УДК 517.938

Г. М. Кулик (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ),
В. Л. Кулик (Сілез. техн. ун-т, Глівіце, Польща)

ІНТЕГРАЛЬНИЙ ВИГЛЯД ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We propose an integral form of the Green function for homogeneous linear expansions of dynamical systems in the case of existence of solutions bounded with respect to normal coordinates of their solutions.

Запропоновано інтегральний вигляд функції Гріна однорідних лінійних розширень динамічних систем при існуванні обмежених за нормальними координатами їхніх розв'язків.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = A(\psi)x, \qquad \dot{\psi} = \omega(\psi) \tag{1}$$

з неперервною і обмеженою на R^m $(n \times n)$-матрицею коефіцієнтів $A(\psi)$, $x \in R^n$, $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\psi \in R^m$, $\dot{\psi} = \dfrac{d\psi}{dt}$. Припустимо, що вектор-функція $\omega(\psi)$ визначена при всіх $\psi \in R^m$ і в кожній кулі

$$K_d = \{\psi \in R^m : \|\psi\| \le d\}$$

задовольняє умову Ліпшиця

$$\|\omega(\psi) - \omega(\overline{\psi})\| \le L_d \cdot \|\psi - \overline{\psi}\|,$$

де додатна L_d, взагалі кажучи, залежить від радіуса d кулі K_d. Крім цього припускаємо виконання оцінки

$$\|\omega(\psi)\| \le \alpha_1\|\psi\| + \alpha_2 \tag{2}$$

з деякими невід'ємними сталими α_1, α_2. Ці припущення дають можливість стверджувати існування, єдиність і визначеність при всіх $t \in R$ розв'язку $\psi_t(\psi)$ задачі Коші:

$$\dot{\psi} = \omega(\psi), \qquad \psi|_{t=0} = \psi$$

для кожного фіксованого значення $\psi \in R^m$. Ці розв'язки неперервно залежать від початкових даних ψ.

Нехай існує квадратична форма

$$V = \langle S(\psi)y, y\rangle, \quad y \in R^n, \tag{3}$$

з неперервно диференційовною, обмеженою на R^m симетричною матрицею коефіцієнтів $S(\psi)$, похідна якої в силу спряженої до (1) системи

$$\dot{y} = -A^T(\psi)y, \qquad \dot{\psi} = \omega(\psi) \tag{4}$$

є додатно визначеною, тобто виконується умова

$$\left\langle\left[\dot{S}(\psi) - S(\psi)A^T(\psi) - A(\psi)S(\psi)\right]y, y\right\rangle \ge \|y\|^2, \tag{5}$$

де

$$\dot{S}(\psi) = \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi}\omega(\psi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi_j}\omega_j(\psi).$$

Відомо [1], що неоднорідна система

$$\dot{x} = A(\psi)x + f(\psi), \qquad \dot{\psi} = \omega(\psi) \tag{6}$$

буде мати обмежений на R^m інваріантний многовид $x = u(\psi)$ при кожній неперервній і обмеженій вектор-функції $f(\psi)$ і цей многовид можна записати в інтегральному вигляді

$$x = u(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \psi) f(\psi_\tau(\psi))\, d\tau, \tag{7}$$

де $G_0(\tau, \psi)$ — функція Гріна. У випадку, коли матриця $A(\psi)$ і вектор-функція $\omega(\psi)$ є 2π-періодичними по кожній змінній ψ_j, $j = \overline{1, m}$, функцію $G_0(\tau, \psi)$ прийнято називати функцією Гріна – Самойленка. Функцію $G_0(\tau, \psi)$ завжди можна записати у вигляді

$$G_0(\tau, \psi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\psi) C(\psi_\tau(\psi)), & \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(\psi)[C(\psi_\tau(\psi)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \tag{8}$$

де $\Omega_\tau^t(\psi)$ — фундаментальна матриця розв'язків системи

$$\dot{x} = A(\psi_t(\psi))x, \tag{9}$$

нормована при $t = \tau$, $\Omega_\tau^t(\psi)\big|_{t=\tau} = I_n$, I_n — одинична матриця, $C(\psi)$ — деяка неперервна $(n \times n)$-матриця, підібрана таким чином, що для функції (8) виконується оцінка

$$\| G_0(\tau, \psi) \| \le K \exp\{-\gamma |\tau|\} \tag{10}$$

з деякими додатними сталими K, γ, не залежними ні від $\tau \in R$, ні від $\psi \in R^m$. У випадку, коли матриця $S(\psi)$ у квадратичній формі (3) є невиродженою при всіх $\psi \in R^m$, функція Гріна (8) єдина, матриця $C(\psi)$ є матрицею проектування:

$$C^2(\psi) \equiv C(\psi) \tag{11}$$

і, крім того, виконується тотожність

$$C(\psi_\tau(\psi)) \equiv \Omega_0^\tau(\psi) C(\psi) \Omega_\tau^0(\psi) \quad \forall \tau \in R, \quad \psi \in R^m. \tag{12}$$

Якщо ж матриця коефіцієнтів $S(\psi)$ у квадратичній формі (3) вироджується в деякій точці $\psi = \psi_0$, то існує безліч різних функцій Гріна (8) і жодна з матриць $C(\psi)$ не буде задовольняти ні тотожність (11), ні тотожність (12). Слід відмітити, що, незважаючи на глибокі дослідження проблеми існування функції Гріна (8) у випадку, коли $\psi = \varphi \in T_m$, T_m — m-вимірний тор (див. [2, 3]), питання про конкретний запис функції Гріна для багатьох прикладів залишається відкритим. Деяким рекомендаціям щодо побудови функції Гріна і присвячено запропоновану статтю.

Позначимо через $\hat{M}$ множину таких значень $\psi = \hat{\psi} \in R^m$, що матриця коефіцієнтів $C(\psi_t(\hat{\psi}))$ у квадратичній формі (3) при достатньо великих значеннях t, $t \in [T(\hat{\psi}), +\infty)$, є додатно визначеною, а при достатньо великих від'ємних значеннях t, $t \in (-\infty, -T(\hat{\psi})]$, — від'ємно визначеною. Наприклад, якщо спряжена система (4) має вигляд

$$\dot{y} = n(\mathrm{th}\psi)y, \qquad \dot{\psi} = 1, \tag{13}$$

де $n = \text{const} > 0$, то множина $\widehat{M}$ збігається з R, оскільки кожна неперервно диференційовна й обмежена на R функція $s(\psi)$, яка задовольняє нерівність

$$\dot{s}(\psi) + 2ns(\psi)\text{th}\psi \geq 1,$$

обов'язково буде додатною при достатньо великих значеннях ψ і від'ємною на $-\infty$.

Якщо тепер розглянути приклад

$$\dot{y} = -a(\cos\psi)y, \qquad \dot{\psi} = \sin\psi, \tag{14}$$

з додатною сталою a, то множина $\widehat{M} = R \setminus \{\pi n\}$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Відмітимо, що якщо в системі (9) значення параметрів $\psi = \widehat{\psi} \in \widehat{M}$, то всі розв'язки цієї системи експоненціально затухають на $+\infty$ і на $-\infty$; більш детально це означає, що для матриціанта $\Omega^t_\tau(\widehat{\psi})$ системи (9) при $\psi = \widehat{\psi} \in \widehat{M}$ виконується оцінка

$$\left\|\Omega^t_\tau(\widehat{\psi})\right\| \leq N \begin{cases} \exp\{-\gamma(t-\tau)\}, & 0 \leq \tau \leq t, \\ \exp\{\gamma(t-\tau)\}, & t \leq \tau \leq 0, \end{cases} \tag{15}$$

з деякими додатними сталими N, γ, які можуть залежати тільки від $\widehat{\psi} \in \widehat{M}$. Слід зауважити, що множина $\widehat{M}$ не залежить від вибору неперервно диференційовної й обмеженої матриці $S(\psi)$, яка задовольняє умову (5).

Справедливою є така теорема.

Теорема. *Нехай існує неперервно диференційовна й обмежена на* R^m *симетрична матриця* $S(\psi)$, *для якої виконується умова* (5). *Тоді існує неперервна й обмежена на* R^m *матриця* $C(\psi)$ *така, що для функції* (8) *виконується оцінка* (10) *і для кожного* $\psi = \widehat{\psi} \in \widehat{M}$ *значення матриці* $C(\psi_\tau(\widehat{\psi}))$ *визначається рівністю*

$$C(\psi_\tau(\widehat{\psi})) = \Omega^\tau_0(\widehat{\psi}) \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Omega^z_0(\widehat{\psi})\right)^T \Omega^z_0(\widehat{\psi})\, dz\right]^{-1} \int_{-\infty}^{\tau} \left(\Omega^z_0(\widehat{\psi})\right)^T \Omega^z_0(\widehat{\psi})\, dz \cdot \Omega^0_\tau(\widehat{\psi}). \tag{16}$$

Доведення. Доповнимо систему (1) до регулярної:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\psi)x, \qquad \dot{\psi} = \omega(\psi), \\ \dot{y} &= x - A^T(\psi)y, \qquad y \in R^n, \end{aligned} \tag{17}$$

тобто такої, яка має єдину $(2n \times 2n)$-вимірну функцію Гріна:

$$\overline{G}_0(\tau, \psi) =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} \Omega^0_\tau(\psi) & 0 \\ \omega(0,\tau,\psi) & \left(\Omega^\tau_0(\psi)\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}(\psi_\tau(\psi)) & C_{12}(\psi_\tau(\psi)) \\ C_{21}(\psi_\tau(\psi)) & C_{22}(\psi_\tau(\psi)) \end{pmatrix}, & \tau \leq t, \\ \begin{pmatrix} \Omega^0_\tau(\psi) & 0 \\ \omega(0,\tau,\psi) & \left(\Omega^\tau_0(\psi)\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}(\psi_\tau(\psi)) - I_n & C_{12}(\psi_\tau(\psi)) \\ C_{21}(\psi_\tau(\psi)) & C_{22}(\psi_\tau(\psi)) - I_n \end{pmatrix}, & \tau > t, \end{cases} \tag{18}$$

де

$$\omega(t,\tau,\psi) = \int_\tau^t \left(\Omega^z_t(\psi)\right)^T \Omega^z_\tau(\psi)\, dz.$$

Для будь-яких значень $\overline{\psi}$, $\tilde{\psi} \in R^n$ має місце рівність

$$\overline{G}_0(\tau, \overline{\psi}) - \overline{G}_0(\tau, \tilde{\psi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(z, \overline{\psi})\left[P(\psi_z(\overline{\psi})) - P(\psi_z(\tilde{\psi}))\right]\overline{G}_z(\tau, \tilde{\psi})\, dz,$$

де

$$P(\psi) = \begin{pmatrix} A(\psi) & 0 \\ I_n & -A^T(\psi) \end{pmatrix},$$

з якої випливає оцінка

$$\left\| \overline{G}_0(\tau, \overline{\psi}) - \overline{G}_0(\tau, \tilde{\psi}) \right\| \leq L \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| P(\psi_z(\overline{\psi})) - P(\psi_z(\tilde{\psi})) \right\| e^{-\gamma|z|}\, dz.$$

Оскільки в правій частині інтеграл збігається рівномірно по $\overline{\psi}$, $\tilde{\psi} \in R^m$, то він є неперервною функцією, залежною від змінних $\overline{\psi}$, $\tilde{\psi}$ і при $\overline{\psi} = \tilde{\psi}$ набуває нульового значення. Враховуючи те, що $\overline{G}_0(-0, \psi) = \left\{C_{ij}(\psi)\right\}_{i,\, j=1}^2$, на підставі наведеної вище оцінки стверджуємо неперервну залежність за змінними $\psi \in R^m$ матриць $C_{ij}(\psi)$ у структурі функції Гріна (18). Блок $C_{11}(\psi) = C(\psi)$ є тією функцією, з якою функція Гріна (8) задовольняє оцінку (10).

Знайдемо рівняння взаємно доповнювальних підпросторів $E^+(\hat{\psi})$, $E^-(\hat{\psi})$ із R^{2n} таких, що всі розв'язки системи

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\psi_t(\hat{\psi}))x, \quad \hat{\psi} \in \hat{M}, \\ \dot{y} &= x - A^T(\psi_t(\hat{\psi}))y, \quad y \in R^n, \end{aligned} \tag{19}$$

які починаються при $t = 0$ з $E^+(\hat{\psi})$, затухають до нуля на $+\infty$, а розв'язки, які починаються при $t = 0$ з $E^-(\hat{\psi})$, затухають при $t \to -\infty$. З цією метою загальний розв'язок першої системи $x(t) = \Omega_0^t(\hat{\psi})x_0$ підставимо в другу підсистему (19)

$$\dot{y} = -A^T(\psi_t(\hat{\psi}))y + \Omega_0^t(\hat{\psi})x_0$$

і запишемо її загальний розв'язок

$$y(t) = \left(\Omega_t^0(\hat{\psi})\right)^T \left[y_0 + \int_0^t \left(\Omega_0^z(\hat{\psi})\right)^T \Omega_0^z(\hat{\psi})\, dz \cdot x_0 \right]. \tag{20}$$

Оскільки $\left(\Omega_t^0(\hat{\psi})\right)^T$ є матрицантом спряженої до (9) системи, то на підставі оцінки (15) він зростає на $+\infty$ і на $-\infty$. З іншого боку, якщо початкові значення x_0, y_0 знаходяться в підпросторі $E^+(\hat{\psi})$, то функція (20) повинна затухати до нуля на $+\infty$, а отже, необхідно виконання рівності

$$y_0 + \int_0^{+\infty} \left(\Omega_0^z(\hat{\psi})\right)^T \Omega_0^z(\hat{\psi})\, dz \cdot x_0 = 0. \tag{21}$$

Аналогічно, якщо початкові значення x_0, y_0 знаходяться в підпросторі E^-, то з рівності (20) випливає

$$y_0 - \int_{-\infty}^{0} \left(\Omega_0^z\right)^T \Omega_0^z \, dz \cdot x_0 = 0. \tag{22}$$

Очевидно, (21) є рівнянням підпростору $E^+(\hat{\psi})$, а рівняння (22) визначає підпростір $E^-(\hat{\psi})$. Введемо наступні позначення:

$$\Phi_+ = \int_0^{+\infty} \left(\Omega_0^z(\hat{\psi})\right)^T \Omega_0^z(\hat{\psi}) \, dz,$$
$$\Phi_- = \int_{-\infty}^{0} \left(\Omega_0^z(\hat{\psi})\right)^T \Omega_0^z(\hat{\psi}) \, dz, \quad \Phi = \Phi_+ + \Phi_-. \tag{23}$$

Таким чином, рівняння підпросторів $E^+(\hat{\psi})$ і $E^-(\hat{\psi})$ мають вигляд

$$E^+ : \ y + \Phi_+ x = 0,$$
$$E^- : \ y - \Phi_- x = 0.$$

Тепер знайдемо $(2n \times 2n)$-матрицю проектування P на підпростір E^+ вздовж підпростору E^-. Для цього досить знайти значення дії матриці P на одиничні вектори, тобто знайти $P \cdot \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ і $P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}$. Через X і Y позначимо змінні $(n \times \times n)$-матриці, запишемо відповідні системи рівнянь

$$Y + \Phi_+ X = 0, \qquad Y + \Phi_+ X = 0,$$
$$Y - \Phi_-(X - I_n) = 0, \qquad Y - I_n - \Phi_- X = 0$$

і з їх розв'язків складемо матрицю P:

$$P = \begin{pmatrix} \Phi^{-1}\Phi_- & -\Phi^{-1} \\ -\Phi_+\Phi^{-1}\Phi_- & \Phi_+\Phi^{-1} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Оскільки функція Гріна (18) є єдиною для розширеної системи (17), то для матриці проектування $\left\{C_{ij}(\psi)\right\}_{ij=1}^2$ виконується тотожність (12), звідки при значеннях $\psi = \hat{\psi} \in \hat{M}$ в розглядуваному випадку отримуємо

$$\begin{pmatrix} C_{11}(\psi_\tau(\hat{\psi})) & C_{12}(\psi_\tau(\hat{\psi})) \\ C_{21}(\psi_\tau(\hat{\psi})) & C_{22}(\psi_\tau(\hat{\psi})) \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} \Omega_0^\tau(\hat{\psi}) & 0 \\ \omega(0, \tau, \hat{\psi}) & \left(\Omega_\tau^0(\hat{\psi})\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{-1}\Phi_- & -\Phi^{-1} \\ -\Phi_+\Phi^{-1}\Phi_- & \Phi_+\Phi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_\tau^0(\hat{\psi}) & 0 \\ \omega(0, \tau, \hat{\psi}) & \left(\Omega_0^\tau(\hat{\psi})\right)^T \end{pmatrix}.$$

Блок $C_{11}(\hat{\psi})$ записаної матриці і є матрицею $C(\hat{\psi})$ в структурі функції Гріна (8) при значеннях $\psi = \hat{\psi} \in \hat{M}$, отже,

$$C(\psi_\tau(\hat{\psi})) = C_{11}(\psi_\tau(\hat{\psi})) = \Omega_0^\tau(\hat{\psi})\Phi^{-1} \left[\Phi_- - \int_\tau^0 \left(\Omega_0^z(\hat{\psi})\right)^T \left(\Omega_0^z(\hat{\psi})\right) dz \right] \Omega_\tau^0(\hat{\psi}).$$

Звідси, враховуючи позначення (23), отримуємо рівність (16), що і слід було довести.

Зауваження. **1.** У випадку, коли множина $\widehat{M}$ є скрізь щільною в R^n, матрицю $C(\widehat{\psi})$, визначену за формулою (16), можна довизначити за неперервністю при всіх $\psi \in R^n$.

2. Розглядаючи замість системи (17) більш загальну

$$\dot{x} = A(\psi)x, \quad \dot{\psi} = \omega(\psi),$$
$$\dot{y} = B(\psi)x - A^T(\psi)y, \quad y \in R^n, \tag{25}$$

з деякою матрицею $B(\psi)$, неперервною і обмеженою в R^m, для якої виконується умова додатної визначеності

$$\langle B(\psi)x, x\rangle \geq \beta\|x\|^2, \quad \beta = \text{const} > 0, \tag{26}$$

зображення (16) матриці $C(\psi_\tau(\widehat{\psi}))$ можна записати у вигляді

$$C(\psi_\tau(\widehat{\psi})) = \Omega_0^\tau(\widehat{\psi})\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\Omega_0^z(\widehat{\psi})\right)^T B(\psi_z(\widehat{\psi}))\Omega_0^z(\widehat{\psi})\,dz\right]^{-1} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\tau}\left(\Omega_0^z(\widehat{\psi})\right)^T B(\psi_z(\widehat{\psi}))\Omega_0^z(\widehat{\psi})\,dz \cdot \Omega_\tau^0(\widehat{\psi}),$$

де $B(\psi)$ — довільна $(n \times n)$-матриця, неперервна й обмежена на R^m, для якої виконується умова (26).

3. Якщо умову (26) замінити більш слабкою:

$$\langle B(\psi)x, x\rangle > 0 \quad \forall\, x \in R^n, \quad x \neq 0, \tag{27}$$

то при виконанні нерівності (5) лінійна система

$$\dot{x} = A(\psi_t(\psi))x, \quad \psi \in R^m,$$
$$\dot{y} = B(\psi_t(\psi))x - A^T(\psi_t(\psi))y, \quad y \in R^n,$$

буде експоненціально дихотомічною на осі при кожному фіксованому значенні параметрів $\psi \in R^m$, а функції Гріна для системи (25) може і не існувати. Це можна проілюструвати на прикладі системи

$$\dot{x} = (-2\text{th}\psi_1 + \text{th}\psi_2)x, \quad \dot{\psi}_i = 1, \quad i = 1, 2,$$
$$\dot{y} = \left(\frac{1}{\text{ch}^2\psi_2}\right)x + (2\text{th}\psi_1 - \text{th}\psi_2)y.$$

Метод побудови матриці проектування (24) дозволяє стверджувати наступне.

Зауваження **4.** Якщо деякий підпростір E^+ визначається системою рівнянь $A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = 0$, а підпростір E^- — іншою системою рівнянь $A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = 0$ і ці підпростори взаємно доповнювальні в R^n: $R^n = E^+ \oplus E^-$, а це означає, що

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \neq 0,$$

то матриця проектування на підпростір E^+ вздовж підпростору E^- має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Тепер розглянемо, з метою порівняння, одночасно два приклади

$$\dot{x} = -n(\operatorname{th}\psi)x, \quad \dot{\psi} = 1, \tag{28}$$

і

$$\dot{x} = n(\cos\psi)x, \quad \dot{\psi} = \sin\psi, \tag{29}$$

де n — натуральне число. Для системи (28) маємо

$$\psi_t(\psi) = t + \psi, \qquad \Omega_\tau^t(\psi) = \left(\frac{e^{\tau+\psi} + e^{-\tau-\psi}}{e^{t+\psi} + e^{-t-\psi}}\right)^n,$$

а для системи (29) отримуємо

$$\Omega_\tau^t(\psi) = \left(\frac{e^{\tau}\cos^2\frac{\psi}{2} + e^{-\tau}\sin^2\frac{\psi}{2}}{e^{t}\cos^2\frac{\psi}{2} + e^{-t}\sin^2\frac{\psi}{2}}\right)^n.$$

Для знаходження функцій $C(\psi)$, які входять у структуру функції Гріна (8), відповідно для систем (28) і (29) отримуємо системи нерівностей

$$\begin{gathered} |C(\psi)| \le K\left(\frac{e^{\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}}\right)^n, \\ |C(\psi) - 1| \le K\left(\frac{e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}}\right)^n, \end{gathered} \tag{30}$$

і

$$\begin{gathered} |C(\psi)| \le K\left(\sin^2\frac{\psi}{2}\right)^n, \\ |C(\psi) - 1| \le K\left(\cos^2\frac{\psi}{2}\right)^n. \end{gathered} \tag{31}$$

Для того щоб безпосередньо записати функції $C(\psi)$ системи нерівностей (30) і системи (31), застосуємо формулу (16) при значенні $\tau = 0$. В результаті отримаємо

$$C(\psi) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{\psi} + e^{-\psi}}{e^{t+\psi} + e^{-t-\psi}}\right)^{2n} dt\right]^{-1} \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{e^{\psi} + e^{-\psi}}{e^{t+\psi} + e^{-t-\psi}}\right)^{2n} dt \tag{32}$$

і відповідно для системи (31)

$$C(\psi) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^{t}\cos^2\frac{\psi}{2} + e^{-t}\sin^2\frac{\psi}{2}}\right)^{2n} dt\right]^{-1} \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{e^{t}\cos^2\frac{\psi}{2} + e^{-t}\sin^2\frac{\psi}{2}}\right)^{2n} dt. \tag{33}$$

Підраховуючи інтеграли (32), (33) при $n = 2$, відповідно маємо

$$C(\psi) = 1 - 3\left(\frac{e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}}\right)^2 + 2\left(\frac{e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}}\right)^3, \tag{34}$$

$$C(\psi) = 1 - 3\left(\cos^2\frac{\psi}{2}\right)^2 + 2\left(\cos^2\frac{\psi}{2}\right)^3. \tag{35}$$

При $n = 3$ одержимо

$$C(\psi) = 1 - 10\left(\frac{e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}}\right)^3 + 15\left(\frac{e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}}\right)^4 - 6\left(\frac{e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}}\right)^5 \tag{36}$$

і

$$C(\psi) = 1 - 10\left(\cos^2\frac{\psi}{2}\right)^3 + 15\left(\cos^2\frac{\psi}{2}\right)^4 - 6\left(\cos^2\frac{\psi}{2}\right)^5. \tag{37}$$

Виконуючи в інтегралах (32) заміну змінних $x = e^{2(t+\psi)}$, отримуємо

$$C(\psi) = \left[\int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(x+1)^{2n}}\,dx\right]^{-1} \int_0^{e^{2\psi}} \frac{x^{n-1}}{(x+1)^{2n}}\,dx. \tag{38}$$

Використавши розклад

$$\frac{x^{n-1}}{(x+1)^{2n}} = \frac{A_n}{(x+1)^{2n}} + \frac{A_{n-1}}{(x+1)^{2n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{(x+1)^{n+1}},$$

знайдемо коефіцієнти

$$A_j = \frac{(n-1)!}{(n-j)!(j-1)!}(-1)^{j-1} = C_{n-1}^{j-1}(-1)^{j-1} \tag{39}$$

і підрахуємо інтеграли в рівності (35). Отримаємо

$$C(\psi) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{n+j-1}\left(\frac{e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}}\right)^{n+j-1}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{n+j-1}}. \tag{40}$$

Оскільки у формулах (34) і (35), (36) і (37) спостерігається рівність коефіцієнтів, то природно припустити, що функцію $C(\psi)$, записану у вигляді інтегралів (33), можна записати у вигляді суми

$$C(\psi) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{n+j-1}\left(\cos^2\frac{\psi}{2}\right)^{n+j-1}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{n+j-1}}. \tag{41}$$

Позначимо $x = \sin^2(\psi/2)$ і розглянемо функцію

$$\Phi(x) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{n+j-1}(1-x)^{n+j-1}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{n+j-1}}. \tag{42}$$

Для виконання першої з оцінок (21) для функції (41) потрібно, щоб многочлен (42) можна було подати у вигляді $\Phi(x) = x^n \Phi_1(x)$ з деяким многочленом

$\Phi_1(x)$. Це все одно, що значення при $x = 0$ всіх похідних функції $\Phi(x)$ до порядку $n-1$ включно дорівнюють нулю. З (42) видно, що $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 0$. Якщо тепер підрахувати значення решти похідних, то бажано було б довести виконання наступних рівностей:

$$\begin{aligned}
\Phi''(0) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} C_{n-1}^{j-1} (n+j-2) = 0, \\
\Phi'''(0) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} C_{n-1}^{j-1} (n+j-2)(n+j-3) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi^{(n-1)}(0) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} C_{n-1}^{j-1} (n+j-2)(n+j-3)\ldots(j+1) = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Повернемось до інтегралів (38) і виконаємо в них заміну змінних $\sigma = 1/(x+1)$. Тоді

$$C(\psi) = \frac{\int\limits_1^{1/(e^{2\psi}+1)} (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1}\, d\sigma}{\int\limits_1^{0} (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1}\, d\sigma}.$$

Розглянемо відповідну функцію від змінної z:

$$\Theta(z) = \frac{\int\limits_z^{1} (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1}\, d\sigma}{\int\limits_0^{1} (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1}\, d\sigma}. \tag{44}$$

Таким чином, функцію (40) можна записати так:

$$C(\psi) = \Theta\left(\frac{e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}}\right),$$

а функцію (41) записуємо у вигляді

$$C(\psi) = \Theta\left(\cos^2 \frac{\psi}{2}\right),$$

при цьому многочлен (42) збігається з многочленом $\Theta(1-x)$, для якого легко встановити рівність

$$\Theta(1-x) = \frac{\int\limits_1^{1-x} (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1}\, d\sigma}{\int\limits_1^{0} (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1}\, d\sigma} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^{x} (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1}\, d\sigma}{\int\limits_0^{1} (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1}\, d\sigma} = x^n \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} (-1)^{j-1} \dfrac{x^{j-1}}{n+j-1}}{\sum\limits_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} (-1)^{j-1} \dfrac{1}{n+j-1}},$$

а також

$$1-\Theta(x)=\frac{\int\limits_1^0(1-\sigma)^{n-1}\sigma^{n-1}\,d\sigma-\int\limits_1^x(1-\sigma)^{n-1}\sigma^{n-1}\,d\sigma}{\int\limits_1^0(1-\sigma)^{n-1}\sigma^{n-1}\,d\sigma}=$$

$$=\frac{\int\limits_0^x(1-\sigma)^{n-1}\sigma^{n-1}\,d\sigma}{\int\limits_0^1(1-\sigma)^{n-1}\sigma^{n-1}\,d\sigma}=x^n\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}C_{n-1}^{j-1}(-1)^{j-1}\dfrac{x^{j-1}}{n+j-1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}C_{n-1}^{j-1}(-1)^{j-1}\dfrac{1}{n+j-1}}.$$

***Зауваження.* 5.** Пропонується одну з функцій $f(x)$, яка задовольняє одночасно дві нерівності:

$$|f(x)|\le K(\sin^2x)^{\lambda},\qquad |f(x)-1|\le K(\cos^2x)^{\lambda}$$

з деякою додатною сталою K, не залежною від x, $x\in R$, λ — фіксоване дійсне число, $\lambda\ge 2$, записувати у вигляді тригонометричного многочлена

$$f(x)=\Theta(\cos^2x),\qquad \Theta(z)=\int\limits_z^1\sigma^m(1-\sigma)^m\,d\sigma\cdot\left(\int\limits_0^1\sigma^m(1-\sigma)^m\,d\sigma\right)^{-1},$$

де $m=\lambda-1$, коли λ — ціле число, і $m=[\lambda]$ при $m<\lambda<m+1$. У випадку, коли, наприклад, $\lambda=\pi$, функція $f(x)$ набирає вигляду

$$f(x)=20\cos^{14}x-70\cos^{12}x+84\cos^{10}x-35\cos^8x+1.$$

6. Для многочлена (44) виконується тотожність $\Theta(x)+\Theta(1-x)\equiv 1$.

7. Якщо розглянути функціональне рівняння $\Theta(x)+\Theta(1-x)=1$, то легко можна записати його загальний розв'язок, а вже знаходження серед цих розв'язків многочленів $\Theta(x)$, для яких одночасно виконуються дві умови: $\Theta(1-x)=x^n\Theta_1(x)$ і $1-\Theta(x)=x^n\Theta_2(x)$, викликає певні труднощі.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
2. *Самойленко А. М.* К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 513 – 521.
3. *Бойчук А. А.* Условие существования единственной функции Грина – Самойленко задачи об инвариантном торе // Там же. – С. 556 – 559.

Одержано 15.08.2003