УДК 519.21

Б. В. Бондарев, Е. Е. Ковтун (Донецк. нац. ун-т)

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

In the metric $\rho(X, Y) = \big(\sup\limits_{0\le t\le T} \mathrm{M}|X(t) - Y(t)|^2\big)^{1/2}$ for an ordinary stochastic differential equation of order $p \ge 2$ with small parameter of the higher derivative, we establish an estimate of the rate of convergence of its solution to a solution of stochastic equation of order $p-1$.

У метриці $\rho(X, Y) = \big(\sup\limits_{0\le t\le T} \mathrm{M}|X(t) - Y(t)|^2\big)^{1/2}$ встановлено оцінку швидкості збіжності розв'язку звичайного стохастичного диференціального рівняння порядку $p \ge 2$ з малим параметром при старшій похідній до розв'язку стохастичного рівняння порядку $p-1$.

Введение. В статье рассматриваются уравнения, описывающие движение частиц в быстропеременных случайных полях. Таким будет движение отдельных молекул жидкости и газа, заряженных частиц в ионизированной плазме, движение электронов в кристаллической решетке и т. п. Стохастические уравнения в указанных задачах математической физики, как правило, содержат вторую или более высокую производную по времени. Однако в теории случайных процессов для изучения явлений диффузии, т. е. движения частицы под влиянием случайных взаимодействий, используются стохастические уравнения более низкого порядка. Эти уравнения получены из эвристических соображений, но они существенно проще. На связь записываемых уравнений динамики, содержащих вторую производную по времени, с марковскими процессами впервые указано в работе Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1]. Возникает вопрос: можно ли при каких-либо условиях точное уравнение математической физики, содержащее вторую или более высокую производную по времени, заменить стохастическим уравнением, содержащим производную по времени порядком ниже? Например, случайный процесс $\left\{X(t), \dfrac{dX(t)}{dt}\right\}$ описывает движение частицы массы m под действием поля сил $F(x)$ в непрерывной среде, свойства которой характеризуют параметры A и T. Этот процесс может быть описан и уравнением Ланжевена [2]

$$md\frac{dX}{dt} + A\frac{dX}{dt}dt = \sqrt{AT}\,dW(t) + mF(X(t))dt, \tag{1}$$

где $W(t)$ — винеровский процесс. Обозначив $\varepsilon = m/A$, из (1) получим стохастическое дифференциальное уравнение с малым параметром при старшей производной

$$\varepsilon d \frac{dX}{dt} = -\frac{dX}{dt} dt + \sqrt{\frac{T}{A}} dW(t) + \varepsilon F(X(t)) dt. \tag{2}$$

Примером движения, описываемого с помощью уравнения третьего порядка, является движение электрона [3 – 5]

$$\varepsilon m \frac{d^3X}{dt^3} = -m \frac{d^2X}{dt^2} + f\left(X, \frac{dX}{dt}, t\right) + lE, \tag{3}$$

где $\varepsilon = \dfrac{2l^2}{3mc^2} \cong 10^{-22} c$, m — наблюдаемая масса, c — скорость света в вакууме, l — заряд электрона, $f(x, y, t)$ — внешние силы, E — хаотические колебания электрического поля вакуума. В [4, 5] изучалось предельное поведение решений уравнения вида (3) второго порядка, там же можно найти ссылки на более ранние работы. В работе [4] установлены широкие условия, обеспечивающие при $\varepsilon \to 0$ превращение уравнения второго порядка в уравнение первого порядка, а также аналитическая связь между коэффициентами до предельного и предельного уравнений для случая $A = aI$, где a — некоторая постоянная. В работе [5] результаты [4] перенесены на случай уравнений порядка $p \geq 3$ с весьма общими коэффициентами и малым параметром при старшей производной:

$$\varepsilon d \frac{d^{p-1}X_\varepsilon(t)}{dt^{p-1}} = -A_\varepsilon\left(t, X_\varepsilon(t), \frac{dX_\varepsilon(t)}{dt}, \ldots, \frac{dX_\varepsilon^{p-2}(t)}{dt^{p-2}}\right) \frac{d^{p-1}X_\varepsilon(t)}{dt^{p-1}} dt +$$

$$+ U_\varepsilon\left(t, X_\varepsilon(t), \frac{dX_\varepsilon(t)}{dt}, \ldots, \frac{dX_\varepsilon^{p-2}(t)}{dt^{p-2}}\right) dt + B_\varepsilon\left(t, X_\varepsilon(t), \frac{dX_\varepsilon(t)}{dt}, \ldots, \frac{dX_\varepsilon^{p-2}(t)}{dt^{p-2}}\right) dW(t), \tag{4}$$

где $X_\varepsilon(t)$, U_ε — векторы, A_ε, B_ε — матрицы, $W(t)$ — многомерный винеровский процесс. В работах [2 – 5] доказана слабая сходимость случайного процесса $X_\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$, при $\varepsilon \to 0$ к решению уравнения более низкого порядка. Например, в [5] показано, что при определенных условиях решение (4) слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению стохастического дифференциального уравнения

$$d \frac{d^{p-2}X_0(t)}{dt^{p-2}} = A_t^{-1} U_t dt + q_t dt + A_t^{-1} B_t dW(t), \tag{5}$$

в котором вектор q_t определяется элементами матриц A_t и B_t. Цель данной работы — установить оценку скорости сходимости решения (4) при $p \geq 2$ к решению (5) в метрике $\rho(x, y) = (\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \mathrm{M}|X(t) - Y(t)|^2)^{1/2}$. Следует отметить, что при $p = 2$ аналогичный случай [4] (коэффициент $A_\varepsilon(t)$ не зависит от времени, от фазовой переменной и производных по времени от нее) рассмотрен в [6], а именно получена оценка скорости сходимости решения (4) для $p = 2$ к решению (5) в метриках $\rho_i(X, Y) = (\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \mathrm{M}|X(t) - Y(t)|^i)^{1/i}$, $i = 1, 2$, при $A_\varepsilon = a_\varepsilon$, где a_ε — некоторая постоянная. В этом случае доказательство значительно проще, и в ряде случаев получаются более сильные утверждения, чем для общего вида коэффициента $A_\varepsilon\left(t, X_\varepsilon(t), \dfrac{dX_\varepsilon(t)}{dt}, \ldots, \dfrac{dX_\varepsilon^{p-2}(t)}{dt^{p-2}}\right)$, когда в сносе предельного уравнения появляется дополнительный коэффициент q_t. Кроме того, в случае, когда рассматривается уравнение (4), а коэффициент не зависит от производной $\dfrac{dX_\varepsilon^{p-2}(t)}{dt^{p-2}}$, в сносе предельного уравнения этот дополнительный коэффициент не появляется.

Основные результаты. В дальнейшем будем считать $0 < \varepsilon < 1$ и рассматривать скалярное уравнение порядка $p \geq 2$ вида

$$\varepsilon dX_\varepsilon^{p-1}(t) = -A_\varepsilon\big(t, X_\varepsilon(t), X_0^1(t), \ldots, X^{p-2}\big) X_\varepsilon^{p-1}(t)\, dt +$$
$$+ U_\varepsilon\big(t, X_\varepsilon(t), X_0^1(t), \ldots, X^{p-2}\big) dt + B_\varepsilon\big(t, X_\varepsilon(t), X_0^1(t), \ldots, X^{p-2}\big) dW(t) \tag{6}$$

при начальных условиях

$$\mathrm{M}\big|Y_\varepsilon(0)\big|^{12} < \frac{K}{\varepsilon^6} < +\infty, \qquad \mathrm{M}\big|X_\varepsilon(0)\big|^{12} < K < +\infty,$$
$$\mathrm{M}\Big|X_\varepsilon^l(0)\Big|^{12} < K < +\infty, \quad l = 1, \ldots, p-2 \tag{6$'$}$$

(начальные условия $Y_\varepsilon(0)$, $X_\varepsilon^{p-2}(0)$, … , $X_\varepsilon^1(0)$, $X_\varepsilon(0)$ могут быть и случайными, тогда будем предполагать их независимость от винеровского процесса $W(t)$, $t \geq 0$). Запишем (6) в виде следующей системы:

$$\begin{aligned}
&X_\varepsilon^{p-1}(t) = Y_\varepsilon(t),\\
&dX_\varepsilon^{p-2}(t) = Y_\varepsilon(t)\, dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&dX_\varepsilon(t) = X_\varepsilon^1(t)\, dt,\\
&dX_\varepsilon^{p-2}(t) = -\varepsilon A_\varepsilon^{-1}\big(t, X_\varepsilon(t), X_0^1(t), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(t)\big) dY_\varepsilon(t) +\\
&+ A_\varepsilon^{-1}\big(t, X_\varepsilon(t), X_0^1(t), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(t)\big) U_\varepsilon\big(t, X_\varepsilon(t), X_0^1(t), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(t)\big) dt +\\
&+ A_\varepsilon^{-1}\big(t, X_\varepsilon(t), X_0^1(t), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(t)\big) B_\varepsilon\big(t, X_\varepsilon(t), X_0^1(t), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(t)\big) dW(t)
\end{aligned} \tag{6$''$}$$

при начальных условиях (6′).

Теорема. *Пусть выполнены условия*:

1) $0 < c \leq A(t, x, x_1, \ldots, x_{p-2}) \leq C < +\infty$, $\quad \big|B_\varepsilon(t, \bar z)\big| + \big|U_\varepsilon(t, \bar z)\big| \leq C < +\infty$,

$$\big|B_\varepsilon(t, \bar z_1) - B_\varepsilon(t, \bar z_2)\big| + \big|U_\varepsilon(t, \bar z_1) - U_\varepsilon(t, \bar z_2)\big| \leq C\big|\bar z_1 - \bar z_2\big|,$$

$$\left|\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial^2 A_\varepsilon}{\partial t \partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial^2 A_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial^2 A_\varepsilon}{\partial x_i \partial x}\right| \leq C < +\infty,$$
$$i, j = 1, \ldots, p-2,$$

во всей области определения;

2) *если* $\bar z = \{x, x_1, \ldots, x_{p-2}\}$, *то*

$$\big|A_\varepsilon(t, \bar z) - A_0(t, \bar z)\big|^2 + \big|\nabla A_\varepsilon(t, \bar z) - \nabla A_0(t, \bar z)\big|^2 +$$
$$+ \big|B_\varepsilon(t, \bar z) - B_0(t, \bar z)\big|^2 + \big|U_\varepsilon(t, \bar z) - U_0(t, \bar z)\big|^2 \leq \delta^2(\varepsilon) R,$$
$$|\bar z| \leq R < +\infty, \quad \delta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0;$$

3) *функции* $U_\varepsilon(t, \bar z)$, $B_\varepsilon(t, \bar z)$ *непрерывны по* t,

$$\mathrm{M}\big|Y_\varepsilon(0)\big|^{12} < \frac{K}{\varepsilon^6}, \qquad \mathrm{M}\big|X_\varepsilon(0)\big|^{12} < K < +\infty,$$
$$\mathrm{M}\Big|X_\varepsilon^i(0)\Big|^{12} < K < +\infty, \quad i = 1, \ldots, p-2;$$

4) $\sum_{i=0}^{p-2} \mathrm{M}\Big|X_\varepsilon^i(0) - X_0^i(0)\Big|^2 \leq r_0(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ (*здесь и далее считаем, что* $X_\varepsilon^0(t) = X_\varepsilon(t)$, $X_0^0(t) = X_0(t)$).

Тогда справедлива оценка

$$\sup_{0\le t\le T} \mathrm{M}\sum_{i=0}^{p-2}\left|X_\varepsilon^i(t)-X_0^i(t)\right|^2 \le \chi(\varepsilon)D \to 0, \quad \varepsilon\to 0 \tag{7}$$

(*постоянная* D *приведена в приложении*). *Здесь*

$$\chi(\varepsilon) = \max\{r_0(\varepsilon),\varepsilon,\delta(\varepsilon)\},$$

$$dX_0^{p-2}(t) = A_0^{-1}(t, X_0(t), X_0^1(t),\ldots,X_0^{p-2}(t))U_0(t, X_0(t), X_0^1(t),\ldots,X_0^{p-2}(t))\,dt +$$

$$+ A_0^{-3}(t, X_0(t), X_0^1(t),\ldots,X_0^{p-2}(t))\frac{\partial A_0}{\partial x_{p-2}}(t, X_0(t), X_0^1(t),\ldots,X_0^{p-2}(t)) \times$$

$$\times B_0^2(t, X_0(t), X_0^1(t),\ldots,X_0^{p-2}(t))\,dt +$$

$$+ A_0^{-1}(t, X_0(t), X_0^1(t),\ldots,X_0^{p-2}(t))B_0(t, X_0(t), X_0^1(t),\ldots,X_0^{p-2}(t))\,dW(t),$$

$$dX_0(t) = X_0^1(t)\,dt, \ \ldots, \ dX_0^{p-3}(t) = X_0^{p-2}(t)\,dt,$$

с начальными условиями $X_0(0), X_0^1(0),\ldots,X_0^{p-2}(0)$.

При доказательстве теоремы будем придерживаться следующей схемы: 1) записывая последнее уравнение системы (6″) в интегральном виде и используя формулу Ито, интегрируем по частям первое слагаемое правой части; 2) записываем слагаемые, не стремящиеся к нулю и стремящиеся к нулю при $\varepsilon\to 0$; 3) устанавливаем оценку величины $\varepsilon^6\mathrm{M}|Y_\varepsilon(t)|^{12}$; 4) получаем формально предельное уравнение — в пределе получится уравнение (5); 5) строим соответствующее неравенство Гронуолла для уклонения $\overline{Z}_\varepsilon(t)$ от $\overline{Z}_0(t)$ в метрике $\rho(X,Y) = (\sup_{0\le t\le T}\mathrm{M}|X(t)-Y(t)|^2)^{1/2}$; 6) записываем оценку для уклонения векторов $\overline{Z}_\varepsilon(t)$, $\overline{Z}_0(t)$ в метрике $\rho(X,Y) = (\sup_{0\le t\le T}\mathrm{M}|X(t)-Y(t)|^2)^{1/2}$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *В условиях теоремы справедливо представление*

$$X_\varepsilon^{p-2}(t) = X_\varepsilon^{p-2}(0) + \int_0^t \frac{U_\varepsilon(s)}{A_\varepsilon(s)}ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{2A_\varepsilon^3(s)}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s)B_\varepsilon^2(s)\,ds + \int_0^t \frac{B_\varepsilon(s)}{A_\varepsilon(s)}dW(s) + \psi(\varepsilon), \tag{8}$$

где

$$\psi(\varepsilon) = \varepsilon\left[A_\varepsilon^{-1}(0)Y_\varepsilon(0) - A_\varepsilon^{-1}(t)Y_\varepsilon(t)\right] + \varepsilon^2\left[\frac{1}{A_\varepsilon^3(t)}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(t)Y_\varepsilon^2(t) - \frac{1}{A_\varepsilon^3(0)}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(0)Y_\varepsilon^2(0)\right] -$$

$$- \varepsilon\int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^2}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial s}(s)Y_\varepsilon(s)\,ds - \varepsilon\int_0^t\left[\frac{1}{A_\varepsilon^2}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x}(s)X_\varepsilon^1(s)Y_\varepsilon(s) + \frac{1}{A_\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{p-3}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_i}(s)X_\varepsilon^{i+1}(s)Y_\varepsilon(s)\right]ds -$$

$$- \varepsilon\int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^3(s)}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s)Y_\varepsilon(s)U_\varepsilon(s)\,ds - \varepsilon\int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^2}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s)\frac{B_\varepsilon(s)Y_\varepsilon(s)}{A_\varepsilon(s)}dW(s) -$$

$$- \varepsilon^2\int_0^t Y_\varepsilon^2(s)\frac{d}{ds}\frac{1}{A_\varepsilon^3(s)}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s)\,ds,$$

$\dfrac{\partial A_\varepsilon}{\partial s}(s)$, $\dfrac{\partial A_\varepsilon}{\partial x}(s)$, $\dfrac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_i}(s)$, $i = 1, \ldots, p-2$, — *частные производные от функции* $A(t, x, x_1, \ldots, x_{p-2})$ *по соответствующей переменной, взятые в точке* $\left(s, X_\varepsilon(s), X_\varepsilon^1(s), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(s)\right)$.

Доказательство. Условий, приведенных в теореме, достаточно для существования и единственности сильного решения уравнения (6), записанного в виде системы (6″):

$$X_\varepsilon^{p-2}(t) = X_\varepsilon^{p-2}(0) - \int_0^t \varepsilon A_\varepsilon^{-1}\left(s, X_\varepsilon(s), X_\varepsilon^1(s), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(s)\right) dY_\varepsilon(s) +$$
$$+ \int_0^t A_\varepsilon^{-1}\left(s, X_\varepsilon(s), X_\varepsilon^1(s), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(s)\right) U_\varepsilon\left(s, X_\varepsilon(s), X_\varepsilon^1(s), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(s)\right) ds +$$
$$+ \int_0^t A_\varepsilon^{-1}\left(s, X_\varepsilon(s), X_\varepsilon^1(s), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(s)\right) B_\varepsilon\left(s, X_\varepsilon(s), X_\varepsilon^1(s), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(s)\right) dW(s). \tag{9}$$

Интегрируя по частям второе слагаемое в (9), получаем

$$- \int_0^t \varepsilon A_\varepsilon^{-1}\left(s, X_\varepsilon(s), X_\varepsilon^1(s), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(s)\right) dY_\varepsilon(s) =$$
$$= -\ \varepsilon A_\varepsilon^{-1}\left(t, X_\varepsilon(t), X_\varepsilon^1(t), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(t)\right) Y_\varepsilon(t) - \varepsilon A_\varepsilon^{-1}\left(0, X_\varepsilon(0), X_\varepsilon^1(0), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(0)\right) Y_\varepsilon(0) -$$
$$- \varepsilon \int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^2} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial s}(s) Y_\varepsilon(s) ds - \varepsilon \int_0^t \left[\frac{1}{A_\varepsilon^2} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x}(s) X_\varepsilon^1(s) Y_\varepsilon(s) + \frac{1}{A_\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{p-3} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_i}(s) X_\varepsilon^{i+1}(s) Y_\varepsilon(s) \right] ds -$$
$$- \varepsilon \int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^2} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s) Y_\varepsilon^2(s) ds. \tag{10}$$

Запишем уравнение (6) в виде

$$dY_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon} A_\varepsilon(t) Y_\varepsilon(t) dt + \frac{1}{\varepsilon} U_\varepsilon(t) dt + \frac{1}{\varepsilon} B_\varepsilon(t) dW(t). \tag{11}$$

Используя формулу Ито, имеем

$$dY_\varepsilon^2(t) = -\frac{2}{\varepsilon} Y_\varepsilon^2(t) A_\varepsilon(t) dt + \frac{2}{\varepsilon} Y_\varepsilon(t) U_\varepsilon(t) dt + \frac{1}{\varepsilon^2} B_\varepsilon^2(t) dt + \frac{2}{\varepsilon} B_\varepsilon(t) Y_\varepsilon(t) dW(t),$$

следовательно,

$$\varepsilon Y_\varepsilon^2(t) dt = -\frac{\varepsilon^2}{2 A_\varepsilon(t)} dY_\varepsilon^2(t) + \varepsilon \frac{Y_\varepsilon(t) U_\varepsilon(t)}{A_\varepsilon(t)} dt + \frac{B_\varepsilon^2(t)}{2 A_\varepsilon(t)} dt + \varepsilon \frac{B_\varepsilon(t) Y_\varepsilon(t)}{A_\varepsilon(t)} dW(t).$$

Тогда, подставляя последнее равенство в (10), получаем

$$- \int_0^t \varepsilon A_\varepsilon^{-1}\left(s, X_\varepsilon(s), X_\varepsilon^1(s), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(s)\right) dY_\varepsilon(s) =$$
$$= -\ \varepsilon A_\varepsilon^{-1}\left(t, X_\varepsilon(t), X_\varepsilon^1(t), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(t)\right) Y_\varepsilon(t) - \varepsilon A_\varepsilon^{-1}\left(0, X_\varepsilon(0), X_\varepsilon^1(0), \ldots, X_\varepsilon^{p-2}(0)\right) Y_\varepsilon(0) -$$
$$- \varepsilon \int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^2} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial s}(s) Y_\varepsilon(s) ds - \varepsilon \int_0^t \left[\frac{1}{A_\varepsilon^2} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x}(s) X_\varepsilon^1(s) Y_\varepsilon(s) + \frac{1}{A_\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{p-3} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_i}(s) X_\varepsilon^{i+1}(s) Y_\varepsilon(s) \right] ds -$$

$$- \int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^2} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s) \left[\varepsilon \frac{Y_\varepsilon(s) U_\varepsilon(s)}{A_\varepsilon(s)} ds + \frac{B_\varepsilon^2(s)}{2 A_\varepsilon(s)} ds + \varepsilon \frac{B_\varepsilon(s) Y_\varepsilon(s)}{A_\varepsilon(s)} dW(s) \right] +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^2} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s) \frac{\varepsilon^2}{2 A_\varepsilon(s)} dY_\varepsilon^2(s). \tag{12}$$

Интегрируя по частям последний интеграл в (12), находим

$$\varepsilon^2 \int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^3(s)} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s) dY_\varepsilon^2(s) = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{A_\varepsilon^3(t)} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(t) Y_\varepsilon^2(t) - \frac{1}{A_\varepsilon^3(0)} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(0) Y_\varepsilon^2(0) \right] -$$

$$- \int_0^t Y_\varepsilon^2(s) \frac{d}{ds} \frac{1}{A_\varepsilon^3(s)} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s) ds. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), а затем полученный результат в (9), получаем (8).

Лемма 1 доказана.

Замечание. Везде в дальнейшем оценки сверху для фигурирующих в формулах констант можно найти в приложении.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *В условиях теоремы справедливы оценки*

$$\mathrm{M}|Y_\varepsilon(t)|^4 \le \frac{\sqrt[3]{Q_{12}}}{\varepsilon^2}, \quad \mathrm{M}|Y_\varepsilon(t)|^8 \le \frac{\sqrt[3]{Q_{12}^2}}{\varepsilon^4}, \quad \mathrm{M}|Y_\varepsilon(t)|^{12} \le \frac{Q_{12}}{\varepsilon^6}, \tag{14}$$

$$\sup_{0 \le t \le T,\, 0 \le i \le p-2} \mathrm{M}\left| X_\varepsilon^i(t) \right|^4 \le \overline{Q}, \tag{15}$$

где Q_{12}, $\overline{Q}$ *— конечные постоянные, зависящие от* K, C, c, T.

Доказательство. Используя формулу Ито, из (11) имеем

$$dY_\varepsilon^{12}(t) = -\frac{12}{\varepsilon} Y_\varepsilon^{12}(t) A_\varepsilon(t) dt + \frac{12}{\varepsilon} Y_\varepsilon^{11}(t) U_\varepsilon(t) dt +$$

$$+ \frac{66}{\varepsilon^2} Y_\varepsilon^{10}(t) B_\varepsilon^2(t) dt + \frac{12}{\varepsilon} B_\varepsilon(t) Y_\varepsilon^{11}(t) dW(t).$$

Записывая последнее уравнение в интегральном виде и беря математическое ожидание, получаем

$$\mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(t) = \mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(0) +$$

$$+ \int_0^t \left[-\frac{12}{\varepsilon} \mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(s) A_\varepsilon(s) ds + \frac{12}{\varepsilon} \mathrm{M}Y_\varepsilon^{11}(s) U_\varepsilon(s) ds + \frac{66}{\varepsilon^2} \mathrm{M}Y_\varepsilon^{10}(s) B_\varepsilon^2(s) ds \right]. \tag{16}$$

Условия теоремы позволяют утверждать, что функция

$$(\mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(s))^{-1} \mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(s) A_\varepsilon(s) = \gamma(s) \ge c > 0$$

определена, тогда из (16) имеем

$$\mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(t) = \mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(0) \exp\left\{ -\frac{12}{\varepsilon} \int_0^t \gamma(s) ds \right\} +$$

$$+ \int_0^t \exp\left\{ -\frac{12}{\varepsilon} \int_s^t \gamma(\tau) d\tau \right\} \left[\frac{12}{\varepsilon} \mathrm{M}Y_\varepsilon^{11}(s) U_\varepsilon(s) ds + \frac{66}{\varepsilon^2} \mathrm{M}Y_\varepsilon^{10}(s) B_\varepsilon^2(s) ds \right]. \tag{17}$$

Пусть $0 < \lambda < +\infty$, $0 < \alpha < +\infty$. Используя неравенство вида

$$\xi\eta \le \lambda^p \frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q\lambda^q}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

и оценки из условия теоремы, из (17) получаем

$$\mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(t) \le \frac{K}{\varepsilon^6} + \frac{C^{12}}{c\lambda^{12}} + \frac{11C^2}{2c\varepsilon\alpha^6} +$$

$$+ \int_0^t \exp\left\{-\frac{12c(t-s)}{\varepsilon}\right\} \frac{12}{\varepsilon}\left[\lambda^{12/11} + \frac{66c^2\alpha^{6/5}}{\varepsilon}\right]\mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(s)\,ds.$$

Полагая в последнем неравенстве $\lambda = 1$, $\alpha^{6/5} = \varepsilon$, находим

$$\mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(t) \le \frac{K}{\varepsilon^6} + \frac{C^{12}T}{c\lambda^{12}} + \frac{11C^2}{2c\varepsilon^6} +$$

$$+ \int_0^t \exp\left\{-\frac{12c(t-s)}{\varepsilon}\right\} \frac{12}{\varepsilon}\left[1 + 66C^2\right]\mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(s)\,ds. \tag{18}$$

Из (18) в силу неравенства Гронуолла имеем

$$\mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(t) \le \left[\frac{K}{\varepsilon^6} + \frac{C^{12}T}{c} + \frac{11C^2}{2c\varepsilon^6}\right]\exp\left\{\frac{1+66C^2}{c}\int_0^t \exp\left\{-\frac{12c(t-s)}{\varepsilon}\right\}\frac{12}{\varepsilon}\,ds\right\} \le$$

$$\le \left[\frac{K}{\varepsilon^6} + \frac{C^{12}T}{c} + \frac{11C^2}{2c\varepsilon^6}\right]\exp\left\{\frac{1+66C^2}{c}\right\} = \frac{Q_{12}}{\varepsilon^6}.$$

Таким образом, (14) имеет место. Далее, в силу того что

$$X_\varepsilon^{p-2}(t) = X_\varepsilon^{p-2}(0) + \int_0^t Y_\varepsilon(s)\,ds,$$

имеет место оценка

$$\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|X_\varepsilon^{p-2}(t)\right|^{12} \le 2^{11}\left[\frac{K + T^{12}Q_{12}}{\varepsilon^6}\right] = \hat{Q}(\varepsilon). \tag{19}$$

Используя промежуточную оценку (19), получаем

$$\mathrm{M}\left|X_\varepsilon^{p-2}(t)\right|^{12} \le \hat{Q}(\varepsilon),$$

$$\mathrm{M}\left|X_\varepsilon^{p-3}(t)\right|^{12} \le 2^{11}K + 2^{11}T^{12}\hat{Q}(\varepsilon),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{20}$$

$$\mathrm{M}\left|X_\varepsilon^{i}(t)\right|^{12} \le 2^{11}K(1 + 2^{11}T^{12} + \ldots + (2^{11}T^{12})^{p-3-i}) + (2^{11}T^{12})^{p-2-i}\hat{Q}(\varepsilon),$$

$$i = 0, \ldots, p-3.$$

Далее на основе (20) установим универсальную оценку.

Действительно, пусть сначала $2^{11}T^{12} \le 1$, тогда

$$\sup_{0\le t\le T,\, 0\le i\le p-2} \mathrm{M}\left|X_\varepsilon^{i}(t)\right|^{12} \le 2^{11}Kp + \hat{Q}(\varepsilon). \tag{21}$$

В случае $2^{11}T^{12} > 1$ из (20) имеем

$$\mathrm{M}\left|X_\varepsilon^i(t)\right|^{12} \le 2^{11}K\frac{(2^{11}T^{12})^{p-1}-1}{2^{11}T^{12}-1} + (2^{11}T^{12})^{p-2}\hat{Q}(\varepsilon), \quad i = 0,\dots,p-2. \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует оценка

$$\mathrm{M}\left|X_\varepsilon^i(t)\right|^{12} \le \frac{\hat{Q}_{12}}{\varepsilon^6}, \qquad i = 0,\dots,p-2. \tag{23}$$

При выполнении (14) и (23) справедлива оценка

$$\mathrm{M}\left[\varepsilon^2\int_0^t Y_\varepsilon^2(s)\frac{d}{ds}\frac{1}{A_\varepsilon^3(s)}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s)\,ds\right]^4 \le \varepsilon^2\tilde{Q}^2. \tag{24}$$

Действительно, в силу того что

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{A_\varepsilon^3(s)}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s) = A_\varepsilon^{-4}\left[\left(\frac{\partial^2 A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}\partial s}A_\varepsilon - 3\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial s}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}\partial x}A_\varepsilon - 3\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x}\right)X_\varepsilon^1(s) + \sum_{j=1}^{p-3}\left(\frac{\partial^2 A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}\partial x_j}A_\varepsilon - 3\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_j}\right)X_\varepsilon^{j+1}(s) +$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}\partial x_{p-2}} - 3\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}\right)Y_\varepsilon(s)\right],$$

имеем

$$\mathrm{M}\left[\varepsilon^2\int_0^t Y_\varepsilon^2(s)\frac{d}{ds}\frac{1}{A_\varepsilon^3(s)}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s)\,ds\right]^4 \le \varepsilon^8 T^3\left(\frac{C^8}{c^{16}}+3^4C^8\right)\int_0^t \mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(s)\,ds +$$

$$+\ \varepsilon^8\left(\frac{C^8}{c^{16}}+3^4C^8\right)\int_0^t (\mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(s))^{2/3}\,ds +$$

$$+\ \varepsilon^8(p-2)^3\left(\frac{C^8}{c^{16}}+3^4C^8\right)T^3\sum_{j=1}^{p-2}\int_0^t (\mathrm{M}Y_\varepsilon^{12}(s))^{2/3}(\mathrm{M}[X_\varepsilon^j(s)]^{12})^{1/3}\,ds.$$

Из последнего неравенства с учетом (14), (23) следует оценка (24). Тогда

$$\mathrm{M}\psi^4(\varepsilon) \le 9^3\left\{\frac{K+Q_{12}^{1/3}}{c^4}+\frac{C^4(K+Q_{12}^{2/3})}{c^{12}}+\frac{T^4C^4Q_{12}^{1/3}}{c^4}+\right.$$

$$\left.+\ \frac{T^4p^4C^4}{c^4}(\hat{Q}_{12}Q_{12})^{1/3}+T^4\frac{C^8Q_{12}^{1/3}}{c^{12}}+\frac{4^5}{3^2}T^2\frac{C^8}{c^{12}}Q_{12}^{1/3}+T^4+\tilde{Q}\right\} = \hat{Q}. \tag{25}$$

С учетом (25) из (8) следует оценка

$$\mathrm{M}\left|X_\varepsilon^{p-2}(t)\right|^4 \le 5^3\left\{K+T^4\left[\frac{C^4}{c^4}+\frac{C^{12}}{16c^{12}}\right]+T^2\frac{36C^4}{c^4}+\hat{Q}\right\} = Q. \tag{26}$$

В силу того что

$$\begin{gathered}
\mathrm{M}\left|X_\varepsilon^{p-2}(t)\right|^4 \le Q,\\
\mathrm{M}\left|X_\varepsilon^{p-3}(t)\right|^4 \le 8K + 8T^4Q,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mathrm{M}\left|X_\varepsilon^i(t)\right|^4 \le 8K(1+(8T^4)+\dots+(8T^4)^{p-3-i}) + (8T^4)^{p-2-i}Q,\\
i = 0,\dots,p-3,
\end{gathered} \tag{27}$$

на основе (27) получим универсальную оценку.

Действительно, пусть сначала $8T^4 \le 1$, тогда

$$\sup_{0 \le t \le T,\, 0 \le i \le p-2} \mathrm{M}\left| X_\varepsilon^i(t) \right|^4 \le 8Kp + Q. \tag{28}$$

В случае $8T^4 > 1$ из (27) имеем

$$\mathrm{M}\left| X_\varepsilon^i(t) \right|^4 \le 8K \frac{(8T^4)^{p-i} - 1}{8T^4 - 1} + (8T^4)^{p-i} Q \le$$

$$\le 8K \frac{(8T^4)^{p-2} - 1}{8T^4 - 1} + (8T^4)^{p-2} Q, \qquad i = 0, \ldots, p-2. \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует оценка (15).

Лемма 2 доказана.

Опираясь на (14), (15), нетрудно убедиться в том, что справедлива оценка

$$\mathrm{M}\Bigg| -\varepsilon A_\varepsilon^{-1}(t) Y_\varepsilon(t) + \varepsilon A_\varepsilon^{-1}(0) Y_\varepsilon(0) + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{A_\varepsilon^3(t)} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(t) Y_\varepsilon^2(t) - \frac{1}{A_\varepsilon^3(0)} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(0) Y_\varepsilon^2(0) \right] -$$

$$- \varepsilon \int_0^t \left[\frac{1}{A_\varepsilon^2} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x} X_\varepsilon^1(s) Y_\varepsilon(s) + \frac{1}{A_\varepsilon^2} \sum_{i=2}^{p-2} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{i-1}} X_\varepsilon^i(s) Y_\varepsilon(s) + \frac{1}{A_\varepsilon^2} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial s} Y_\varepsilon(s) \right] ds -$$

$$- \varepsilon \int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^3(s)} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}} Y_\varepsilon(s) U_\varepsilon(s) ds - \varepsilon \int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^3} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}} B_\varepsilon(s) Y_\varepsilon(s) dW(s) \Bigg|^2 \le \varepsilon \hat{Q}. \tag{30}$$

Из (24) следует, что имеет место оценка

$$\mathrm{M}\left[\varepsilon^2 \int_0^t Y_\varepsilon^2(s) \frac{d}{ds} \frac{1}{A_\varepsilon^3(s)} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s) ds \right]^2 \le \varepsilon \tilde{Q}. \tag{31}$$

Отметим, что из (9) с учетом оценок (30), (31) следует представление

$$X_\varepsilon^{p-2}(t) = X_\varepsilon^{p-2}(0) + \int_0^t A_\varepsilon^{-1}(s) U_\varepsilon(s) ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^3(s)} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s) B_\varepsilon^2(s) ds + \int_0^t A_\varepsilon^{-1}(s) B_\varepsilon(s) dW(s) + \psi(\varepsilon), \tag{32}$$

причем

$$M\psi^2(\varepsilon) \le \varepsilon(\hat{Q} + \tilde{Q}) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{33}$$

„Формально предельное” при $\varepsilon \to 0$ уравнение для (32) имеет вид

$$X_0^{p-2}(t) = X_0^{p-2}(0) + \int_0^t A_0^{-1}(s) U_0(s) ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{A_0^3(s)} \frac{\partial A_0}{\partial x_{p-2}}(s) B_0^2(s) ds + \int_0^t A_0^{-1}(s) B_0(s) dW(s). \tag{34}$$

В условиях теоремы уравнение (34) имеет сильное решение.

Оценим „близость” решений уравнений (24) и (26) в метрике $\rho(X, Y) = \left(\sup_{0\le t\le T} \mathrm{M}|X(t) - Y(t)|^2\right)^{1/2}$, подгоняя разность решений в этой метрике под соответствующее неравенство Гронуолла. Поскольку сходимость коэффициентов уравнения (32) имеется лишь на ограниченных множествах, необходимо иметь оценки вероятностей выхода за растущий уровень величин

$$\sup_{0\le t\le T}\left|X_0^i(t)\right|, \qquad i = 0, \ldots, p-2.$$

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть вектор* $\bar{Z}_0(t) = \{X_0(t), X_0^1(t), \ldots, X_0^{p-2}(t)\}$. *В условиях теоремы справедлива оценка*

$$\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}|Z_0(t)| \le \sqrt{p\breve{Q}}. \tag{35}$$

Доказательство. Рассмотрим систему

$$X_0^{p-2}(t) = X_0^{p-2}(0) + \int_0^t A_0^{-1}(s)U_0(s)\,ds +$$
$$+ \int_0^t A_0^{-3}(s)\frac{\partial A_0}{\partial x_{p-2}}(s)B_0^2(s)\,ds + \int_0^t A_0^{-1}(s)B_0(s)\,dW(s),$$
$$X_0^i(t) = X_0^i(0) + \int_0^t X_0^{i+1}(s)\,ds, \qquad i = 0, \ldots, p-3. \tag{36}$$

Из первого уравнения (36) в силу того, что

$$\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t A_0^{-1}(s)B_0(s)\,dW(s)\right|^2 \le 4\frac{C^2T}{c^2},$$

имеем оценку

$$\sup_{0\le t\le T}\left|X_0^{p-2}(t)\right|^2 \le 3(\sqrt[6]{K} + L),$$

где

$$L = \frac{T^2C^2}{c^2} + \frac{T^2C^6}{c^6} + 4\frac{C^2T}{c^2}.$$

С учетом последней оценки нетрудно убедиться в выполнении неравенства

$$\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|X_0^i(t)\right|^2 \le 3\sqrt[6]{K}\left(1 + 3T^2 + \ldots + (3T^2)^{p-2-i}\right) + 3(3T^2)^{p-2-i}L,$$
$$i = 0, \ldots, p-2.$$

Опять рассмотрим два случая. Пусть сначала $0 < 3T^2 \le 1$, тогда

$$\sup_{0\le i\le p-2}\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|X_0^i(t)\right|^2 \le 3\sqrt[6]{K}\,p + 3L. \tag{37}$$

В случае $1 < 3T^2$ имеет место оценка

$$\sup_{0\le i\le p-2}\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|X_0^i(t)\right|^2 \le 3\sqrt[6]{K}\frac{(3T^2)^{p-1} - 1}{3T^2 - 1} + 3(3T^2)^{p-2}L. \tag{38}$$

Из (37), (38) следует, что универсальной оценкой будет величина

$$\sup_{0\le i\le p-2} \mathrm{M} \sup_{0\le t\le T} \left|X_0^i(t)\right|^2 \;\le\; 3\sqrt[6]{K}\left[\frac{(3T^2)^p-1}{3T^2-1}+p\right] + 3\left[(3T^2)^p+1\right]L \;=\; \breve{Q}.$$

Из последнего следует, что справедлива оценка

$$\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|Z_0(t)\right| \;=\; \mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left(\sum_{i=0}^{p-2}\left|X_0^i(t)\right|^2\right)^{1/2} \;\le\; \mathrm{M}\left(\sum_{i=0}^{p-2}\sup_{0\le t\le T}\left|X_0^i(t)\right|^2\right)^{1/2} \;\le$$

$$\le\; \left(\sum_{i=0}^{p-2}\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|X_0^i(t)\right|^2\right)^{1/2} \;\le\; \sqrt{p}\left[\sup_{0\le i\le p-2}\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|X_0^i(t)\right|^2\right]^{1/2} \;\le\; \sqrt{p\breve{Q}},$$

т. е. оценка (35) имеет место.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если выбрать* $R(\varepsilon) = \delta^{-1}(\varepsilon) \to +\infty,\ \varepsilon \to 0,$ *то в условиях теоремы на траекториях вектора* $\bar{Z}_0(t)$ *справедливы оценки*

$$\mathrm{M}\left|\int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^3(s)}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s)B_\varepsilon^2(s)\,ds - \int_0^t \frac{1}{A_0^3(s)}\frac{\partial A_0}{\partial x_{p-2}}(s)B_0^2(s)\,ds\right|^2 \;\le$$

$$\le\; C_1\delta(\varepsilon) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0,$$

$$\mathrm{M}\left[\int_0^t \left(A_\varepsilon^{-1}(s,\bar{Z}_0(s))U_\varepsilon(s,\bar{Z}_0(s)) - A_0^{-1}(s,\bar{Z}_0(s))U_0(s,\bar{Z}_0(s))\right)ds \;+\right. \tag{39}$$

$$\left. +\; \int_0^t \left(A_\varepsilon^{-1}(s,\bar{Z}_0(s))B_\varepsilon(s,\bar{Z}_0(s)) - A_0^{-1}(s,\bar{Z}_0(s))B_0(s,\bar{Z}_0(s))\right)dW(s)\right]^2 \;\le$$

$$\le\; C_2\delta(\varepsilon) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что на траекториях вектора $\bar{Z}_0(t)$ выполняется неравенство

$$\mathrm{M}\left|\int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^3(s)}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s)B_\varepsilon^2(s)\,ds - \int_0^t \frac{1}{A_0^3(s)}\frac{\partial A_0}{\partial x_{p-2}}(s)B_0^2(s)\,ds\right|^2 \;\le$$

$$\le\; \frac{6C^4T^2}{c^6}\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|B_\varepsilon(s)-B_0(s)\right|^2 \;+$$

$$+\; \frac{3C^4T^2}{c^6}\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(t)-\frac{\partial A_0}{\partial x_{p-2}}(t)\right|^2 + \frac{27C^{10}T^2}{c^{12}}\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|A_\varepsilon(s)-A_0(s)\right|^2. \tag{40}$$

Пусть $\chi\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\bar{Z}_0(t)\right| \le \delta^{-1}(\varepsilon)\right)$ — индикатор события $\sup_{0\le t\le T}\left|\bar{Z}_0(t)\right| \le \delta^{-1}(\varepsilon)$, тогда из (40) с учетом (35) имеем оценку

$$\mathrm{M}\left|\int_0^t \frac{1}{A_\varepsilon^3(s)}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s)B_\varepsilon^2(s)\,ds - \int_0^t \frac{1}{A_0^3(s)}\frac{\partial A_0}{\partial x_{p-2}}(s)B_0^2(s)\,ds\right|^2 \;\le$$

$$\leq \left(\frac{9C^4T^2}{c^6} + \frac{27C^{10}T^2}{c^{12}}\right) 2C^2 \,\mathrm{M}\, \chi\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left|\bar{Z}_0(t)\right| > \delta^{-1}(\varepsilon)\right) +$$

$$+ \left(\frac{9C^4T^2}{c^6} + \frac{27C^{10}T^2}{c^{12}}\right)\delta(\varepsilon) \leq C_1\delta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Аналогично

$$\mathrm{M}\left[\int_0^t \left(A_\varepsilon^{-1}(s, \bar{Z}_0(s)) U_\varepsilon(s, \bar{Z}_0(s)) - A_0^{-1}(s, \bar{Z}_0(s)) U_0(s, \bar{Z}_0(s))\right) ds \; + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \left(A_\varepsilon^{-1}(s, \bar{Z}_0(s)) B_\varepsilon(s, \bar{Z}_0(s)) - A_0^{-1}(s, \bar{Z}_0(s)) B_0(s, \bar{Z}_0(s))\right) dW(s)\right]^2 \leq$$

$$\leq 2T\left[\int_0^T \left(A_\varepsilon^{-1}(s, \bar{Z}_0(s)) U_\varepsilon(s, \bar{Z}_0(s)) - A_0^{-1}(s, \bar{Z}_0(s)) U_0(s, \bar{Z}_0(s))\right)^2 ds \; + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \left(A_\varepsilon^{-1}(s, \bar{Z}_0(s)) B_\varepsilon(s, \bar{Z}_0(s)) - A_0^{-1}(s, \bar{Z}_0(s)) B_0(s, \bar{Z}_0(s))\right)^2 ds\right] \leq$$

$$\leq \frac{4T^2}{c^2} \sup_{0\leq t\leq T} \left|U_\varepsilon(s, \bar{Z}_0(s)) - U_0(s, \bar{Z}_0(s))\right|^2 +$$

$$+ \frac{4C^2T(1+T)}{c^4} \sup_{0\leq t\leq T} \left|A_\varepsilon(s, \bar{Z}_0(s)) - A_0(s, \bar{Z}_0(s))\right|^2 +$$

$$+ \frac{2T}{c^2} \sup_{0\leq t\leq T} \left|B_\varepsilon(s, \bar{Z}_0(s)) - B_0(s, \bar{Z}_0(s))\right|^2 \leq C_2\delta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Лемма 4 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Вычитая из (32) равенство (34), с учетом (39) и (40) получаем оценку

$$\mathrm{M}\left|X_\varepsilon^{p-2}(t) - X_0^{p-2}(t)\right|^2 \leq 5\mathrm{M}\left|X_\varepsilon^{p-2}(0) - X_0^{p-2}(0)\right|^2 +$$

$$+ 5T\int_0^t \mathrm{M}\left|A_\varepsilon^{-1}(s, \bar{Z}_\varepsilon(s)) U_\varepsilon(s, \bar{Z}_\varepsilon(s)) - A_0^{-1}(s, \bar{Z}_0(s)) U_0(s, \bar{Z}_0(s))\right|^2 ds +$$

$$+ 5T\int_0^t \mathrm{M}\left| \frac{1}{A_\varepsilon^3(s, \bar{Z}_\varepsilon(s))} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s, \bar{Z}_\varepsilon(s)) B_\varepsilon^2(s, \bar{Z}_\varepsilon(s)) \; - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{A_0^3(s, \bar{Z}_0(s))} \frac{\partial A_0}{\partial x_{p-2}}(s, \bar{Z}_0(s)) B_0^2(s, \bar{Z}_0(s)) \right|^2 ds +$$

$$+ 5\mathrm{M}\left|\int_0^t \left[A_\varepsilon^{-1}(s, \bar{Z}_\varepsilon(s)) B_\varepsilon(s, \bar{Z}_\varepsilon(s)) - A_0^{-1}(s, \bar{Z}_0(s)) B_0(s, \bar{Z}_0(s))\right] dW(s)\right|^2 ds + 5\mathrm{M}\psi^2(\varepsilon) \leq$$

$$\leq 10T\int_0^t \mathrm{M}\left| A_\varepsilon^{-1}(s, \bar{Z}_\varepsilon(s)) U_\varepsilon(s, \bar{Z}_\varepsilon(s)) - A_\varepsilon^{-1}(s, \bar{Z}_0(s)) U_\varepsilon(s, \bar{Z}_0(s))\right|^2 ds +$$

$$+ 10T\int_0^t \mathrm{M}\left| \frac{1}{A_\varepsilon^3(s, \bar{Z}_\varepsilon(s))} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_{p-2}}(s, \bar{Z}_\varepsilon(s)) B_\varepsilon^2(s, \bar{Z}_\varepsilon(s)) \; - \right.$$

$$- \left. \frac{1}{A_\varepsilon^3(s, \bar{Z}_0(s))} \frac{\partial A_0}{\partial x_{p-2}}(s, \bar{Z}_0(s)) B_\varepsilon^2(s, \bar{Z}_0(s)) \right|^2 ds \, +$$

$$+ \; 10\mathrm{M} \left| \int_0^t \left[A_\varepsilon^{-1}(s, \bar{Z}_\varepsilon(s)) B_\varepsilon(s, \bar{Z}_\varepsilon(s)) - A_\varepsilon^{-1}(s, \bar{Z}_0(s)) B_\varepsilon(s, \bar{Z}_0(s)) \right] dW(s) \right|^2 \; +$$

$$+ \; 5\mathrm{M}\psi^2(\varepsilon) + 10T(C_1 + C_2)\delta(\varepsilon) + 5\mathrm{M}\left| X_\varepsilon^{p-2}(0) - X_0^{p-2}(0) \right|^2 \; \le$$

$$\le \; \left\{ 10T \frac{81C^{12}}{c^{12}} \left[1 + \frac{C^3}{c^3} \right]^2 + 10(1+T)\frac{C^2}{c^2}\left[1 + \frac{C}{c} \right]^2 \right\} \int_0^t \mathrm{M}\left| \bar{Z}_\varepsilon(s) - \bar{Z}_0(s) \right|^2 ds \; +$$

$$+ \; 5\mathrm{M}\psi^2(\varepsilon) + 10T(C_1 + C_2)\delta(\varepsilon) + 5\mathrm{M}\left| X_\varepsilon^{p-2}(0) - X_0^{p-2}(0) \right|^2,$$

т. е. для любого $0 < t \le T$

$$\sup_{0 \le \tau \le t} \mathrm{M}\left| X_\varepsilon^{p-2}(\tau) - X_0^{p-2}(\tau) \right|^2 \; \le$$

$$\le \; 5\mathrm{M}\psi^2(\varepsilon) + 10T(C_1 + C_2)\delta(\varepsilon) + 5r_0(\varepsilon) + \tilde{D}\int_0^t \mathrm{M}\left| \bar{Z}_\varepsilon(s) - \bar{Z}_0(s) \right|^2 ds. \qquad (41)$$

Далее, пусть $0 < t \le T$, тогда нетрудно убедиться в том, что справедливы оценки

$$\sup_{0 \le \tau \le t} \mathrm{M}[X_\varepsilon^i(\tau) - X_0^i(\tau)]^2 \; \le$$

$$\le \; 2r_0(\varepsilon)\left\{ 1 + 2T^2 + (2T^2)^2 + (2T^2)^{p-2-i} \right\} + (2T^2)^{p-2-i} \sup_{0 \le \tau \le t} \mathrm{M}[X_\varepsilon^{p-2}(\tau) - X_0^{p-2}(\tau)]^2,$$

$$i = 0, \ldots, p-2. \qquad (42)$$

Установим универсальную оценку. Пусть сначала $0 < 2T^2 \le 1$, тогда, используя (42), имеем

$$\sup_{0 \le \tau \le t} \mathrm{M}[X_\varepsilon^i(\tau) - X_0^i(\tau)]^2 \; \le \; 2r_0(\varepsilon)p + \sup_{0 \le \tau \le t} \mathrm{M}[X_\varepsilon^{p-2}(\tau) - X_0^{p-2}(\tau)]^2,$$

$$i = 0, \ldots, p-2. \qquad (43)$$

При $1 < 2T^2$ на основании (34), (42) имеем

$$\sup_{0 \le \tau \le t} \mathrm{M}[X_\varepsilon^i(\tau) - X_0^i(\tau)]^2 \; \le \; 2r_0(\varepsilon)\frac{(2T^2)^p - 1}{2T^2 - 1} + (2T^2)^p \sup_{0 \le \tau \le t} \mathrm{M}[X_\varepsilon^{p-2}(\tau) - X_0^{p-2}(\tau)]^2,$$

$$i = 0, \ldots, p-2. \qquad (44)$$

Из (43), (44) следует универсальная оценка

$$\sup_{0 \le \tau \le t, \; 0 \le i \le p-2} \mathrm{M}[X_\varepsilon^i(\tau) - X_0^i(\tau)]^2 \; \le \; r_0(\varepsilon)\bar{D} + \hat{D} \sup_{0 \le \tau \le t} \mathrm{M}[X_\varepsilon^{p-2}(\tau) - X_0^{p-2}(\tau)]^2. \qquad (45)$$

Из (45), в частности, следует также оценка

$$\mathrm{M}[\bar{Z}_\varepsilon(t) - \bar{Z}_0(t)]^2 \; \le \; r_0(\varepsilon)p\bar{D} + p\hat{D} \sup_{0 \le \tau \le t} \mathrm{M}[X_\varepsilon^{p-2}(\tau) - X_0^{p-2}(\tau)]^2. \qquad (46)$$

Подставляя в (46) оценку (41), получаем

$$\mathrm{M}[\overline{Z}_\varepsilon(t) - \overline{Z}_0(t)]^2 \;\le\; p\hat{D}\tilde{D}\int_0^t \mathrm{M}\left|\overline{Z}_\varepsilon(s) - \overline{Z}_0(s)\right|^2 ds \;+$$

$$+\;\; r_0(\varepsilon)p\overline{D} \;+\; p\hat{D}\Big\{5\mathrm{M}\psi^2(\varepsilon) + 10T(C_1 + C_2)\delta(\varepsilon) + 5r_0(\varepsilon)\Big\}.$$

Используя лемму Гронуолла, из последнего неравенства имеем

$$\sup_{0\le t\le T} \mathrm{M}[\overline{Z}_\varepsilon(t) - \overline{Z}_0(t)]^2 \;\le$$

$$\le\;\; p\Big\{r_0(\varepsilon)(5 + \overline{D}) + \hat{D}(5(\hat{Q} + \tilde{Q})\varepsilon + 10T(C_1 + C_2)\delta(\varepsilon))\Big\}\exp\Big\{p\hat{D}\tilde{D}T\Big\}.$$

Теорема доказана.

Приложение

$$Q_{12} \;=\; \left[K + \frac{C^{12}T}{c} + \frac{11C^2}{2c}\right]\exp\left\{\frac{[1 + 66C^2]}{c}\right\},$$

$$\hat{Q}_{12} \;=\; 2^{11}K\frac{(2^{11}T^{12})^{p-1} - 1}{2^{11}T^{12} - 1} \;+\; 2^{11}Kp \;+\; [(2^{11}T^{12})^{p-2} + 1]2^{11}[K + T^{12}Q_{12}],$$

$$\tilde{Q}^2 \;=\; p^4\left(\frac{C^8}{c^{16}} + 3^4C^8\right)T^4(Q_{12} + Q_{12}^{2/3} + Q_{12}^{2/3}\hat{Q}_{12}^{1/3}),$$

$$\breve{Q} \;=\; 3\sqrt[6]{K}\left[\frac{(3T^2)^p - 1}{3T^2 - 1} + p\right] \;+\; 3\Big[(3T^2)^p + 1\Big]\left(\frac{T^2C^2}{c^2} + \frac{T^2C^6}{c^6} + 4\frac{C^2T}{c^2}\right),$$

$$\overset{\frown}{Q} \;=\; 9^3\left\{\frac{K + Q_{12}^{1/3}}{c^4} + \frac{C^4(K + Q_{12}^{2/3})}{c^{12}} + \frac{T^4C^4Q_{12}^{1/3}}{c^4} + \frac{T^4p^4C^4}{c^4}(\hat{Q}_{12}Q_{12})^{1/3} \;+\right.$$

$$\left.+\;\; T^4\frac{C^8Q_{12}^{1/3}}{c^{12}} + \frac{4^5}{3^2}T^2\frac{C^8}{c^{12}}Q_{12}^{1/3} + T^4 + \tilde{Q}\right\},$$

$$Q \;=\; 5^3\left\{K + T^4\left[\frac{C^4}{c^4} + \frac{C^{12}}{16c^{12}}\right] + T^2\frac{36C^4}{c^4} + \overset{\frown}{Q}\right\},$$

$$\overline{Q} \;=\; 8K^4\left[\frac{(8T^4)^p - 1}{8T^4 - 1} + p\right] + \Big[(8T^4)^{p-2} + 1\Big]Q,$$

$$\hat{Q} = \frac{9^2}{c^6}\Big[c^4(\sqrt{Q} + \sqrt{K}) + C^2(Q + K) + c^2p^2[T^2C^2\sqrt{\overline{Q}\,Q} + \sqrt{Q}] + T^2C^4\sqrt{Q} + TC^4\sqrt{Q}\Big],$$

$$C_1 \;=\; \left(\frac{18C^6T^2}{c^6} + \frac{54C^{12}T^2}{c^{12}}\right)[p\overset{\frown}{Q}]^{1/2} \;+\; \frac{9C^4T^2}{c^6} \;+\; \frac{27C^{10}T^2}{c^{12}},$$

$$C_2 \;=\; \left(\frac{2T(2T + 1)}{c^2} + \frac{4C^2T(1 + T)}{c^4}\right)[p\tilde{Q}]^{1/2} \;+\; \frac{C^2T(2T + 1)}{c^2} \;+\; \frac{8C^4T(1 + T)}{c^4},$$

$$\tilde{D} = 10T\frac{81C^{12}}{c^{12}}\left[1 + \frac{C^3}{c^3}\right]^2 \;+\; 10(1 + T)\frac{C^2}{c^2}\left[1 + \frac{C}{c}\right]^2,$$

$$\overline{D} \;=\; 2\left[\frac{(2T^2)^p - 1}{2T^2 - 1} + p\right], \qquad \hat{D} = \Big[(2T^2)^p + 1\Big],$$

$$D \;=\; p\Big\{(5 + \overline{D}) + 5\hat{D}(\hat{Q} + \tilde{Q}) + 10T(C_1 + C_2)\Big\}\exp\Big\{p\hat{D}\tilde{D}T\Big\}.$$

Выводы. В статье рассматриваются уравнения, описывающие движение частиц в быстропеременных случайных полях. В ряде случаев необходимо знать скорость сближения этих решений (например, для оценки близости средних энергетических характеристик). В данной работе при условиях, более жестких, чем в [5], установлена оценка скорости сближения решения уравнения, содержащего p-ю производную по времени, с решением стохастического дифференциального уравнения, содержащего $(p-1)$-ю производную по времени в метрике $\rho(X,Y) = \left(\sup\limits_{0\le t\le T} \mathrm{M}|X(t)-Y(t)|^2\right)^{1/2}$. Если появится необходимость привести явный вид константы D, то это нетрудно сделать с помощью цепочки постоянных, записанных в приложении.

1. *Крилов М. М., Боголюбов М. М.* Про рівняння Фоккера – Планка // Вчен. зап. АН УССР. – 1939. – **N°** 4. – С. 5 – 158.
2. *Ильин А. М., Хасьминский Р. З.* Об уравнениях броуновского движения // Теория вероятностей и ее применения. – 1964. – **9**, вып. 4. – С. 466 – 491.
3. *Пановский П., Филипс М.* Классическая электродинамика. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.
4. *Дубко В. А.* Понижение порядка системы стохастических дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Теория случайных процессов. – 1980. – Вып. 8. – С. 35 – 41.
5. *Скороход А. В.* Об усреднении стохастических уравнений математической физики // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев: Наук. думка, 1977. – С. 196 – 208.
6. *Ковтун Е. Е.* Оценка скорости сходимости в стохастических системах с малым параметром при старшей производной // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2005. – Вып. 10. – С. 88 – 97.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.

Получено 17.03.2005,
после доработки — 23.08.2006