha L_\alpha(n)}\right)^2 \leq \frac{3}{n^{2\alpha} L_\alpha^2(n)} \Big(\mathbf{var}X_n(t) + \mathbf{var}X_n(s) +$$

$$+ \left(\mathbf{E}X_n(t) - \mathbf{E}X_n(s)\right)^2\Big). \tag{16}$$

В силу (12) для достаточно больших n имеем

$$\frac{1}{n^{2\alpha} L_\alpha^2(n)} \left(\mathbf{E}X_n(t) - \mathbf{E}X_n(s)\right)^2 \sim \frac{1}{(1-m)^2} \left(t^\alpha - s^\alpha\right)^2.$$

Отсюда с учетом (13), (16) приходим к выводу, что для достаточно больших n имеет место неравенство

$$\mathbf{E}\left(\frac{X_n(t)}{n^\alpha L_\alpha(n)} - \frac{X_n(s)}{n^\alpha L_\alpha(n)}\right)^2 \leq \frac{4}{(1-m)^2} \left(t^\alpha - s^\alpha\right)^2,$$

откуда в силу критерия плотности [14, с. 185] следует плотность семейства

$$\left\{ \left(n^{\alpha} L_{\alpha}(n)\right)^{-1} X_n(t), t \in [0,T], n \geq 1 \right\}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1 следует из теоремы 1 и того факта, что супремум является непрерывным функционалом в $D[0,T]$ (см. [13]). Доказательство следствия 2 следует из теоремы 1 и теоремы о непрерывном отображении [14].

***Доказательство теоремы* 2.** Из (9) и (10) имеем

$$X_k - \mathbf{E}X_k = m\left(X_{k-1} - \mathbf{E}X_{k-1}\right) + M_k, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Из этого рекуррентного уравнения следует, что

$$X_n(t) - \mathbf{E}X_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} m^{[nt]-k} M_k. \tag{17}$$

Введем случайные процессы Y_n и Z_n, положив

$$Y_n(t) = \lambda_n^{-1/2} \sum_{k=1}^{[nt]} m^{[nt]-k} \sum_{j=1}^{X_{k-1}} \left(\xi_{k,j} - m\right), \qquad t \geq 0,$$

$$Z_n(t) = \lambda_n^{-1/2} \sum_{k=1}^{[nt]} m^{[nt]-k} \left(\varepsilon_k - \lambda_k\right), \qquad t \geq 0.$$

Тогда из (17) имеем

$$\lambda_n^{-1/2}\left(X_n(t) - \mathbf{E}X_n(t)\right) = Y_n(t) + Z_n(t). \tag{18}$$

Сначала докажем, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Z_n(t)| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{19}$$

Действительно, учитывая условие (3) и лемму, получаем

$$\lambda_n^{-1} \sum_{k=1}^{[nt]} m^{2([nt]-k)} b_k^2 \sim \frac{b_n^2 t^{\beta}}{\lambda_n (1 - m^2)} \to 0$$

при $n \to \infty$ для любого $t > 0$, так как $b_n^2 = o(\lambda_n)$. Тогда ясно, что при каждом $t \geq 0$ для суммы $Z_n(t)$ выполнено условие Линдеберга. Отсюда, согласно теореме 7.1.11, следует слабая сходимость в $D[0,T]$

$$Z_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поскольку супремум является непрерывным функционалом в $D[0,T]$ [13, с. 367], из последнего соотношения следует (19). Теперь рассмотрим процесс $Y_n(t)$, $t \geq 0$. Пусть $r_n = [\sqrt{n}]$. Процесс Y_n представим в виде

$$Y_n(t) = Y_n^{(1)}(t) + Y_n^{(2)}(t), \qquad t \geq 0, \tag{20}$$

где

$$Y_n^{(1)}(t) = \lambda_n^{-1/2} \sum_{k=[nt]-r_n+1}^{[nt]} m^{[nt]-k} S_k,$$

$$Y_n^{(2)}(t) = \lambda_n^{-1/2} \sum_{k=1}^{[nt]-r_n} m^{[nt]-k} S_k.$$

Здесь $S_k = \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m)$. Докажем, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| Y_n^{(2)}(t) \right| \xrightarrow{\text{P}} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{21}$$

Действительно, нетрудно видеть, что

$$\left| Y_n^{(2)}(t) \right| \leq \lambda_n^{-1/2} m^{r_n} \sum_{k=1}^{[nt]-r_n} |S_k| \leq \lambda_n^{-1/2} m^{r_n} \sum_{k=1}^{[nt]} |S_k|$$

с вероятностью 1.

Далее, применяя неравенство Чебышева и неравенство (15), получаем

$$\text{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| Y_n^{(2)}(t) \right| > \varepsilon \right) \leq \text{P}\left(\lambda_n^{-1/2} m^{r_n} \sum_{k=1}^{[nT]} |S_k| > \varepsilon \right) \leq$$

$$\leq \frac{nTm^{2r_n}}{\varepsilon^2 \lambda_n} \sum_{k=1}^{[nT]} \mathbf{E} S_k^2 = \frac{\sigma^2 nTm^{2r_n}}{\varepsilon^2 \lambda_n} \sum_{k=1}^{[nT]} \mathbf{E} X_{k-1}. \tag{22}$$

Из соотношения (11) и теоремы Карамата [15, с. 322] (теорема 1) следует, что

$$\sum_{k=1}^{[nT]} \mathbf{E} X_{k-1} \sim \frac{n\lambda_n T^{1+\alpha}}{(1-m)(1+\alpha)} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теперь отсюда и из того, что $x^a e^{-bx} \to 0$ при $x \to \infty$ для любых $a > 0$, $b > 0$, следует соотношение

$$\frac{nm^{2r_n}}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{[nT]} \mathbf{E} X_{k-1} \sim \frac{n^2 m^{2r_n} T^{1+\alpha}}{(1-m)(1+\alpha)} = \frac{T^{1+\alpha}}{(1-m)(1+\alpha)} r_n^4 e^{2r_n \ln m} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Последнее соотношение вместе с (22) приводят к (21).

Теперь рассмотрим процесс $Y_n^{(1)}(t)$, $t \geq 0$. Пусть $F_{nk}^{(t)}(x)$ — условное распределение случайной величины $\lambda_n^{-1/2} m^{[nt]-k} S_k$ при заданном X_{k-1}. Наши предположения относительно случайных величин $\xi_{k,j}$ позволяют применить теорему 14 из [17, с. 156] о неравномерной оценке для распределения $F_{nk}^{(t)}(x)$, в силу которой

$$\left|F_{nk}^{(t)}(x)-\Phi\left(\frac{\lambda_n^{1/2}x}{\sigma\sqrt{X_{k-1}}m^{[nt]-k}}\right)\right|\le A\frac{\mathbf{E}\,|\xi_{1,1}-m|^3}{|x|^3\sqrt{\lambda_n}}\,\frac{X_{k-1}}{\lambda_n}\,m^{3([nt]-k)}$$

с вероятностью 1 для любого $|x|>0$, где A — положительная случайная величина, не зависящая от n и k. Отсюда, применяя следствие 1, для любого $a>0$ имеем

$$\sum_{k=[nt]-r_n+1}^{[nt]}\int\limits_{|x|>a}|x|\left|F_{nk}^{(t)}(x)-\Phi\left(\frac{\lambda_n^{1/2}x}{\sigma\sqrt{X_{k-1}}m^{[nt]-k}}\right)\right|dx\le$$

$$\le\frac{2A\mathbf{E}|\xi_{1,1}-m|^3}{a(1-m^3)\sqrt{\lambda_n}}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\frac{X_n(t)}{\lambda_n}-\frac{t^\alpha}{1-m}\right|+\frac{t^\alpha}{1-m}\right)\xrightarrow{\mathrm{P}}0 \text{ при } n\to\infty. \qquad (23)$$

Если теперь мы докажем, что при $n\to\infty$

$$\lambda_n^{-1}\sum_{k=[nt]-r_n+1}^{[nt]}m^{2([nt]-k)}\mathbf{E}\left(S_k^2/\,X_1,X_2,\ldots,X_{k-1}\right)\xrightarrow{\mathrm{P}}\frac{\sigma^2t^\alpha}{(1-m)(1-m^2)}, \qquad (24)$$

то утверждение теоремы будет следовать из теоремы 5.6.1 [13] в силу (18)–(21) и (23). Поэтому докажем (24). Очевидно, что

$$\lambda_n^{-1}\sum_{k=[nt]-r_n+1}^{[nt]}m^{2([nt]-k)}\mathbf{E}\left(S_k^2/\,X_1,X_2,\ldots,X_{k-1}\right)=$$

$$=\sigma^2\lambda_n^{-1}\sum_{k=[nt]-r_n+1}^{[nt]}m^{2([nt]-k)}X_{k-1}. \qquad (25)$$

В силу (11), применяя лемму, нетрудно убедиться в том, что

$$\sigma^2\lambda_n^{-1}\sum_{k=[nt]-r_n+1}^{[nt]}m^{2([nt]-k)}\mathbf{E}X_{k-1}\sim\frac{\sigma^2t^\alpha}{(1-m)(1-m^2)} \quad\text{при}\quad n\to\infty. \qquad (26)$$

Далее имеем

$$\mathbf{var}\left(\sum_{k=[nt]-r_n+1}^{[nt]}m^{2([nt]-k)}X_{k-1}\right)=\sum_{k=[nt]-r_n+1}^{[nt]}m^{4([nt]-k)}\mathbf{var}X_{k-1}+$$

$$+2\sum_{k=[nt]-r_n+1}^{[nt]}\sum_{j=k+1}^{[nt]}m^{2(2[nt]-k-j)}\mathbf{cov}(X_{k-1},X_{j-1}). \qquad (27)$$

Поскольку $\mathbf{cov}(X_k,X_{k+l})=m^l\mathbf{var}X_k$, нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=[nt]-r_n+1}^{[nt]}\sum_{j=k+1}^{[nt]}m^{2(2[nt]-k-j)}\mathbf{cov}(X_{k-1},X_{j-1})=$$

$$= \frac{1}{1-m} \sum_{k=[nt]-r_n+1}^{[nt]} m^{3([nt]-k)} \left(1 - m^{[nt]-k}\right) \mathbf{var} X_{k-1}.$$

Отсюда и из (27), учитывая (14), условие $b_n^2 = o(\lambda_n)$, а также лемму, получаем

$$\mathbf{var}\left(\lambda_n^{-1} \sum_{k=[nt]-r_n+1}^{[nt]} m^{2([nt]-k)} X_{k-1}\right) \sim$$

$$\sim \frac{1}{(1-m)(1-m^2)\lambda_n^2} \left(\frac{2}{1-m^3} - \frac{1+m}{1-m^4}\right) \left(\frac{\sigma^2 t^\alpha n^\alpha L_\alpha(n)}{1-m} + \right.$$

$$\left. + n^\beta L_\beta(n) t^\beta\right) \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty.$$

Отсюда, в свою очередь, и из (25), (26) в силу неравенства Чебышева получаем (24).

Теорема 2 доказана.

1. *Lamperti J.* The limit of a sequence of branching processes // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1967. – **7**. – S. 271 – 288.
2. *Grimwall A.* On the convergecne of sequences of branching processes // Ann. Probab. – 1974. – **2**, №. 6. – P. 1027 – 1045.
3. *Kawazu K., Watanabe S.* Branching processes with immigration and related limit theorems // Теория вероятностей и ее применения. – 1971. – **16**, вып. 2. – С. 34 – 51.
4. *Алиев С.* Предельная теорема для ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона с иммиграцией // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, №. 6. – С. 656 – 659.
5. *Wei C. Z., Winnicki J.* Some asymptotic relations for the branching process with immigration // Stochast. Process. and Appl. – 1989. – **31**. – P. 261 – 282.
6. *Sriram T. N.* Invalidity of bootstrap for critical branching process with immigration // Ann. Statist. – 1994. – **22**. – P. 1013 – 1023.
7. *Ispany M., Pap G., Van Zuijlen M. C. A.* Fluctuation limit of branching processes with immigration and estimation of the mean // Adv. Appl. Probab. – 2005. – **37**. – P. 523 – 528.
8. *Li Z.* A limit tehorem of discrete Galton – Watson branching processes with immigration // J. Appl. Probab. – 2006. – **43**, №. 1. – P. 289 – 295.
9. *Rahimov I.* Functional limit theorems for critical processes with immigration // Adv. Appl. Probab. – 2007. – **39**. – P. 1054 – 1069.
10. *Хусанбаев Я. М.* О сходимости ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона с иммиграцией к диффузионному // Теория вероятностей и мат. статистика. – 2008. – Вып. 79. – С. 183 – 189.
11. *Хусанбаев Я. М.* Почти критические ветвящиеся процессы и предельные теоремы // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 127 – 133.
12. *Хусанбаев Я. М.* О флуктуации ветвящихся процессов с иммиграцией // Узб. мат. журн. – 2008. – № 1. – С. 112 – 126.
13. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
14. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
15. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 738 с.
16. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
17. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

Получено 07.01.12