УДК 517.95

В. С. Ільків (Нац. ун-т „Львів. політехніка”),
Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЗАДАЧІ З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ. МЕТРИЧНИЙ ПІДХІД ДО ПРОБЛЕМИ МАЛИХ ЗНАМЕННИКІВ*

A review of works of the authors and their students concerning the investigation of problems with nonlocal conditions with respect to a chosen variable is presented. These problems are considered in tube domains and formulated for linear equations and for systems of partial equations that, in general, are incorrect according to Hadamard and whose solvability in certain scales of functional spaces are established for almost all vectors (with respect to the Lebesgue measure) composed of coefficients of the problem and parameters of the domain.

Наведено огляд робіт авторів статті та їхніх учнів, що стосуються дослідження в циліндричних областях задач з нелокальними умовами за виділеною змінною для лінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними, які, взагалі, є некоректними за Адамаром, а їх розв’язність у певних шкалах функціональних просторів встановлено для майже всіх (щодо міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів задачі та параметрів області.

1. Вступ. Серед некласичних крайових задач для рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь важливе місце займають задачі з нелокальними умовами, зокрема такими, що пов’язують значення шуканих розв’язків та їх похідних у двох або більше граничних чи внутрішніх точках розглядуваної області; найпростішими серед цих умов є умови періодичності. Загальне означення нелокальних умов та їх класифікація були введені, зокрема, А. М. Нахушевим [1]. Прикладами нелокальних задач є задачі з інтегральними умовами, а також задачі, які виникають у теорії плазми (А. В. Біцадзе і О. А. Самарський [2]) для еліптичних і параболічних рівнянь другого порядку з умовами $u(Sx) = u(x)$ та $u(Sx,t) = u(x,t)$ відповідно, де S — неперервно диференційовне відображення частини σ межі області у деяку гладку поверхню S_σ всередині області, та задачі з умовами $z(\omega) = \rho z(0)$, $z'(\omega) = \rho z'(0)$, де $\rho \in \mathbb{C}$, що виникають у теорії періодичних хвилеводів і коливних систем. Нелокальні умови використовують також при дослідженні зворотних задач для рівняння теплопровідності (П. Н. Вабіщевич [3]), мішаних задач для гіперболічних рівнянь (С. П. Лавренюк, І. Я. Кміть [4, 5]), обернених задач для параболічних рівнянь (М. І. Іванчов [6]).

О. О. Дезін [7] уперше показав, що для опису всіх розв’язних розширень диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами, необхідно використовувати поряд з локальними і нелокальні умови.

Задачі з нелокальними умовами за виділеною змінною для диференціальних та диференціально-операторних рівнянь вивчали В. М. Борок, І. Л. Віленць, П. І. Каленюк, А. А. Макаров, М. І. Матійчук, З. М. Нитребич, І. Д. Пукальський, Г. Б. Савченко, В. К. Романко, Л. В. Фардігола, В. І. Чесалін, М. Юнусов, М. Й. Юрчук. У роботах цих авторів виділено випадки коректно поставлених задач шляхом на-

* Частково підтримано Фондом фундаментальних досліджень України (проект № Ф10/21-2005).

кладання додаткових обмежень, що забезпечують відокремленість від нуля спектра задачі.

Однак нелокальні задачі для рівнянь із частинними похідними, взагалі, є некоректними, а їх розв'язність (у випадку обмеженої області) пов'язана з проблемами малих знаменників і є нестійкою стосовно малих змін коефіцієнтів задачі та параметрів області.

З проблемою малих знаменників учені вперше зустрілися в небесній механіці ще у 18 столітті при математичному дослідженні диференціальних рівнянь, що описують рух планетних і супутникових систем у ньютонівських гравітаційних полях [8].

Математично ефект малих знаменників проявляється в тому, що у розв'язки рівнянь руху, зображених рядами Фур'є, входить нескінченне число членів із коефіцієнтами, знаменники яких як завгодно близькі до нуля, що обумовлює розбіжність цих рядів; з динамічної точки зору це означає, що в рухах планет з'являються резонансні ефекти.

Дослідження А. Пуанкаре з якісної теорії диференціальних рівнянь показали, що проблема малих знаменників виникає також у таких задачах: про траєкторії на торі, про відображення кола на себе, про стійкість особливої точки типу центр.

Питання подолання негативного впливу малих знаменників, про збіжність рядів, пов'язаних із розв'язанням вказаних вище задач, мало принциповий теоретичний характер і довгий час залишалося не розв'язаним.

Перші результати щодо розв'язання проблеми малих знаменників на основі метричного підходу були отримані Д. Боржином і Р. Даффіном [9] при дослідженні задачі Діріхле для рівняння коливання струни та К. Л. Зігелем [10] для задачі про стійкість особливої точки типу центр. У 1953 – 1954 рр. А. М. Колмогоров [11] запропонував метричну концепцію і в усій повноті застосував її до задачі про рухи на торі та в теорії динамічних систем. Ця концепція успішно застосовувалася при дослідженні стійкості розв'язків нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (В. І. Арнольд [12], Ю. Мозер [13]) та в теорії апроксимації функцій наближеннями Паде [14].

У задачах небесної механіки малі знаменники мають вигляд лінійних форм $(\omega, k) = \omega_1 k_1 + \ldots + \omega_p k_p$, $\omega \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Ідея метричного підходу полягала в тому, що враховувалось виконання оцінок [12]

$$\big|(\omega, k)\big| \geq C\big(|k_1| + \ldots + |k_p|\big)^{-\delta}, \qquad C > 0, \quad \delta > p - 1, \tag{1}$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^p$) векторів ω, а підсумовування рядів з малими знаменниками проводилось лише для тих ω, які задовольняють нерівності (1). Встановлення оцінок вигляду (1) є задачею метричної теорії чисел (див. [15 – 17]).

У даній праці висвітлено результати досліджень авторів статті, що стосуються розв'язності та побудови розв'язків задач з нелокальними дво- та багатоточковими умовами за виділеною змінною для лінійних рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними в циліндричних областях.

При дослідженні цих задач виникли малі знаменники складної нелінійної структури, які раніше не розглядались у метричній теорії чисел. На основі метричного підходу було доведено теореми про оцінки знизу малих знаменників та встановлено умови розв'язності розглядуваних задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів задачі та параметрів області, або для всіх таких векторів, крім множини малої (наперед заданої) міри Лебега. Ці результати були отримані завдяки співпраці зі школою з метричної теорії чисел в Інституті математики НАН Білорусі, створеною академіком В. Г. Спринджуком і очолюваною нині професором В. І. Берніком.

2. Основні позначення. Допоміжні відомості з теорії чисел. Нехай $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_p)$, де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^p$; $D = (D_1, \ldots, D_p) = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_p}\right)$, $D^s = D_1^{s_1} \ldots D_p^{s_p}$; $\widetilde{D} = \sqrt{1 + D_1^2 + \ldots + D_p^2}$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$, $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_p^2}$, $\widetilde{k} = \sqrt{1 + \|k\|^2}$; $(k, x) = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$; $\Omega_{2\pi}^p = \big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big)^p$ — p-вимірний тор, $Q^p = (0, T) \times (0, \pi)^p$ — $(p + 1)$-вимірний паралелепіпед; $\mathcal{D}^p = (0, T) \times \Omega_{2\pi}^p$, $Q = (0, T) \times G$, де $G \subset \mathbb{R}$ — обмежена однозв'язна область; $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ — круг одиничної площі з центром у початку координат; $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)}$ — евклідова норма матриці A, де A^* — ермітово спряжена до A матриця, $\operatorname{tr} B$ — слід матриці B; I_m — одинична матриця порядку m; $\operatorname{mes} M$, $M \subset S$, — міра Лебега у просторі S множини M; міру в просторі $\mathbb{C}^l$ будемо розуміти як міру Лебега у просторі $\mathbb{R}^{2l}$; $\dim M$ — розмірність Хаусдорфа множини M; $[a]$ та $\{a\}$ — ціла і дробова частини числа $a \in \mathbb{R}$; $\mathcal{T}$ — простір тригонометричних за змінною x многочленів, $\mathcal{T}'$ — спряжений до $\mathcal{T}$ простір формальних тригонометричних рядів [18]; $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, $q \in \mathbb{R}$; $\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$, $h \in \mathbb{R}$, $l \geq 0$, — гільбертові простори функцій $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\varphi}(k)e^{i(k,x)}$ зі скінченними нормами

$$\big\|\varphi; \mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\big\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q}|\widehat{\varphi}(k)|^2},$$
$$\big\|\varphi; \mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\big\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp(2h\widetilde{k}^l)|\widehat{\varphi}(k)|^2}$$

відповідно; $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$ — банахів простір функцій $u(t, x)$ таких, що $\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in \mathbf{H}_{q-j}(\Omega_{2\pi}^p)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, є неперервними по t у нормі простору $\mathbf{H}_{q-j}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\big\|u; \mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)\big\|^2 = \int_0^T \sum_{j=0}^n \left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}; \mathbf{H}_{q-j}(\Omega_{2\pi}^p)\right\|^2 dt$; $\mathbf{C}^r(P)$ — банахів простір функцій $v(x_1, \ldots, x_p)$, неперервних з усіма похідними до порядку r включно в компактній області $P \subset \mathbb{R}^p$, $\|v; \mathbf{C}^r(P)\| = \sum_{|s|\leq r} \max_{x\in P} \left|\frac{\partial^{|s|}v(x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}}\right|$; $\mathbf{C}^{(q,r)}(\overline{Q})$ — банахів простір функцій $u(t, x)$, які в області $\overline{Q}$ неперервно диференційовні q разів по t і r разів по x, $\|u; \mathbf{C}^{(q,r)}(\overline{Q})\| = \sum_{|s|\leq r,\, s_0\leq q} \max_{(t,x)\in\overline{Q}} \left|\frac{\partial^{|\widehat{s}|}u(t, x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}}\right|$; $\mathbf{C}^n\big([0, T], \mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\big)$ — простір функцій $u(t, x)$ таких, що $\partial^j u/\partial t^j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, є неперервними по t у нормі простору $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$; $\big\|u; \mathbf{C}^n\big([0, T], \mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\big)\big\| = \sum_{j=0}^n \max_{0\leq t\leq T} \left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}; \mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\right\|$; $\overline{\mathbf{H}}_q(\Omega_{2\pi}^p)$ — простір вектор-функцій $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, компоненти яких належать $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, $\|\varphi; \overline{\mathbf{H}}_q(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 = \sum_{j=1}^m \|\varphi_j; \mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\|^2$; аналогічні позначення використовуємо також для інших просторів вектор-функцій; $F(D)$ — псевдодиференціальний оператор, що діє на функцію $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\varphi}(k)e^{ikx}$ за формулою $F(D)\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} F(k)\widehat{\varphi}(k)e^{ikx}$, де $F(k) \in \mathbb{C}$ — задана послідовність.

Незалежну змінну t будемо називати часовою координатою, а $x_1, \ldots, x_p$ — просторовими координатами.

Лема 1 (Борель – Кантеллі [16]). *Нехай A_q, $q = 1, 2, \ldots,$ — послідовність вимірних множин із $\mathbb{R}^n$, причому $\sum_{q=1}^{\infty} \operatorname{mes} A_q < \infty$. Тоді міра Лебега множини точок із $\mathbb{R}^n$, що потрапляють у нескінченну кількість множин A_q, дорівнює нулю.*

Теорема 1 (Хінчин [19]). *Нехай $f(x)$ — додатна неперервна функція додатного аргументу x, причому $xf(x)$ — функція незростаюча. Тоді нерівність*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

має для майже всіх (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел α нескінченну множину розв'язків у цілих числах p і q, $q > 0$, якщо при деякому $c > 0$ інтеграл*

$$\int\limits_c^{\infty} f(x)\, dx \tag{3}$$

розбігається; *навпаки, нерівність* (2) *для майже всіх α має не більше ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах p і q, $q > 0$, якщо інтеграл* (3) *збігається.*

Теорема 2 (Грошев [15]). *Нехай m, p — додатні цілі числа, $f(x)$ — додатна неперервна функція, визначена при $x > c$, $x^{p-1}f^m(x)$ — монотонно спадна функція, причому $x^p f^m(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Тоді для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{mp}$) *точок $\omega = (\omega_{jr})$, $j = 1, \ldots, m$, $r = 1, \ldots, p$, mp-вимірного евклідового простору система нерівностей*

$$\left|\omega_{j1}a_1 + \ldots + \omega_{jp}a_p - b_j\right| < f(a), \quad a = \max_{1\le r\le p} |a_r|, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_m$, якщо інтеграл

$$\int\limits_c^{\infty} x^{p-1} f^m(x) dx \tag{5}$$

є розбіжним; *навпаки, система нерівностей* (4) *має для майже всіх ω не більше ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_m$, якщо інтеграл* (5) *збігається.*

Теорема 3 (Спринджук [16]). *Нехай $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(y_1, \ldots, y_p) = \sum_{1\le|r|\le d} a_r y_1^{r_1} \ldots \ldots y_p^{r_p}$ — многочлен з дійсними коефіцієнтами, $p \geq 1$, $d \geq 2$, $\lambda(q_1, \ldots, q_p)$ — невід'ємна дійсна функція, визначена на цілих точках $\mathbb{R}^p$, яка набуває значень, що не перевищують* 1. *Тоді для майже всіх* (*стосовно міри Лебега*) *многочленів $\mathcal{P}$ існує нескінченна кількість розв'язків нерівності $\{\mathcal{P}(q_1, \ldots, q_p)\} \leq \lambda(q_1, \ldots, q_p)$ в цілих числах $q_1, \ldots, q_p$, якщо ряд $\sum_{q_1,\ldots,q_p} \lambda(q_1, \ldots, q_p)$ є розбіжним, і лише скінченна кількість розв'язків, якщо цей ряд збігається.*

Надалі замість фрази „для майже всіх (стосовно міри Лебега)" будемо писати „для майже всіх".

Теорема 4 (Ярнік [20], Безікович [21]). *Нехай $A(\omega)$ — множина чисел $\alpha \in \mathbb{R}$, для яких нерівність $|\alpha - p/q| < q^{-\omega}$, $\omega > 2$, має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах p і $q > 0$. Тоді* $\dim A(\omega) = 2/\omega$.

3. Періодичні крайові задачі для рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними. Періодичні умови є найпростішими нелокальними крайовими умовами. Вперше задачу з періодичними по t умовами для рівнянь із частинними похідними

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \Psi(x,t) + \mu f(z), \quad (x,t) \in (0,1)^2, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} z(x,0) = z(x,1), \qquad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial z}{\partial t}(x,1), \quad x \in [0,1]; \\ z(0,t) = 0,\ z(1,t) = 0, \quad t \in [0,1], \end{gathered} \tag{7}$$

було досліджено в роботі [22]. Тут для раціональних чисел $a = (2p+1)/q$ при певних обмеженнях на праву частину рівняння (6) доведено існування єдиного розв'язку задачі (6), (7) у класі функцій, що зображуються рядами $z(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t) \sin(2k+1)\pi x$.

Для ірраціональних a розв'язок лінійної задачі ($\mu = 0$) буде існувати, якщо для всіх раціональних чисел m/k число a задовольняє нерівність

$$\left| a - \frac{m}{k} \right| > \frac{c}{k^\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad c = c(a) > 0, \tag{8}$$

а нелінійна задача (6), (7) буде розв'язною, якщо оцінка (8) справджується при $\gamma = 2$.

Зауважимо, що оцінка (8) при $\gamma = 2$ справджуються для тих ірраціональних a, які розкладаються в ланцюговий дріб з обмеженими елементами, зокрема для квадратичних ірраціональностей [19] (теорема 23). Якщо $\gamma > 2$, то нерівність (8), згідно з теоремою 1, справджується для майже всіх $a \in \mathbb{R}$.

Детальний огляд робіт, присвячених дослідженню періодичних крайових задач для рівнянь з частинними похідними другого порядку, можна знайти в [23 – 27].

Періодична крайова задача в області Q^1 для строго гіперболічного рівняння

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n}} + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2(n-j)} \partial x^{2j}} = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,T) \times (0,\pi), \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial^r u}{\partial t^r}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial^r u}{\partial t^r}\right|_{t=T} = 0, \quad r = 0,1,\ldots,2n-1, \quad x \in [0,\pi], \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}}\right|_{x=\pi} = 0, \quad l = 0,1,\ldots,n-1, \quad t \in [0,T], \tag{11}$$

де $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,n$, а функція $f(t,x)$ неперервна за аргументом t, достатньо гладка за змінною x і задовольняє умови вигляду (11), вивчалася в роботах [25, 28].

Для єдиності класичного розв'язку задачі (9) – (11) з простору $\mathbf{C}^{2n}(\overline{Q}^1)$ необхідно і достатньо, щоб усі числа $\lambda_1 T/2\pi, \ldots, \lambda_n T/2\pi$ були ірраціональними, де $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — додатні корені рівняння $\lambda^{2n} + a_1 \lambda^{2n-2} + \ldots + a_n = 0$. За умов єдиності існує формальний розв'язок задачі у вигляді ряду $u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k(t) \sin kx$, збіжність якого пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки вирази $1 - \exp(ik\lambda_j T)$, які входять знаменниками в $u_k(t)$, будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими за модулем для нескінченного числа значень $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки для всіх $k \in \mathbb{N}$ справджується нерівність $\left|1 - \exp(ik\lambda_j T)\right| > k\left|\lambda_j T/2\pi - m/k\right|$, $m = m(\lambda_j, k) \in \mathbb{N}$, то мализна знаменників у розглядуваному ряді залежить від швидкості наближення чисел $\lambda_j T/2\pi$ раціональними числами.

Якщо для деяких сталих $M > 0$ і $\gamma \in \mathbb{N}$ нерівності

$$\left|\frac{\lambda_j T}{2\pi} - \frac{m}{k}\right| \geq M k^{-\gamma-\varepsilon}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

де $0 < \varepsilon < 1$, виконуються для всіх (крім скінченної кількості) пар $(k, m) \in \mathbb{N}^2$, а $f \in \mathbf{C}^{(0,\gamma+2)}(\overline{Q}^1)$, $\partial^{2l} f/\partial x^{2l}\big|_{x=0} = \partial^{2l} f/\partial x^{2l}\big|_{x=\pi} = 0$, $l = 0, 1, \ldots, [(\gamma+1)/2]$, то існує розв'язок $u \in \mathbf{C}^{2n}(\overline{Q}^1)$ задачі (9)–(11), який неперервно залежить від f.

З теореми 1 випливає, що для довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння (9) міра Лебега множини тих значень $T > 0$, для яких не виконуються нерівності (12), дорівнює нулеві для всіх $\gamma \geq 2$, а отже, задача (9)–(11) є коректною для майже всіх чисел $T > 0$, якщо $f \in \mathbb{C}^{(0,4)}(\overline{Q}^1)$.

На підставі теореми 4 за допомогою розмірності Хаусдорфа можна розрізняти множини M_γ лебегової міри нуль тих чисел T, які не справджують нерівностей (12) при різних значеннях $\gamma \geq 2$. Враховуючи, що $\dim M_\gamma = 2/\gamma$, шляхом підвищення гладкості функції $f(t,x)$ встановлюється коректність задачі (9)–(11) для всіх значень T, крім множини, розмірність Хаусдорфа якої не перевищує будь-якого наперед заданого додатного числа.

Ці результати перенесено [25, 29] на випадок нестрого гіперболічного рівняння з багатьма просторовими змінними в області Q^p

$$\sum_{|\hat{s}|=n} a_{\hat{s}} \frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{2s_1} \ldots \partial x_p^{2s_p}} = f(t,x), \quad a_{n,0,\ldots,0} \neq 0, \tag{13}$$

для якого розглядається задача з умовами вигляду (10), де $x \in (0,\pi)^p$, та умовами

$$\frac{\partial^{2l} u}{\partial x_j^{2l}}\Big|_{x_j=0} = \frac{\partial^{2l} u}{\partial x_j^{2l}}\Big|_{x_j=\pi} = 0, \qquad l = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{14}$$

У припущенні, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ рівняння $\sum_{|\hat{s}|=n} a_{\hat{s}} \lambda^{2s_0} \big(k/\|k\|\big)^{2s} = 0$ не має нульових коренів, а $\lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, m$, — його різні додатні корені кратностей n_j, $n_1 + \ldots + n_m = n$, встановлено такі твердження.

Для єдиності розв'язку задачі (10), (13), (14) у просторі $\mathbf{C}^{2n}(\overline{Q}^p)$ необхідно і достатньо, щоб жодне з рівнянь $\lambda_j^2(k)\|k\|^2 - \big(2\pi/T\big)^2 w^2 = 0$, $j = 1, \ldots, m$, не мало розв'язків у натуральних числах $k_1, \ldots, k_p, w$.

Нехай виконуються умови єдиності розв'язку задачі (10), (13), (14) та існують такі додатні сталі M_1, M_2, M_3 і натуральні числа γ_1, γ_2, γ_3, що нерівності

$$\left|\lambda_j(k) - \frac{2\pi}{T}\frac{w}{\|k\|}\right| \geq M_1 |k|^{-\gamma_1-\varepsilon}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{15}$$

$$|\lambda_j^{n_j}(k)| \geq M_2 |k|^{-\gamma_2-\varepsilon}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{16}$$

$$\prod_{\nu=1,\,\nu\neq j}^{m} |\lambda_\nu^2(k) - \lambda_j^2(k)|^{n_\nu} \geq M_3|k|^{-\gamma_3-\varepsilon}, \quad j = 1,\ldots,m, \tag{17}$$

де $0 < \varepsilon < 1/(n+2)$, справджуються для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k,w) \in \mathbb{N}^{p+1}$ та векторів $k \in \mathbb{N}^p$ відповідно. Якщо $f \in \mathbf{C}^{(0,N)}(\overline{Q}^p)$, $N = \bar{n}\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + p + 1$, $\bar{n} = \max(n_1,\ldots,n_m)$, і задовольняє умови $\partial^{2r} f/\partial x_j^{2r}\big|_{x_j=0,x_j=\pi} = 0$, $j = 1,\ldots,p$, $0 \leq r < [N/2]$, то існує розв'язок задачі (10), (13), (14) з простору $\mathbf{C}^{2n}(\overline{Q}^p)$, який неперервно залежить від $f(t,x)$.

Доведено, що оцінки (15) справджуються при $\gamma_1 \geq p+1$ для майже всіх чисел π/T, оцінки (16) — при $\gamma_2 \geq p$ для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів $a_{0,s}$, $|s| = n$, а оцінки (17) — при $\gamma_3 \geq p(n-1)/2$ для майже всіх векторів, складених із усіх коефіцієнтів $a_{\hat{s}}$ рівняння (13).

Зауважимо, що ліві частини нерівностей (15) – (17) мають складну нелінійну структуру відносно $k \in \mathbb{Z}^p$ і не розглядалися раніше в метричній теорії чисел.

Періодичні задачі для гіперболічних та строго гіперболічних рівнянь з молодшими членами у випадку сталих коефіцієнтів розглядалися в роботах [25, 30 – 33]. Розглянемо задачу

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{r=1}^{p}\lambda_{rj}\frac{\partial}{\partial x_r} - b_j\right)^{n_j} u = f(t,x), \quad (t,x) \in \mathcal{D}^p, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^{r-1}u}{\partial t^{r-1}}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^{r-1}u}{\partial t^{r-1}}\Big|_{t=T} = 0, \qquad r = 1,\ldots,n, \quad x \in \Omega_{2\pi}^p, \tag{19}$$

де $n = n_1 + \ldots + n_m$, $\lambda_{rj}, b_j \in \mathbb{R}$, $r = 1,\ldots,p$, $j = 1,\ldots,m$.

Розв'язність задачі (18), (19) істотно залежить від молодших членів рівняння (18), зокрема, якщо $b_1 \ldots b_m \neq 0$, то задача (18), (19) не може мати двох різних розв'язків із простору $\mathbf{H}_n^n(\mathcal{D}^p)$; якщо при цьому числа $b_1,\ldots,b_m$ всі різні, то проблема малих знаменників відсутня і розв'язок задачі існує в просторі $\mathbf{H}_n^n(\mathcal{D}^p)$ для довільних коефіцієнтів рівняння (18) та довільного $T > 0$ для всіх $f \in \mathbf{H}_N^0(\mathcal{D}^p)$, $N = q + (m-2)(\bar{n}-1)$, $\bar{n} = \max(n_1,\ldots,n_m)$.

Якщо серед чисел b_j є нульові, а саме $b_{q_1} = \ldots = b_{q_l} = 0$, то для того, щоб два розв'язки задачі (18), (19) з простору $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$ відрізнялися лише на адитивну сталу, необхідно і достатньо, щоб рівняння $\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rj}k_r - 2\pi w/T = 0$, $j = q_1,\ldots,q_l$, не мали нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p,w$.

Якщо $b_{l_0} = 0$, то виникає малий знаменник $1 - \exp\left(iT\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rl_0}k_r\right)$, а якщо $b_{l_1} = b_{l_2}$ — малий знаменник $\sum_{r=1}^{p}\left(\lambda_{rl_1} - \lambda_{rl_2}\right)k_r$. У цих випадках встановлено розв'язність (існування розв'язку з точністю до адитивної сталої) задачі (18), (19) для майже всіх чисел $T\lambda_{1l_0}/2\pi,\ldots,T\lambda_{pl_0}/2\pi$ та $\lambda_{1l_1} - \lambda_{1l_2},\ldots,\lambda_{pl_1} - \lambda_{pl_2}$ відповідно, якщо $f(t,x)$ є достатньо гладкою за змінною x і задовольняє умову $\displaystyle\int_{\mathcal{D}^p} f(t,x)\,dxdt = 0$.

Аналогічні результати отримано стосовно задач із умовами (19) для рівнянь гіперболічного типу зі змінними по t коефіцієнтами [34]

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rj}(t)\frac{\partial}{\partial x_r}-b_j(t)\right)^{n_j}u=f(t,x),\quad n_1+\ldots+n_m=n,\quad (t,x)\in\mathcal{D}^p, \tag{20}$$

де $\lambda_{rj}(t)$, $b_j(t)$ — дійсні достатньо гладкі на відрізку $[0,T]$ функції, що задовольняють умови $\sum_{r=1}^{p}\big(\lambda_{rj}(t)-\lambda_{rl}(t)\big)^2+\big(b_j(t)-b_l(t)\big)^2\not\equiv 0$, $\lambda_{rj}^{(\nu)}(0)=\lambda_{rj}^{(\nu)}(T)$, $\nu=0,1,\ldots,n_1+\ldots+n_j-1$, $b_j^{(l)}(0)=b_j^{(l)}(T)$, $l=0,1,\ldots,n$.

Доведено, що у випадку $\prod_{j=1}^{m}\int_0^T b_j(t)\,dt\neq 0$ існує єдиний розв'язок $u\in\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$ задачі (19), (20), якщо $f\in\mathbf{H}_q^0(\mathcal{D}^p)$.

Якщо ж $\prod_{j=1}^{m}\int_0^T b_j(t)\,dt=0$, то існування розв'язку задачі (19), (20) пов'язане з оцінкою знизу малих знаменників вигляду $\sum_{r=1}^{p}k_r\int_0^T\lambda_{rl}(t)\,dt-2\pi w$, $k\in\mathbb{Z}^p$, $w\in\mathbb{Z}$. З теореми 2 випливає, що ці вирази для майже всіх чисел $\int_0^T\lambda_{rl}(t)\,dt$ прямують до нуля не швидше, ніж $|k|^{-\gamma}$ при довільному $\gamma>p$.

Задачі вигляду (18), (19) та (19), (20) у нелінійному випадку, коли права частина рівняння має вигляд $F(t,x)+\varepsilon f(t,x,u)$, розглянуто в [35, 36]. Розв'язність цих задач для малих $|\varepsilon|$ встановлено шляхом їх зведення до операторних рівнянь другого роду і застосування принципів Каччопполі – Банаха та Шаудера.

Задачі про відшукання періодичних за всіма змінними розв'язків гіперболічних (за Петровським та за Гордінгом), а також безтипних систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами вивчалися в роботах [24, 37, 38] та [25] (п. 6.2).

4. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. У роботах [25, 39] для гіперболічного рівняння (20) в області $\mathcal{D}^p$ розглянуто задачу з умовами

$$\sum_{\substack{|\hat{s}|\leq n\\ s_0\leq n-1}}A_{\hat{s}}^{l}\left.\frac{\partial^{|\hat{s}|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right|_{t=0}-$$
$$-\mu\sum_{\substack{|\hat{s}|\leq n\\ s_0\leq n-1}}A_{\hat{s}}^{l}\left.\frac{\partial^{|\hat{s}|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right|_{t=T}=\varphi_l(x),\quad l=1,\ldots,n, \tag{21}$$

де μ та $A_{\hat{s}}^{l}$, $l=1,\ldots,n$, $|\hat{s}|\leq n$, $s_0\leq n-1$, — комплексні числа. Для єдиності розв'язку задачі (20), (21) у просторі $\mathbf{H}_n^n(\mathcal{D}^p)$ необхідно і достатньо, щоб рівняння

$$A(k)=0,\qquad 1-\mu\exp\int\limits_0^T\left(i\sum_{r=1}^{p}k_r\alpha_{rj}(t)+\beta_j(t)\right)dt=0,\quad j=1,\ldots,m,$$

не мали розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p$, де

$$A(k) \equiv \det \left\| \sum_{|\hat{s}|\le n} A^l_{\hat{s}} (ik_1)^{s_1} \dots (ik_p)^{s_p} \right\|_{l=1,\dots,n,\ s_0=0,1,\dots,n-1} \equiv$$

$$\equiv \sum_{|r|\le n(n+1)/2} B_r i^{|r|} k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p}.$$

Теорема 5. *Нехай виконано умови єдиності розв'язку задачі* (20), (21) *та існують додатні сталі* M_1, M_2 *і числа* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}$ *такі, що для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *справджуються нерівності*

$$\left| 1 - \mu \exp \int\limits_0^T \left(i \sum_{r=1}^p k_r \alpha_{rj}(y) + \beta_j(y) \right) dy \right| \ge M_1 |k|^{\gamma_1 - \varepsilon/(2n)}, \quad j = 1, \dots, m, \tag{22}$$

$$\big| A(k) \big| \ge M_2 |k|^{\gamma_2 - \varepsilon/2}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{23}$$

Якщо $f(t,x) \in \mathbf{H}^0_{q+n\gamma_1+1}(\mathcal{D}^p)$, $\varphi_l(x) \in \mathbf{H}_{q+n(n+1)/2+n\gamma_1+\gamma_2}(\Omega^p_{2\pi})$, $l = 1, \dots, n$, *то існує розв'язок задачі* (20), (21) *з простору* $\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D}^p)$, $q \ge n$, *який неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_l(x)$, $l = 1, \dots, n$.

Встановлено, що оцінки (22) для малих знаменників виконуються для майже всіх чисел $\int_0^T \alpha_{rj}(y)\,dy$ і $\operatorname{arctg}(\operatorname{Im}\mu/\operatorname{Re}\mu)$ при $\gamma_1 \ge p+1$, а оцінки (23) — для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів B_r, при $\gamma_2 \ge p$.

Подібну задачу для гіперболічних рівнянь зі змінними по x коефіцієнтами досліджено в роботі [40]:

$$\sum_{j=0}^n a_j \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{2j} L^{n-j} u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{24}$$

$$\sum_{j+2s\le 2n,\, j<2n} b^l_{js} (-L)^s \left(\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} - \mu \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=T} \right) = \varphi_l(x), \quad l = 1, \dots, 2n, \quad x \in G, \tag{25}$$

$$L^r u\big|_{\partial G} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, n-1, \tag{26}$$

де $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, n$, $a_0 a_n \ne 0$, $b^l_{js} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $L \equiv \sum_{i,j=1}^p \dfrac{\partial}{\partial x_i} \times \times \left(p_{ij}(x) \dfrac{\partial}{\partial x_j} \right) - q(x)$, $q \ge 0$, — еліптичний диференціальний вираз із дійснозначними достатньо гладкими коефіцієнтами в області $G \subset \mathbb{R}^p$ з гладкою межею ∂G.

Розв'язок задачі (24) – (26) побудовано у вигляді ряду Фур'є за власними функціями задачі $LX = -\lambda X$, $X|_{\partial G} = 0$, для якої оцінки власних значень λ_k і власних функцій $X_k(x)$ та їх похідних є відомими [41, 42]; при цьому власні значення є простими і додатними, а послідовність $\{k^{-2/p}\lambda_k\}$ — обмеженою і відокремленою від нуля. Якщо $|\mu| \ne 1$, то в розглядуваній задачі проблема малих знаменників відсутня. У випадку $|\mu| = 1$ малими знаменниками є вирази $1 - \mu \exp\big(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_j T\big)$, де $\sigma_1, \dots, \sigma_{2n}$ — корені рівняння $\sum_{j=0}^n a_j \sigma^{2j} = 0$; якщо виконуються оцінки $\big|1 - -\mu \exp(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_j T)\big| \ge M \lambda_k^{-\gamma}$, $k \in \mathbb{N}$, то за умов достатньої гладкості на функції

f і φ_l, $l = 1, \ldots, 2n$, задача (24) – (26) має єдиний розв'язок у просторі $\mathbf{C}^{2n}(\bar{Q})$. Доведено, що згадані оцінки виконуються при $\gamma > p/2$ для майже всіх чисел $T > 0$.

Ці результати поширено [43] на системи рівнянь вигляду (24) зі змінними по x коефіцієнтами.

Задачу з нелокальними за часовою координатою крайовими умовами для лінійних безтипних операторів факторизованого вигляду зі змінними по t коефіцієнтами розглянуто в роботі [44]. Для слабконелінійних гіперболічних рівнянь задачі з нелокальними умовами вивчено в [45 – 47].

На відміну від гіперболічних рівнянь, для параболічних рівнянь [48 – 50] вирази $1 - \mu e^{\lambda_j(k)T}$, де $\lambda_j(k)$ — корені відповідного характеристичного рівняння, при жодному значенні сталої μ не є малими знаменниками. У таких задачах малими є різниці $|\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)|$ та деякі многочлени від $k \in \mathbb{Z}^p$, породжені нелокальними умовами.

Нового типу малі знаменники виникли в задачі з інтегральними умовами вигляду $\displaystyle\int_0^T u(t,x) t^{j-1}\, dt = \varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, для строго гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами $\sum_{\hat{s} \leq n} a_{\hat{s}} \partial^n u / \partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p} = 0$; ці знаменники не факторизуються, і для їх оцінок П. І. Штабалюк [25] (п. 7.4) розробив нову загальну методику, що знайшла також застосування і розвиток в інших умовно коректних задачах [51 – 54].

Деякі нові аспекти, що стосуються оцінок знизу малих знаменників, висвітлено в роботах [55 – 57], де вивчалися нелокальні задачі для рівнянь, нерозв'язних стосовно старшої похідної за часом, а також в роботах [58, 59] — для диференціальних рівнянь з дробовою похідною за часом.

У працях [25, 60, 61] досліджено розв'язність у просторах $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, а також питання про можливість продовження розв'язку за змінною t за межі проміжку $[0, T]$ задач із багатоточковими нелокальними умовами для безтипних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами; при цьому розглянуто також випадок, коли коефіцієнти диференціального рівняння є алгебраїчно залежними. Метричні леми, які використано при цьому, узагальнено в [62].

Багато цікавих результатів отримано при дослідженні (в різних аспектах) нелокальних задач для рівнянь нескінченного порядку [24, 25], псевдодиференціальних рівнянь [63 – 67] та диференціальних рівнянь і систем рівнянь з операторними коефіцієнтами [24, 25]; тут виникли нові труднощі при побудові розв'язків та вирішенні проблем малих знаменників.

5. Нелокальні крайові задачі для систем рівнянь. У цьому пункті висвітлено нові підходи при дослідженні задач з нелокальними умовами для систем безтипних рівнянь з частинними похідними зі сталими та змінними коефіцієнтами, які проводились в останні роки [68]. Отримані при цьому результати узагальнюють, доповнюють та уточнюють раніше встановлені для гіперболічних [69], параболічних [70] та безтипних [24, 71] систем лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язки розглядуваних задач шукаються в різних функціональних просторах і будуються у вигляді векторних рядів $u = \sum_k u_k(t) Y_k(x)$ за повними системами $\{Y_k(x)\}$ ортогональних функцій, де $u_k(t)$ є класичними розв'язками нелокальних задач для систем звичайних диференціальних рівнянь.

5.1. Системи рівнянь зі сталими коефіцієнтами. В області $\mathcal{D}^p$ розглядається нелокальна задача [25, 72]

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) u \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} - \sum_{j=1}^{n} A_j(D) \frac{\partial^{n-j} u}{\partial t^{n-j}} = 0, \quad u = u(t,x), \quad (t,x) \in \mathcal{D}^p, \tag{27}$$

$$\nu \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=T} = \varphi_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \varphi_j = \varphi_j(x), \ x \in \Omega_{2\pi}^p, \tag{28}$$

де $n \geq 1$, $\nu, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $A_j(D) = \sum_{|s| \leq j} A_{n-j,s} D^s$, $A_{n-j,s}$ — комплекснозначні матриці порядку m, $\varphi_j = (\varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{jm})$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, — задані, а $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — шукана вектор-функції.

Задача (27), (28) зводиться до еквівалентної їй нелокальної задачі для системи диференціальних рівнянь (першого порядку за змінною t)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(D) v, \quad v = v(t,x), \quad (t,x) \in \mathcal{D}^p, \tag{29}$$

$$\nu v|_{t=0} - \mu v|_{t=T} = \varphi, \quad \varphi = \varphi(x), \quad x \in \Omega_{2\pi}^p, \tag{30}$$

де вектори $v = \operatorname{col}\left(u, \partial u/\partial t, \ldots, \partial^{n-1} u/\partial t^{n-1}\right)$ і $\varphi = \operatorname{col}\left(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\right)$ мають nm компонент, а $A(D) = \left(A_{i,j}(D)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ — блочна матриця, ненульовими блоками якої є лише блоки $A_{i,i+1}(D) = I_m$, $i = 1, \ldots, n-1$, та $A_{n,i}(D) = -A_{n-i+1}(D)$, $i = 1, \ldots, n$.

Якщо для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ існує розв'язок $v_k = v_k(t)$ задачі

$$\frac{dv_k}{dt} = A(k) v_k, \tag{31}$$

$$\nu v_k(0) - \mu v_k(T) = \widehat{\varphi}(k), \tag{32}$$

де $\widehat{\varphi}(k)$ — коефіцієнти Фур'є 2π-періодичної вектор-функції $\varphi(x)$, то вектор-функція

$$v(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} v_k(t) e^{ikx} \tag{33}$$

є формальним розв'язком задачі (29), (30). Перш ніж сформулювати умови розв'язності задач (31), (32), введемо наступні позначення.

Нехай $\lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, \gamma(k)$, — корені характеристичного рівняння $\det\left(\lambda I_{nm} - A(k)\right) = 0$ кратностей $\alpha_j(k)$ відповідно, $\sum_{j=1}^{\gamma(k)} \alpha_j(k) = nm$. Позначимо через $\beta(k) \geq 0$ число тих коренів $\lambda_j(k)$, які справджують рівність $\nu = \mu \exp(\lambda_j(k) T)$, і при $\beta(k) > 0$ ці корені занумеруємо так: $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{\beta(k)}(k)$. Нехай $\gamma_j(k) \leq m$,

$$J_{js}(k) = \begin{pmatrix} \lambda_j(k) & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j(k) \end{pmatrix}, \quad s = 1, \ldots, \gamma_j(k),$$

є жордановими клітками порядків $\alpha_{js}(k)$, $\sum_{s=1}^{\gamma_j(k)} \alpha_{js}(k) = \alpha_j(k)$, що відповідають кореню $\lambda_j(k)$. Ці клітки впорядкуємо так, щоб $\alpha_{j1}(k) \geq \alpha_{j2}(k) \geq \ldots \geq \alpha_{j,\gamma_j(k)}(k)$.

Нехай $E_{js}(k)$ — матриця розміру $nm \times \alpha_{js}(k)$, складена з власного $E_{js}(1,k)$ і приєднаних $E_{js}(2,k),\ldots,E_{js}(\alpha_{js}(k),k)$ векторів, що відповідають жордановій клітці $J_{js}(k)$, $E_j(k) = \big(E_{j1}(k),\ldots,E_{j,\gamma_j(k)}(k)\big)$ — матриця розміру $nm \times \alpha_j(k)$, $J_j(k) = \operatorname{diag}\big(J_{j1}(k),\ldots,J_{j,\gamma_j(k)}(k)\big)$ — матриця порядку $\alpha_j(k)$, $E(k) = \big(E_1(k),\ldots$ $\ldots,E_{\gamma(k)}(k)\big)$, $J(k) = \operatorname{diag}\big(J_1(k),\ldots,J_{\gamma(k)}(k)\big)$.

У введених позначеннях матриця $A(k)$ має таку форму Жордана:

$$A(k) = E(k)J(k)T^*(k) = \sum_{j=1}^{\gamma(k)}\sum_{s=1}^{\gamma_j(k)} E_{js}(k)J_{js}(k)T^*_{js}(k), \quad T(k) = \big(E^{-1}(k)\big)^*. \tag{34}$$

Розіб'ємо матрицю $T(k)$ на блоки відповідно до розбиття матриці $E(k)$, а саме: $T(k) = \big(T_1(k),\ldots,T_{\gamma(k)}(k)\big)$, $T_j(k) = \big(T_{j1}(k),\ldots,T_{j,\gamma_j(k)}(k)\big)$, $T_{js}(k) =$ $= \big(T_{js}(1,k),\ldots,T_{js}(\alpha_{js}(k),k)\big)$; тут $T_{js}(1,k)$ — власний, а $T_{js}(2,k),\ldots$ $\ldots,T_{js}(\alpha_{js}(k),k)$ — приєднані вектори матриці $A^*(k)$, що відповідають жордановій клітці $J^*_{js}(k)$.

Для довільної функції f одного аргументу $f\big(A(k)\big)$ визначається формулою [73]

$$f\big(A(k)\big) = E(k)f\big(J(k)\big)T^*(k), \tag{35}$$

де $f\big(J(k)\big) = \operatorname{diag}\big(f\big(J_1(k)\big),\ldots,f\big(J_{\gamma(k)}(k)\big)\big)$, $f\big(J_j(k)\big) = \operatorname{diag}\big(f\big(J_{j1}(k)\big),\ldots$ $\ldots,f\big(J_{j,\gamma_j(k)}(k)\big)\big)$, $f\big(J_{js}(k)\big)$ — матриця порядку $\alpha_{js}(k)$ з елементами

$$f_{ab}\big(J_{js}(k)\big) = \begin{cases} f^{(b-a)}\big(\lambda_j(k)\big)/(b-a)!, & 1 \le a \le b \le \alpha_{js}(k), \\ 0, & 1 \le b < a \le \alpha_{js}(k). \end{cases}$$

Отже, матриця $f\big(A(k)\big)$ визначається за допомогою значень функції $f(\lambda)$ та її похідних до порядку $\alpha_{j1}(k)-1$ в точках $\lambda = \lambda_j(k)$, $j = 1,\ldots,\gamma(k)$. Множники $E(k)$ і $T^*(k)$ у формулі (35) визначаються матрицею $A(k)$ і не залежать від функції f.

Нехай для $t \in [0,T]$ функції $f(t,\lambda)$ і $\widetilde{f}(t,\lambda)$ в околі точки $\lambda_j(k)$ задаються формулами

$$f(t,\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda t}/(\nu - \mu e^{\lambda T}), & \beta(k) < j \le \gamma(k), \\ 0, & 1 \le j \le \beta(k), \end{cases}$$

$$\widetilde{f}(t,\lambda) = \begin{cases} 0, & \beta(k) < j \le \gamma(k), \\ \exp\big(\lambda_j(k)t\big)(\lambda - \lambda_j(k))^{\alpha_{j1}(k)-1}, & 1 \le j \le \beta(k). \end{cases}$$

Теорема 6. *Для існування розв'язку задачі* (31), (32) *необхідно і достатньо, щоб*

$$T^*_{js}(\alpha_{js}(k),k)\widehat{\varphi}(k) = 0, \quad j = 1,\ldots,\beta(k), \quad s = 1,\ldots,\gamma_j(k). \tag{36}$$

При цьому розв'язок зображується формулою

$$v_k(t) = f(t,A(k))\widehat{\varphi}(k) -$$

$$-\frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{\beta(k)}\sum_{s=1}^{\gamma_j(k)} E_{js}(k)\exp\big(J_{js}(k)(t-T)\big)\Theta(\alpha_{js}(k)-1)T^*_{js}(k)\widehat{\varphi}(k); \tag{37}$$

ядро задачі (31), (32) *має розмірність* $\sum_{j=1}^{\beta(k)} \gamma_j(k)$, *а його елементами є функції*

$$\widetilde{v}_k(t) = \sum_{j=1}^{\beta(k)} e^{\lambda_j(k)t} \sum_{s=1}^{\gamma_j(k)} E_{js}(1,k) C_{js}(1,k), \tag{38}$$

де $C_{js}(1,k)$ — *довільні комплексні числа,* $\Theta(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Phi^{-1}(\alpha) & 0 \end{pmatrix}$, $\Phi(\alpha) = \big(\Phi_{ab}(\alpha)\big)$ — *матриця порядку* α, *в якій* $\Phi_{ab}(\alpha) = 0$ *при* $1 \leq b < a \leq \alpha$, $\Phi_{ab}(\alpha) = T^{b-a+1}/(b-a+1)!$ *при* $1 \leq a \leq b \leq \alpha$.

Доведення. Згідно з формулами (34) і (35) загальний розв'язок системи рівнянь (31) має вигляд

$$v_k(t) = \exp\big(A(k)t\big)C(k) = \sum_{j=1}^{\gamma(k)} \sum_{s=1}^{\gamma_j(k)} E_{js}(k) \exp\big(J_{js}(k)t\big) T^*_{js}(k) C(k), \tag{39}$$

де $\exp\big(J_{js}(k)t\big) = \big(\exp\big(\lambda_j(k)t\big) z_{ir}(t)\big)_{i,r=1,\ldots,\alpha_{js}(k)}$, а $z_{ir}(t) = t^{r-i}/(r-i)!$ при $r \geq i$ та $z_{ir}(t) = 0$ при $r < i$, $C(k)$ — довільний сталий вектор. Тому з умови (32) отримуємо, що для $\beta(k) = 0$ і $\beta(k) = n$ справджуються відповідно рівності

$$\big(\nu - \mu \exp\big(J_{js}(k)T\big)\big) T^*_{js}(k) C(k) = T^*_{js}(k) \widehat{\varphi}(k), \tag{40}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mu e^{\lambda_j(k)T} \Phi(\alpha_{js}(k)-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^*_{js}(k) C(k) = T^*_{js}(k) \widehat{\varphi}(k), \quad \alpha_{js}(k) > 1, \tag{41}$$

в яких $j = 1, \ldots, \gamma(k)$, $s = 1, \ldots, \gamma_j(k)$; якщо $0 < \beta(k) < n$, то справджуються співвідношення (41) при $1 \leq j \leq \beta(k)$ та співвідношення (40) при $\beta(k) < j \leq \gamma(k)$. Якщо $\alpha_{js}(k) = 1$, то відповідне співвідношення (41) для довільних $T^*_{js}(k)C(k) \in \mathbb{C}$ набирає вигляду $T^*_{js}(k)\widehat{\varphi}(k) \equiv T^*_{js}(1,k)\widehat{\varphi}(k) = 0$.

На підставі співвідношень (41) отримуємо умови (36) та формулу (38), а з (39) – (41) випливає формула (37).

Теорему доведено.

Формули (36) – (38) показують, що ні розв'язки задачі (31), (32), ні умови існування цих розв'язків не можна, взагалі, записати у вигляді добутку деякої функції від матриці $A(k)$ на вектор, як це є у формулі (39). Необхідні та достатні умови такого зображення наведено у наслідках 1 – 4, які випливають з теореми 1.

Наслідок 1. *Щоб записати умови* (36) *у вигляді функції від матриці* $A(k)$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$T^*_j(k)\widehat{\varphi}(k) = 0, \quad j = 1, \ldots, \beta(k);$$

у цьому випадку умови (36) *набирають вигляду*

$$\widetilde{f}\big(0, A(k)\big)\widehat{\varphi}(k) = 0. \tag{42}$$

Наслідок 2. *Щоб записати ядро* (38) *задачі* (31), (32) *у вигляді функції від матриці* $A(k)$, *необхідно і достатньо, щоб* $\alpha_{j1}(k) = \alpha_{j,\gamma_j(k)}(k)$, $j = 1, \ldots, \beta(k)$; *при цьому елементи ядра зображуються формулою* $\widetilde{v}_k(t) = \widetilde{f}\big(t, A(k)\big)C(k)$, *де* $C(k)$ — *довільний сталий вектор.*

***Наслідок* 3.** *Щоб записати частинний розв'язок* (37) *задачі* (31), (32) *у вигляді функції від матриці $A(k)$, необхідно і достатньо, щоб $\alpha_{j1}(k) = 1$, $j = 1, \ldots, \beta(k)$. Цей розв'язок $v_k(t)$ зображується формулою*

$$v_k(t) = f\big(t, A(k)\big)\widehat{\varphi}(k). \tag{43}$$

***Наслідок* 4.** *Розв'язок задачі* (31), (32) *існує, єдиний і визначений для довільних правих частин умов* (32) *тоді і тільки тоді, коли алгебраїчне рівняння*

$$\det\left(\left(\ln\frac{\nu}{\mu} + i2\pi q\right)\frac{I_{nm}}{T} - A(k)\right) = 0 \tag{44}$$

не має q-коренів на множині цілих чисел, тобто коли $\beta(k) = 0$; цей розв'язок зображується формулою (43), *де $f(t,\lambda) \equiv e^{\lambda t}/(\nu - \mu e^{\lambda T})$.*

Для довільної функції f добуток матриці $f\big(A(k)\big)$ на вектор $C(k)$ можна виразити через власні числа $\lambda_j(k)$ матриці $A(k)$, не використовуючи при цьому її власних та приєднаних векторів.

Нехай $g(\lambda, k) = \big(\lambda - \sigma_1(k)\big)^{N_1(k)} \ldots \big(\lambda - \sigma_{\varkappa(k)}(k)\big)^{N_{\varkappa(k)}(k)}$ — мінімальний многочлен вектора $C(k)$ щодо матриці $A(k)$ [73], степінь якого позначимо через $N(k)$ (очевидно, що множина $\{\sigma_j(k)\colon j = 1, \ldots, \varkappa(k)\}$ є підмножиною множини $\{\lambda_j(k) : j = 1, \ldots, \gamma(k)\}$),

$$\big(R(k)\big)_{C(k)} = \Big(C(k), A(k)C(k), \ldots, A^{N(k)-1}(k)C(k)\Big),$$

$$\big(W(k)\big)_{C(k)} = \Big(\big(W_1(k)\big)_{C(k)}, \ldots, \big(W_{\varkappa(k)}(k)\big)_{C(k)}\Big),$$

$$\big(W_j(k)\big)_{C(k)} = \Big(\big(W_{j1}(k)\big)_{C(k)}, \ldots, \big(W_{j,N_j(k)}(k)\big)_{C(k)}\Big),$$

$$\big(W_{js}(k)\big)_{C(k)} = \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{d}{d\sigma}\right)^{s-1} \operatorname{col}(1, \sigma, \ldots, \sigma^{N(k)-1})\Big|_{\sigma=\sigma_j(k)},$$

$$\big(f(\lambda)\big)_{C(k)} = \operatorname{col}\Big(\big(f(\sigma_1(k))\big)_{C(k)}, \ldots, \big(f(\sigma_{\varkappa(k)}(k))\big)_{C(k)}\Big),$$

$$\Big(f\big(\sigma_j(k)\big)\Big)_{C(k)} = \operatorname{col}\left(f\big(\sigma_j(k)\big), f'\big(\sigma_j(k)\big), \ldots, \frac{f^{(N_j(k)-1)}\big(\sigma_j(k)\big)}{(N_j(k)-1)!}\right),$$

матриця $\big(W(k)\big)_{C(k)}$ є матрицею Вандермонда, побудованою за коренями полінома $g(\lambda, k)$, а вектор $\big(f(\lambda)\big)_{C(k)}$ — вектор значень функції $f(\lambda)$ на коренях цього полінома [74]. Тоді

$$f\big(A(k)\big)C(k) = \big(R(k)\big)_{C(k)}\big(W(k)\big)^{-T}_{C(k)}\big(f(\lambda)\big)_{C(k)}, \tag{45}$$

$$\big(W(k)\big)^{-T}_{C(k)} \equiv \Big(\big(W(k)\big)^{-1}_{C(k)}\Big)^T.$$

Зауважимо, що формула (45) буде справедливою, якщо в якості многочлена $g(\lambda, k)$ використати довільний анулюючий многочлен вектора $C(k)$ щодо матриці $A(k)$, зокрема мінімальний чи характеристичний многочлени матриці $A(k)$ [73].

Якщо $g(\lambda, k)$ — мінімальний многочлен матриці $A(k)$, $N(k)$ — його степінь, $W(k)$ — матриця Вандермонда, побудована за коренями $g(\lambda, k)$, $f(\lambda(k))$ — вектор значень деякої функції $f(\lambda)$ на коренях $g(\lambda, k)$, то справедлива формула

$$f\big(A(k)\big) = \sum_{j=1}^{N(k)} e_{j,N(k)}^T W^{-T}(k) f\big(\lambda(k)\big) A^{j-1}(k), \tag{46}$$

де $e_{j,N(k)}$ позначає j-й стовпець матриці $I_{N(k)}$.

Теорема 7. *Для існування та єдиності розв'язку задачі* (29), (30) *у просторі* $\mathbf{C}^n([0,T]; \mathcal{T}\,')$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (44) *не мало розв'язків у цілих числах* $q, k_1, \ldots, k_p$. *Цей розв'язок зображується формулою*

$$v(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \big(R(k)\big)_{\widehat{\varphi}(k)} \big(W(k)\big)^{-T}_{\widehat{\varphi}(k)} \left(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\right)_{\widehat{\varphi}(k)} e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{j=1}^{N(k)} e_{j,N(k)}^T W^{-T}(k) f\big(t, \lambda(k)\big) A^{j-1}(k) \widehat{\varphi}(k) e^{ikx}. \tag{47}$$

Встановимо умови розв'язності задачі (27), (28) у просторі $\overline{\mathbf{H}}^n_n(\mathcal{D}^p)$. Оскільки для розв'язку задачі (27), (28) виконуються нерівності

$$\left\|\frac{\partial^n u}{\partial t^n}; \overline{\mathbf{H}}^0_0(\mathcal{D}^p)\right\|^2 \le \sum_{j=1}^n \left\|A_j(D)\frac{\partial^{n-j}u}{\partial t^{n-j}}; \overline{\mathbf{H}}^0_0(\mathcal{D}^p)\right\|^2 \le C_1 \sum_{j=1}^n \left\|\widetilde{D}^j \frac{\partial^{n-j}u}{\partial t^{n-j}}; \overline{\mathbf{H}}^0_0(\mathcal{D}^p)\right\|^2,$$

де $C_1 > 0$ — деяка стала, то

$$\big\|u; \overline{\mathbf{H}}^n_n(\mathcal{D}^p)\big\|^2 \le (C_1+1)\sum_{j=1}^n \left\|\widetilde{D}^j \frac{\partial^{n-j}u}{\partial t^{n-j}}; \overline{\mathbf{H}}^0_0(\mathcal{D}^p)\right\|^2 =$$

$$= \int_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \big\|Zv_k(t)\big\|^2 dt, \tag{48}$$

де $Z = \operatorname{diag}(\widetilde{k}^n I_m, \widetilde{k}^{n-1} I_m, \ldots, \widetilde{k} I_m)$, а вектор $Zv_k(t)$ зображується формулою

$$Zv_k(t) = Q(t, k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k}) \big\|\rho(t, k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})\big\| Z\widehat{\varphi}(k), \tag{49}$$

в якій

$$Q(t,\widehat{\xi}) = \sum_{j=1}^{N(\widehat{\xi})} e_{j,N(\widehat{\xi})}^T W^{-T}(\widehat{\xi}) \frac{\rho(t,\widehat{\xi})}{\|\rho(t,\widehat{\xi})\|} A^{j-1}(\widehat{\xi}),$$

$$\widehat{\xi} = (\xi, \xi_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Блочна матриця $A(\widehat{\xi})$ визначається ненульовими блоками $L_{i,i+1}(\widehat{\xi}) = I_m$ та $L_{n,n-j+1}(\widehat{\xi}) = L_j(\widehat{\xi}) \equiv \sum_{|s|\le j} A_{n-j,s}\xi^s \xi_{p+1}^{j-|s|}$, тому $ZA(k)Z^{-1} = \widetilde{k}A(k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})$. Розміри та кількість жорданових кліток матриць $A(k)$ та $A(k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})$ збігаються. Якщо $\lambda_j(\widehat{\xi})$ — власне значення матриці $A(\widehat{\xi})$, то $\lambda_j(k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k}) = \lambda_j(k)/\widetilde{k}$. Матриця

Вандермонда $W(\widehat{\xi})$ будується за коренями мінімального многочлена матриці $A(\widehat{\xi})$, а вектори $\rho(t,\widehat{\xi})$, $\rho(t,k)$ визначаються формулами

$$\rho(t,\widehat{\xi}) = \operatorname{col}\big(\rho_1(t,\widehat{\xi}),\ldots,\rho_{\gamma(\widehat{\xi})}(t,\widehat{\xi})\big), \qquad \rho_j(t,\widehat{\xi}) = Z_{\alpha_{j1}(\widehat{\xi})}(\xi_{p+1}^{-1}) f_j\big(t,\xi_{p+1}^{-1}\lambda(\widehat{\xi})\big),$$

$$\rho(t,k) = \operatorname{col}\big(\rho_1(t,k),\ldots,\rho_{\gamma(k)}(t,k)\big), \qquad \rho_j(t,k) = Z_{\alpha_{j1}(k)}(\widetilde{k}) f_j\big(t,\lambda(k)\big),$$

де $Z_\alpha(\eta) = \operatorname{diag}(1,\eta,\ldots,\eta^{\alpha-1})$; при цьому $\rho(t,k/\widetilde{k},1/\widetilde{k}) = \rho(t,k)$.

Оскільки функція $\big\|Q(t,\widehat{\xi})\big\|^2$ є обмеженою, то з формул (48), (49) і оцінки для $\big\|\rho(t,k)\big\|^2$ випливає нерівність

$$\big\|u;\overline{\mathbf{H}}_n^n(\mathcal{D}^p)\big\|^2 \le C_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{j=0}^{n-1}\Big\|\theta^{\widetilde{s}}(k)\widetilde{k}^{n-j+\widetilde{s}-1}\widehat{\varphi}_j(k)\Big\|^2, \tag{50}$$

де $C_2 > 0$, $\widetilde{s}$ — максимальна кратність коренів мінімального многочлена $g(\lambda,k)$ матриці $A(k)$, яка досягається для безлічі векторів k, $\theta(k) \ge \sup\limits_{t,r}\left|\dfrac{e^{\lambda_r(k)t}}{\nu-\mu e^{\lambda_r(k)T}}\right|$.

Для знаходження величини $\theta(k)$ оцінюється знизу модуль величини $\nu-\mu e^{\lambda_r(k)T}$, яка, взагалі кажучи, є малим знаменником у формулі для розв'язку задачі (27), (28). Таку оцінку для всіх чисел ν і μ неможливо отримати, тому що для довільної послідовності $\theta(k)$ можна підібрати такі числа ν і μ, що нескінченно часто буде виконуватися протилежна до бажаної нерівність. Для розв'язання проблеми малих знаменників використано метричний підхід; при цьому вважалось (без обмеження загальності), що вектор (ν,μ) належить одиничній кулі $B^4 \subset \mathbb{R}^4$ із центром у початку координат.

Лема 2. *Для довільного $\varepsilon > 0$ існує така множина $B_\varepsilon \subset B^4$, $\operatorname{mes} B_\varepsilon \le \varepsilon$, що для всіх векторів $(\nu,\mu) \in B^4 \setminus B_\varepsilon$ та довільного $\varepsilon_1 > 0$ виконуються оцінки*

$$\big|\nu-\mu e^{\lambda_r(k)T}\big| \ge \sqrt{\frac{\varepsilon}{C_3(\varepsilon_1)}}\max\big(1,e^{\operatorname{Re}\lambda_r(k)T}\big)\widetilde{k}^{-(p+\varepsilon_1)/2}, \quad r=1,\ldots,\gamma, \quad k\in\mathbb{Z}^p,$$

де $C_3 = C_3(\varepsilon_1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{-p-\varepsilon_1}$.

Із леми 2 випливає рівність $\theta^2(k) = C_3\widetilde{k}^{p+\varepsilon_1}/\varepsilon$, яка разом із оцінкою (50) дає можливість сформулювати наступну теорему.

Теорема 8. *Нехай $\varphi_j \in \overline{\mathbf{H}}_{l-j}(\Omega_{2\pi}^p)$, $l > n-1+\widetilde{s}+p\widetilde{s}/2$, $j=0,1,\ldots,n-1$. Тоді для всіх векторів $(\nu,\mu)\in B^4\setminus B_\varepsilon$, $\operatorname{mes} B_\varepsilon \le \varepsilon$, існує єдиний розв'язок $u=u(t,x)$ задачі* (27), (28) *з простору $\overline{\mathbf{H}}_n^n(\mathcal{D}^p)$, що неперервно залежить від вектор-функцій $\varphi_j(x)$, $j=0,1,\ldots,n-1$, та справджує оцінку*

$$\big\|u;\overline{\mathbf{H}}_n^n(\mathcal{D}^p)\big\|^2 \le \frac{C_4}{\varepsilon^{\widetilde{s}}}\sum_{j=0}^{n-1}\big\|\varphi_j;\overline{\mathbf{H}}_{l-j}(\Omega_{2\pi}^p)\big\|^2,$$

де $\widetilde{s}$ — число із формули (50), $C_4 = C_4(l) > 0$.

Результати, отримані при дослідженні задачі (27), (28), поширено [25, 75] на випадок задачі з умовами (28) для анізотропних стосовно порядку диференціювання за просторовими змінними систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами. При цьому розроблено нову методику, яка базується на використанні поділених різниць

[76] при оцінюванні малих знаменників і мероморфних функцій, що виникли при побудові розв'язку задачі.

В області $\mathcal{D}^p$ розглянуто задачу для нормальної системи диференціальних рівнянь

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, D\Big)u = \sum_{\substack{|\hat{s}|\le N\\ s_0\le n}} A_{\hat{s}} D^s \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{s_0} u = 0 \tag{51}$$

із умовами (28), де $A_{\hat{s}}$ — квадратні матриці порядку m із комплексними елементами. Максимальні порядки похідних за змінними x_j, що входять у систему (51), можуть бути довільними, не залежать один від одного та від n (анізотропність системи).

Вивчено розв'язність задачі (28), (51) на множині функцій $u = u(t,x)$ зі значеннями $u(t,\cdot)$ у шкалі соболєвських просторів $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$.

При цьому, як і у випадку системи (27), задача (28), (51) зводиться до еквівалентної їй задачі з умовами (30) для системи рівнянь (першого порядку за змінною t) $\partial v/\partial t = B(D)v$, $v = v(t,x)$, $(t,x)\in\mathcal{D}^p$, де $B(D) = \big(B_{ij}(D)\big)_{i,j=1}^{nm}$.

Нехай $l_\varphi(\lambda,k)$ — мінімальний многочлен вектора $\widehat{\varphi}(k)$ щодо матриці $B(k)$, $\lambda_j(k)$, $j = 1,\dots,\gamma(k)$, — корінь кратності $\alpha_j(k)$, $\alpha_1(k)+\ldots+\alpha_{\gamma(k)}(k) = n(k)$, многочлена

$$l(\lambda,k) \equiv \det\big(\lambda I_{nm} - B(k)\big) = \lambda^{nm} + \sum_{i=1}^{nm} l_i(k)\lambda^{nm-i},$$

$b = \overline{\lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty}}\, n(k)$, $b_1 = \underline{\lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty}} \min\limits_{j=1,\dots,\gamma(k)} \alpha_j(k)$, $b_2 = \overline{\lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty}} \max\limits_{j=1,\dots,\gamma(k)} \alpha_j(k)$, n_i — степінь многочлена $l_i(k) = \sum_s a_{is}k^s$, а n_{ij} — степінь многочлена $B_{ij}(k)$, $n_l = \max\limits_{n_i\ge 0}\dfrac{n_i}{i} \ge 0$ — зведений порядок системи (51), $d_1,\dots,d_{nm-1}, d_{nm} = 0$ — такі дійсні числа, що вираз $\max\limits_{n_{ij}\ge 0}(d_i - d_j + n_{ij})$ набуває мінімального значення, яке позначимо n_B.

Для єдиності розв'язку задачі (28), (51) необхідно і достатньо, щоб число ν не належало до точкового спектра оператора $\mu\exp\big(B(D)T\big)$, тобто щоб алгебраїчне рівняння $l(\varkappa_1 + i\varkappa_2 k_0, k) = 0$, де $\varkappa_1 = \ln(\nu/\mu)/T$, $\varkappa_2 = 2\pi/T$, не мало розв'язків у цілих числах $k_0, k_1, \dots, k_p$. Необхідну умову існування розв'язку задачі дає наступна теорема.

Теорема 9. *Для існування розв'язку задачі* (28), (51) *у шкалі просторів* $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$ *для довільного вектора* φ, *компоненти якого належать до шкали просторів* $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$, *необхідно, щоб для деяких сталих* $K>0$ *і* $L\in\mathbb{R}$ *для всіх векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *виконувались нерівності* $|\nu - \mu e^{\lambda_j(k)}| \ge K\tilde{k}^L$, $j = 1,\dots,\gamma(k)$.

Для встановлення достатніх умов існування розв'язку задачі (28), (51) використано нове зображення розв'язку $v_k(t)$ задачі з умовами (32) для системи рівнянь $dv_k/dt = B(k)v_k$ за допомогою поділених різниць $R_{\Lambda(k)}\left(\dfrac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\right)$ за набором $\Lambda(k)$ всіх коренів многочлена $l_\varphi(\lambda,k)$ у вигляді

$$v_k(t) = \int_0^1 l'_\varphi\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)B(k), k\Big)d\tau \cdot R_{\Lambda(k)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\widehat{\varphi}(k),$$

де $l'_\varphi(\lambda,k)=dl_\varphi(\lambda,k)/d\lambda$. Для розв'язання проблеми малих знаменників потрібно було встановити оцінки зверху для поділених різниць та оцінки знизу для різниць коренів многочлена $l(\lambda,k)$.

Нехай $\lambda_j(\widehat{\xi})=\lambda_j(\xi,\xi_{p+1})$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_p)\in\mathbb{R}^p$, $\xi_{p+1}\geq 0$, — корені рівняння

$$l(\lambda,\widehat{\xi})=\lambda^{nm}+\sum_{j=1}^{nm}\sum_{|s|\leq n_j}a_{js}\xi^s\xi_{p+1}^{jn_l-|s|}\lambda^{nm-j}=\prod_{j=1}^{\gamma(\widehat{\xi})}(\lambda-\lambda_j(\widehat{\xi}))^{\alpha_j(\widehat{\xi})}=0$$

і при $\widetilde{k}>K_1$ виконуються нерівності $n(k)\leq b$, $\min\limits_{j=1,\ldots,\gamma(k)}\alpha_j(k)\geq b_1$, $\max\limits_{j=1,\ldots,\gamma(k)}\alpha_j(k)\leq b_2$.

Лема 3. *Нехай* $S(\omega;\widehat{\xi})=\prod_{s=1}^{\gamma(\widehat{\xi})}\big(d^\omega l\big(\lambda_s(\widehat{\xi}),\widehat{\xi}\big)/d\lambda^\omega\big)^{\alpha_s(\widehat{\xi})}$ *є результантом* (*за змінною* λ) *многочленів* $l(\lambda,\widehat{\xi})$ *і* $d^\omega l(\lambda,\widehat{\xi})/d\lambda^\omega$ *й існують сталі* $K_2>K_1$ *та* $C_5>0$ *такі, що*

$$\forall\widetilde{k}>K_2\colon\quad \big|S(N_j;k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})\big|\geq C_5\widetilde{k}^{\beta_j},\quad j=1,\ldots,h,$$

де $b_2<N_1<N_2<\ldots<N_h<b$, $-pb_1/2-n_lb_1\leq\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_h\leq 0$, $1\leq h\leq b-b_1$. *Тоді серед довільного набору із* (N_j+1)*-го кореня* (*враховуючи кратність*) *многочлена* $l(\lambda,k)$ *існують корені* $\lambda^*(k)$ *і* $\lambda^{**}(k)$ *такі, що*

$$\big|\lambda^*(k)-\lambda^{**}(k)\big|\geq C_6\widetilde{k}^{n_l+\beta_j/b_1}\geq C_6\widetilde{k}^{-p/2},\qquad \widetilde{k}>K_2,\quad j=1,\ldots,h,$$

де стала C_6 *не залежить від* k.

Лема 4. *Нехай* $\overline{\Lambda}(k)$ *є деяким* s*-елементним набором коренів многочлена* $l_\varphi(\lambda,k)$. *Тоді*

$$\left\|\int_0^1 l'_\varphi\left(\tau\frac{\partial}{\partial t}+(1-\tau)Z_kB(k)Z_k^{-1},k\right)d\tau R_{\overline{\Lambda}(k)}(\rho_0(\lambda,t))\right\|\leq C_7\widetilde{k}^{n_B(n(k)-1)-sr},$$

де $Z_k=\operatorname{diag}\big(\widetilde{k}^{d_1},\ldots,\widetilde{k}^{d_{nm}}\big)$, $\rho_0(\lambda,t)=e^{\lambda t}/(\nu-\mu e^{\lambda T})$, $r<-p/2$, *а стала* $C_7=C_7(r)$ *не залежить від* k.

На підставі лем 3 і 4 доведено наступну теорему існування розв'язку. Позначимо через $\varphi^0,\varphi^1,\ldots,\varphi^{nm-1}$ скалярні компоненти вектора правих частин умов (30).

Теорема 10. *Нехай* $\mu\in\mathcal{O}$ *— фіксоване число,* $\varphi^j\in\mathbf{H}_{q_j}(\Omega_{2\pi}^p)$, $j=0,1,\ldots,nm-1$. *Тоді для всіх* $\nu\in\mathcal{O}\setminus B_\varepsilon$, $\operatorname{mes}B_\varepsilon\leq\varepsilon$, *де* $\varepsilon>0$ *— довільне мале число, існує єдиний розв'язок* u *задачі* (28), (51) *такий, що* $\partial^ju_s/\partial t^j\in\mathbf{H}_{q_{sj}}(\Omega_{2\pi}^p)$ *для всіх* $t\in[0,T]$, *де* $q_{sj}=\max\limits_{s=1,\ldots,nm}(q_{s-1}-d_s)+d_{jm+s}+d$, $s=1,\ldots,nm$, $j=0,1,\ldots,n-1$, *а число* d *лінійно залежить від* n_l, n_B *та* p.

Аналогічні результати щодо розв'язності задачі (28), (51) отримано [77] і для анізотропних просторів Соболєва $\mathbf{H}_{\bar{q}}$ із векторним індексом $\bar{q}=(q_1,\ldots,q_p)\in\mathbb{R}^p$, які є поповненнями множини $\mathcal{T}$ тригонометричних поліномів $\varphi(x)=\sum\hat{\varphi}(k)\,e^{ikx}$ за нормою $\|\varphi\|_{\bar{q}}=\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\bar{k}^{2\bar{q}}\,|\hat{\varphi}(k)|^2}$, де $\bar{k}^{2\bar{q}}=\bar{k}_1^{2q_1}\cdots\bar{k}_p^{2q_p}$, $\bar{k}_j=\sqrt{1+k_j^2}$, $j=1,\ldots,p$.

В роботах [78, 79] вивчено розв'язність нелокальної двоточкової задачі в області $\mathcal{D}^p$ для рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку

$$\sum_{|\hat{s}|=0}^{\infty} A_{\hat{s}} D^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = f(t,x), \tag{52}$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\Big|_{t=T} = 0, \quad \alpha = 0,1,\ldots, \tag{53}$$

де $A_{\hat{s}}$ — сталі комплексні матриці порядку $m \geq 1$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Введено пов'язані з цією задачею простори Соболєва нескінченного порядку $\mathbf{W}^\infty\{A_{\hat{s}}\}$, досліджено їх властивості та встановлено умови однозначної розв'язності задачі (52), (53). При встановленні теорем вкладення просторів $\mathbf{W}^\infty\{A_{\hat{s}}\}$ у простори Соболєва скінченного порядку виникає проблема малих знаменників; тому умови існування такого вкладення просторів мають метричний характер.

Нелокальні задачі для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом, та систем диференціальних рівнянь із псевдодиференціальними коефіцієнтами з аналітичними символами розглянуто в роботах [80, 81].

5.2. Системи рівнянь із змінними коефіцієнтами. В області $\mathcal{D}^p$ розглядається задача знаходження розв'язку $u = u(t,x)$ системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами [82]

$$\begin{gathered} L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, D\Big)u \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} - \sum_{j=1}^{n} A_j(t,D) \frac{\partial^{n-j} u}{\partial t^{n-j}} = f, \\ u = u(t,x), \quad f = f(t,x), \quad (t,x) \in \mathcal{D}^p, \end{gathered} \tag{54}$$

який задовольняє двоточкові нелокальні крайові умови

$$\nu \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=T} = \varphi_j, \quad j = 0,1,\ldots,n-1, \quad \varphi_j = \varphi_j(x),\ x \in \Omega_{2\pi}^p, \tag{55}$$

де $\nu, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $A_j(t,D) = \sum_{|s|\leq j} A_{n-j,s}(t) D^s$, $A_{n-j,s}(t)$ — комплекснозначні матриці порядку m з неперервними на відрізку $[0,T]$ елементами, $n \geq 1$ — порядок системи.

На відміну від результатів щодо розв'язності (у шкалах просторів Соболєва, для яких є характерним поліноміальний ріст коефіцієнтів Фур'є) задачі (27), (28), розв'язність задачі (54), (55) для системи із змінними коефіцієнтами вимагає використання просторів $\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$ — просторів функцій із експоненціальним зростанням (спаданням) їхніх коефіцієнтів Фур'є.

Наприклад, нелокальна задача для одного рівняння зі змінним коефіцієнтом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} - \cos t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \nu u(0,x) - \mu u(\pi,x) = \varphi(x)$$

має розв'язок $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{i(k,x)} = \exp(iaDt + \sin t \cdot D^2)\big(\nu - \mu e^{ia\pi D}\big)^{-1} \times$ $\times \varphi(x)$ такий, що

$$\Big|u_k\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big| = \frac{e^{k^2}}{|\nu - \mu e^{ika\pi}|}|\varphi_k|, \quad k \in \mathbb{Z},$$

тому при $|\nu| \neq |\mu|$

$$\left\| u\left(\frac{\pi}{2},\cdot\right); \mathbf{L}_2(\Omega^1_{2\pi})\right\| \geq \big(|\nu|-|\mu|\big)^{-1}\left((2\pi)^p\sum_{|k|=0}^{\infty} e^{2k^2}|\varphi_k|^2\right)^{1/2}.$$

Із останньої нерівності випливає, що $u(t,\cdot)$ не є функцією зі значеннями у просторі $\mathbf{L}_2(\Omega^1_{2\pi})$, якщо коефіцієнти Фур'є φ_k функції $\varphi(x)$ не спадають швидше, ніж e^{-k^2} при $k\to\pm\infty$.

Позначимо через $\mathbf{E}_h(\Omega^p_{2\pi})$ простір $\mathbf{E}_{h,l}(\Omega^p_{2\pi})$ при $l=1$.

Якщо $u(t,x)$ є розв'язком задачі (54), (55), то справджується нерівність

$$\sum_{j=0}^{n}\left\|\widetilde{D}^{n-j}\frac{\partial^j u}{\partial t^j};\overline{\mathbf{E}}_h(\Omega^p_{2\pi})\right\|^2 \leq C_8\|v;\overline{\mathbf{E}}_h(\Omega^p_{2\pi})\|^2+\|f;\overline{\mathbf{E}}_h(\Omega^p_{2\pi})\|^2, \qquad (56)$$

в якій $C_8>0$ — деяка стала, вектор $v=\operatorname{col}(v_0,v_1,\ldots,v_{n-1})$, $v_j=\widetilde{D}^{n-j}\partial^j u/\partial t^j$, $j=0,1,\ldots,n-1$, є розв'язком нелокальної крайової задачі для системи першого порядку

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\widetilde{D}l(t,\widehat{D})v+\widetilde{D}\Phi, \qquad \nu v(0,x)-\mu v(T,x)=Z\varphi(x), \qquad (57)$$

де $Z=\operatorname{diag}(\widetilde{D}^n I_m,\ldots,\widetilde{D}^2 I_m,\widetilde{D}I_m)$, $\Phi=\operatorname{col}(0,\ldots,0,f)$, $\widehat{D}=(D/\widetilde{D},I/\widetilde{D})$, а неперервна за змінною t матриця $l(t,\widehat{\xi})$ є формою степеня n щодо компонент вектора $\widehat{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_p,\xi_{p+1})$.

Нехай $E(t,\widehat{\xi})$ — фундаментальна матриця системи звичайних диференціальних рівнянь $\dfrac{dE}{dt}=\dfrac{l(t,\widehat{\xi})E}{\xi_{p+1}}$, $\xi_{p+1}>0$, $t\in[0,T]$, така, що $E(0,\widehat{\xi})=I_{nm}$. Тоді справджується наступне твердження.

Теорема 11. *Для єдиності розв'язку задачі* (54), (55) *у просторі* $\mathbf{C}^n([0,T],\mathcal{T}')$ *необхідно і достатньо, щоб число* ν *не належало точковому спектру оператора* $\mu E(T,\widehat{D})$.

За умови теореми 9 задача (57) має формальний розв'язок

$$v(t,x)=E(t,\widehat{D})\big[\nu I_{nm}-\mu E(T,\widehat{D})\big]^{-1}\times$$

$$\times\left(Z\varphi(x)+\nu\widetilde{D}\int_0^t Y(0,\tau,\widehat{D})\Phi(\tau,x)\,d\tau+\mu\widetilde{D}\int_t^T Y(T,\tau,\widehat{D})\Phi(\tau,x)\,d\tau\right),$$

причому

$$\|v;\overline{\mathbf{E}}_h(\Omega^p_{2\pi})\|^2\leq|\nu|\int_0^t\left\|\widetilde{D}\sqrt{F(t,\widehat{D})F_1(\widehat{D})F(0,\tau,\widehat{D})}f(\tau,\cdot);\overline{\mathbf{E}}_h(\Omega^p_{2\pi})\right\|^2 d\tau+$$

$$+\left\|\sqrt{F(t,\widehat{D})F_1(\widehat{D})}Z\varphi;\overline{\mathbf{E}}_h(\Omega^p_{2\pi})\right\|^2+$$

$$+|\mu|\int_t^T\left\|\widetilde{D}\sqrt{F(t,\widehat{D})F_1(\widehat{D})F(T,\tau,\widehat{D})}f(\tau,\cdot);\overline{\mathbf{E}}_h(\Omega^p_{2\pi})\right\|^2 d\tau, \qquad (58)$$

де

$$Y(t,\tau,\widehat{\xi}) = E(t,\widehat{\xi})E^{-1}(\tau,\widehat{\xi}), \qquad F(t,\widehat{D}) = \operatorname{tr}\bigl[E^*(t,\widehat{D})E(t,\widehat{D})\bigr],$$

$$F(t,\tau,\widehat{D}) = \operatorname{tr}[Y^*(t,\tau,\widehat{D})y(t,\tau,\widehat{D})],$$

$$F_1(\widehat{D}) = \operatorname{tr}\bigl[\bigl(\overline{\nu}I_{nm} - \overline{\mu}E^*(T,\widehat{D})\bigr)^{-1}\bigl(\nu I_{nm} - \mu E(T,\widehat{D})\bigr)^{-1}\bigr].$$

Оператор $F_1(\widehat{D})$ оцінюється зверху (з точністю до сталого множника) дробовим виразом $\max\bigl(F(0,\widehat{D}), F(T,\widehat{D})\bigr)^{nm-1}/|\nu I_{nm} - \mu E(T,\widehat{D})|^2$.

Лема 5. *Для довільних $\varepsilon > 0$ і $\nu \in \mathcal{O}\setminus B_\varepsilon$, $\operatorname{mes} B_\varepsilon \le \varepsilon$, справджується оцінка*

$$|\det(\nu I_{nm} - \mu E(T,\widehat{D}))| \ge C_9(r)\varepsilon^{nm/2}\widetilde{D}^{-r}, \tag{59}$$

де $r > pnm/2$, $C_9(r) = \Bigl(nm\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{-2r/nm}\Bigr)^{-nm/2}$.

Нехай $\lambda(t,\widehat{\xi})$ і $\Lambda(t,\widehat{\xi})$ — мінімальне і максимальне власні значення ермітової матриці $\bigl(l^*(t,\widehat{\xi}) + l(t,\widehat{\xi})\bigr)/2$, $\Lambda_1 = nm\max\limits_{\tau,\,k}\int_0^\tau \Lambda(\theta, k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})\,d\theta$,

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 + \max_{\tau,\,k}\left(-\int\limits_0^\tau \lambda(\theta,k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})\,d\theta,\ \int\limits_\tau^T \Lambda(\theta,k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})\,d\theta\right).$$

Теорема 12. *Якщо $\widetilde{D}^{n-j+r}\varphi_j \in \overline{\mathbf{E}}_{h+\Lambda_1}(\Omega_{2\pi}^p)$, $j = 0,1,\ldots,n-1$, і для всіх $t\in[0,T]$ $\widetilde{D}^{r+1}f(t,\cdot) \in \overline{\mathbf{E}}_{h+\Lambda_2}(\Omega_{2\pi}^p)$, $f(t,\cdot)\in\overline{\mathbf{E}}_h(\Omega_{2\pi}^p)$, то для кожного $\nu\in\mathcal{O}\setminus B_\varepsilon$, $\operatorname{mes}B_\varepsilon\le\varepsilon$, $\varepsilon>0$, існує єдиний розв'язок $u(t,x)$ задачі* (54), (55), *який належить простору $\overline{\mathbf{E}}_h(\Omega_{2\pi}^p)$ для всіх $t\in[0,T]$.*

Для однорідної системи диференціальних рівнянь вигляду (54) задачу з умовами (55) досліджено в роботі [83]. Новий підхід до вивчення задачі (54), (55) за допомогою методу мінімізації в гільбертових просторах запропоновано в [84 – 86].

6. Задачі із загальними дво- та багатоточковими нелокальними умовами. В роботах [87, 88] в області $\mathcal{D}^p$ вивчено задачу із загальними двоточковими нелокальними за змінною t умовами для системи лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \sum_{j=1}^n A_j(t,D)\frac{\partial^{n-j}u}{\partial t^{n-j}} + f, \quad u = (u_1,\ldots,u_m), \quad f = (f_1,\ldots,f_m), \tag{60}$$

$$\sum_{j=1}^n\left[B_{j0}(D)\frac{\partial^{n-j}u}{\partial t^{n-j}}\Big|_{t=0} + B_{jT}(D)\frac{\partial^{n-j}u}{\partial t^{n-j}}\Big|_{t=T}\right] = \varphi, \quad \varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_{nm}), \tag{61}$$

де $A_j(t,k) = \sum_s A_{js}(t)k^s$, $B_{j0}(k) = \sum_s B_{j0s}k^s$, $B_{jT}(k) = \sum_s B_{jTs}k^s$ є поліномами змінної $k = (k_1,\ldots,k_p)$ з матричними коефіцієнтами $A_{js}(t)$, B_{j0s} та B_{jTs}, квадратна матриця $A_{js}(t)$ має порядок m, а її елементи є комплекснозначними неперервними на $t\in[0,T]$ функціями, матриці B_{j0s} і b_{jTs} з комплексними елементами мають розмір $nm\times m$.

Як і при дослідженні задачі (27), (28), задача (60), (61) зводиться до еквівалентної їй задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку за змінною t для функції $v = \operatorname{col}(u, \partial u/\partial t,\ldots,\partial^{n-1}u/\partial t^{n-1})$, а саме

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t, D)v + F, \tag{62}$$

$$B_0(D)v\big|_{t=0} + B_T(D)v\big|_{t=T} = \varphi, \tag{63}$$

де $B_0(k) = \big(B_{n0}(k), \ldots, B_{10}(k)\big)$, $B_T(k) = \big(B_{nT}(k), \ldots, B_{1T}(k)\big)$, $F = \operatorname{col}(0, \ldots, \ldots, 0, f)$.

Вважається, що координати вектора $(b_1, \ldots, b_{\varkappa})$, складеного зі (спеціальним чином упорядкованих) елементів усіх матриць B_{j0s} та B_{jTs}, належать кругу $\mathcal{O}$.

Нехай $E_{t,\tau}(k)$ — еволюційний оператор системи $dE_{t,\tau}(k)/dt = A(t, k)E_{t,\tau}(k)$, причому $E_{\tau,\tau}(k) = I_{nm}$, $\tau \in [0, T]$, а $\Delta(k) = B_0(k) + B_T(k)E_{T,0}(k)$. Справджується наступне твердження.

Теорема 13. *Для єдиності розв'язку задачі* (60), (61) *необхідно і достатньо, щоб*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p: \quad \det \Delta(k) \neq 0. \tag{64}$$

За умови (64) розв'язок задачі (62), (63) формально визначається рівністю

$$v(t, x) = E_{t,0}(D)\Delta^{-1}(D)\psi(t, x), \tag{65}$$

де

$$\psi(t, x) = \varphi(x) + B_0(D)\int\limits_0^t E_{0,\tau}(D)F(\tau, x)d\tau + B_T(D)\int\limits_T^t E_{T,\tau}(D)F(\tau, x)d\tau.$$

Для встановлення розв'язності задачі (62), (63), а отже, і задачі (60), (61), у просторах $\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$ необхідно оцінити зверху норми матриць $E_{t,\tau}(k)$ та $\Delta^{-1}(k)$.

Нехай $\Lambda_t(k)$ і $\lambda_t(k)$ — найбільше і найменше власні значення матриці $\big(A^*(t, k) + A(t, k)\big)/2$, тоді

$$\|E_{t,\tau}(k)\| \leq \begin{cases} \sqrt{nm}\exp\left(\int\limits_\tau^t \Lambda_s(k)ds\right), & t \geq \tau, \\ \sqrt{nm}\exp\left(\int\limits_\tau^t \lambda_s(k)ds\right), & t \leq \tau. \end{cases}$$

Визначники $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, для деяких матриць $B_0(k)$ і $B_T(k)$ можуть дорівнювати нулю; тому матриці $\Delta^{-1}(k)$ можуть не існувати, а отже, не для довільних коефіцієнтів умов (61) існують потрібні оцінки зверху для $\|\Delta^{-1}(k)\|$.

Для встановлення таких оцінок використано метричний підхід, при якому функцію $\|\Delta^{-1}(k)\|$, яка є функцією аргументів $(b_1, \ldots, b_{\varkappa})$, оцінюємо на множині векторів $b = (b_1, \ldots, b_r) \in \mathcal{O}^r \setminus V$, $\operatorname{mes} V < \varepsilon$, при довільних фіксованих $(b_{r+1}, \ldots, b_{\varkappa})$, де число r і множина V вибрані належним чином, а $\varepsilon > 0$ — довільне наперед задане мале число. При цьому встановлено

$$\forall b \in \mathcal{O}^r \setminus V: \quad \big\|\Delta^{-1}(k)\big\| \leq \varepsilon^{-nm/2}C_{10}\widetilde{k}^{\sigma+nmd}, \qquad d > \frac{p}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Аналогічні оцінки отримано також для норм матриць $\Delta^{-1}(k)B_0(k)$ та $\Delta^{-1}(k)B_T(k)$.

Крім того, показано, що існують такі невід'ємні на $[0,T]$ функції $U(t)$, $F(t)$ і числа $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, що

$$\int\limits_0^t \Lambda_\tau(k)d\tau \le U(t)\widetilde{k}^{l_1}, \qquad -\int\limits_t^T \lambda_\tau(k)d\tau \le F(t)\widetilde{k}^{l_2}.$$

На підставі вказаних вище оцінок та формули (65) доведено наступне твердження.

Теорема 14. *Якщо* $\widetilde{D}^{l_3}\varphi \in \mathbf{E}_{0,0}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\widetilde{D}^{l_3}f(t,\cdot) \in \mathbf{E}_{F(t),l_2}(\Omega_{2\pi}^p)$, $l_3 = \sigma + +nmd$, *то для кожного вектора* $b \in \mathcal{O}^r \setminus V$, $\operatorname{mes} V < \varepsilon$, *існує єдиний розв'язок* $v(t,\cdot) \in \mathbf{E}_{-U(t),l_1}(\Omega_{2\pi}^p)$ *задачі* (62), (63), *який визначається формулою* (65) *і справджує оцінку*

$$\|v; \mathbf{E}_{-U(t),l_1}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le$$

$$\le C_{11}\varepsilon^{-nm}\left[\left\|\widetilde{D}^{l_3}\varphi; \mathbf{E}_{0,0}(\Omega_{2\pi}^p)\right\|^2 + \int\limits_0^T \left\|\widetilde{D}^{l_3}f(\tau,\cdot); \mathbf{E}_{F(t),l_2}(\Omega_{2\pi})^p\right\|^2 d\tau\right].$$

На прикладі задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2(t)\big(D_1^2 + \ldots + D_p^2\big)u,$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \partial u/\partial t \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \partial u/\partial t \end{pmatrix}\Bigg|_{t=T} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

показано, що умови на f і φ в теоремі 14 можна послабити, використовуючи перетворення Ляпунова [73], що задається невиродженими неперервно диференційовними на відрізку $[0,T]$ матрицями Ляпунова.

Перетворення Ляпунова використовувалося [89] при дослідженні нелокальної задачі з багатоточковими умовами

$$\sum_{r=1}^M \sum_{j=1}^n B_{jr}(D)\frac{\partial^{n-j}u}{\partial t^{n-j}}\Big|_{t=t_r} = \varphi, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_M \le T,$$

для системи рівнянь (60), де $B_{jr}(k) = \sum B_{jrs}k^s$ є поліномами змінної k з комплексними матричними коефіцієнтами B_{jrs} розміру $nm \times m$.

Розв'язність задачі з інтегральними умовами $\displaystyle\int_0^T \mu(t)\partial^j u/\partial t^j\,dt = \varphi_j$, $j = = 0, 1, \ldots, n-1$, для системи рівнянь (60) у шкалах просторів $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$ та $\mathbf{E}_h(\Omega_{2\pi}^p)$ досліджено в роботі [90].

На завершення вкажемо на можливі напрями подальших досліджень у теорії нелокальних задач для рівнянь із частинними похідними:

1) визначення класів нелокальних задач, для яких можна встановити необхідні та достатні умови існування розв'язків у певних функціональних просторах;

2) встановлення розв'язності нелокальних задач для диференціально-функціональних рівнянь, а також для ширших класів нелінійних рівнянь та рівнянь із дробовими похідними;

3) розробка методики дослідження нелокальних задач для лінійних рівнянь з частинними похідними, в яких вектор, складений із усіх коефіцієнтів рівняння, належить деякому алгебраїчного многовиду;

4) використання розмірності Хаусдорфа для опису класів некоректних задач.

1. *Нахушев А. М.* О нелокальных задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 1. – С. 92 – 101.
2. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. – 1969. – **185**, № 4. – С. 739 – 740.
3. *Вабищевич П. Н.* Нелокальная параболическая задача и обратная задача теплопроводности // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 7. – С. 1193 – 1199.
4. *Кміть І. Я.* Про одну нелокальну задачу для квазілінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 9. – С. 1307 – 1311.
5. *Кмить И. Я., Лавренюк С. П.* О нелокальных задачах для двумерных гиперболических систем // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, № 6. – С. 149.
6. *Ivanchov M.* Inverse problem for equations of parabolic type. – VNTL Publ., 2003. – 238 p.
7. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
8. *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – М.: Наука, 1978. – 128 с.
9. *Bourghin D. G., Duffin R. J.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – **45**, № 12. – P. 851 – 858.
10. *Siegel C. L.* Iterations of analytic functions // Ann. Math. – 1942. – **43**, № 4. – P. 607 – 612.
11. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 5. – С. 763 – 766.
12. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 6(114). – С. 91 – 192.
13. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Там же. – 1968. – **23**, вып. 4. – С. 179 – 238.
14. *Бейкер Дж. (мл.), Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
15. *Грошев А. В.* Теорема о системе линейных форм // Докл. АН СССР. – 1938. – **19**, № 3. – С. 151 – 152.
16. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 143 с.
17. *Bernik V., Beresnevich V.* On a metrical theorem of W. Schmidt // Acta arithm. – 1996. – **75**, № 3. – P. 219 – 233.
18. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
19. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.
20. *Jarnik V.* Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass // Mat. Sb. – 1929. – **36**, № 3/4. – S. 371 – 382.
21. *Besicovitch A. S.* Sets of fractional dimensions on rational approximations to real numbers // J. London Math. Soc. – 1934. – **9**. – P. 126 – 131.
22. *Артемьев Н. А.* Периодические решения одного класса уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – № 1. – С. 15 – 50.
23. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
24. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
25. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Киев: Наук. думка, 2002. – 416 с.
26. *Самойленко А. М., Ткач Б. П.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
27. *Vejvoda O.* Partial differential equations: time periodic solutions. – USA: Sijthoff: Noordhoff, 1981. – XIII+358 p.
28. *Пташник Б. И.* Периодическая краевая задача для линейных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Мат. физика. – 1972. – Вып. 12. – С. 117 – 121.
29. *Поліщук В. М., Пташник Б. Й.* Періодична крайова задача для гіперболічних рівнянь // Друга конф. мол. науковців Західного наук. центру АН УРСР: Мат. конф. Секц. мат. наук. – Ужгород, 1975. – С. 55 – 59. – Деп. в ВИНИТИ, № 1734-76.

30. *Полищук В. Н.* Периодическая краевая задача для линейных гиперболических уравнений // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 2. – С. 158 – 160.
31. *Полищук В. Н., Пташник Б. И.* О периодической краевой задаче для гиперболических операторов, распадающихся на линейные множители первого порядка с постоянными коэффициентами // Там же. – 1976. – Вып. 3. – С. 6 – 12.
32. *Пташник Б. И.* Периодическая краевая задача для гиперболического оператора, распадающегося на линейные множители первого порядка // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1973. – № 11. – С. 985 – 989.
33. *Пташник Б. Й.* Періодична крайова задача для поліхвильових операторів // Проекційно-ітеративні методи розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1974. – С. 147 – 154.
34. *Полищук В. Н.* Периодическая краевая задача для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 60 – 65.
35. *Поліщук В. М., Пташник Б. Й.* Задача з періодичними за часовою змінною умовами для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 3. – С. 7 – 14.
36. *Поліщук В. М., Пташник Б. Й.* Періодична крайова задача для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними в лінійній частині оператора коефіцієнтами // Там же. – 2005. – **48**, № 2. – С. 25 – 31.
37. *Полищук В. Н., Пташник Б. И.* О периодической краевой задаче для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 3. – С. 326 – 333.
38. *Полищук В. Н., Пташник Б. И.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Там же. – 1980. – **32**, № 2. – С. 239 – 243.
39. *Полищук В. Н.* Задача с нелокальными краевыми условиями для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1979. – С. 54 – 65.
40. *Гой Т. П., Поліщук В. М., Пташник Б. Й.* Нелокальна двоточкова крайова задача для гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області // Математичні методи в науково-технічних дослідженнях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – С. 62 – 70.
41. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 6. – С. 883 – 896.
42. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 391 с.
43. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Нелокальні крайові задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1478 – 1487.
44. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами // Там же. – 2001. – **53**, № 10. – С. 1328 – 1336.
45. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 74 – 76.
46. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 186 – 195.
47. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М., Задорожна Н. М.* Задача з нелокальними умовами для квазілінійних гіперболічних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – Вып. 11. – С. 161 – 167.
48. *Задорожна Н. М., Мельник О. М., Пташник Б. Й.* Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1621 – 1627.
49. *Задорожна Н. М., Пташник Б. Й.* Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Там же. – 1995. – **47**, № 7. – С. 913 – 919.
50. *Пташник Б. Й., Задорожна Н. М.* Нелокальна крайова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – С. 164 – 166.
51. *Медвідь О. М.* Задача з розподіленими даними для факторизованих рівнянь із частинними похідними // Мат. вісн. НТШ. – 2005. – **2**. – С. 135 – 146.
52. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 92 – 101.

53. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Задача з розподіленими даними для рівнянь із частинними похідними // Там же. – 2004. – **47**, № 4. – С. 155 – 159.
54. *Симотюк М. М.* Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2005. – 17 с.
55. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними, не розв'язаних стосовно старшої похідної // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1022 – 1034.
56. *Комарницька Л. І.* Нелокальна крайова задача для рівняння зі змінними коефіцієнтами, не розв'язаного відносно старшої похідної // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 40. – С. 17 – 23.
57. *Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для диференціального рівняння з частинними похідними, яке не розв'язане відносно старшої похідної по часу // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями. – Чернівці, 1990. – С. 86 – 95.
58. *Симотюк М. М., Задорожна Н. М.* Нелокальна крайова задача для нелінійних рівнянь з дробовою похідною за часом зі змінними коефіцієнтами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 51. – С. 61 – 70.
59. *Симотюк М. М., Задорожна Н. М.* Нелокальна крайова задача для диференціального рівняння з дробовою похідною за часом зі змінними коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 89 – 94.
60. *Илькив В. С.* Многоточечная нелокальная задача для уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 487 – 492.
61. *Ільків В. С.* Продовження за часовою змінною розв'язку нелокальної багатоточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 78 – 82.
62. *Ільків В. С.* Аналоги леми Пяртлі із абсолютними константами // Там же. – 1999. – **42**, № 4. – С. 68 – 74.
63. *Илькив В. С.* Возмущения нелокальной задачи для дифференциальных уравнений с псевдодифференциальными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 11. – С. 1962 – 1971.
64. *Ільків В. С.* Задача з формальними початковими умовами для диференціальних рівнянь зі сталими псевдодиференціальними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7. – С. 877 – 888.
65. *Илькив В. С., Полищук В. Н., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Нелокальная многоточечная задача для псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами // Там же. – 1986. – **38**, № 5. – С. 582 – 587.
66. *Симотюк М. М.* Задача з нелокальними багатоточковими умовами для псевдодиференціальних рівнянь // Вісник Держ. ун-ту „Львів. політехніка”. Прикл. мат. – 2000. – № 411. – С. 280 – 285.
67. *Симотюк М. М.* Задача з нелокальними умовами для рівняння з псевдодиференціальними операторами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 4. – С. 37 – 41.
68. *Ільків В. С.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 2006. – 32 с.
69. *Поліщук В. М.* Задача з нелокальними крайовими умовами для гіперболічних систем диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – № 3. – С. 171 – 175.
70. *Задорожна Н. М.* Задача для систем параболічних рівнянь довільного порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 47. – С. 48 – 55.
71. *Илькив В. С., Пташник Б. И.* Задача с нелокальными краевыми условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1012 – 1023.
72. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Зображення та дослідження розв'язків нелокальної задачі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 184 – 194.
73. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
74. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
75. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 84 – 95.
76. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

77. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – Вып. 11. – С. 57 – 64.
78. *Ільків В. С.* Нелокальна задача для систем рівнянь із частинними похідними у просторах Соболєва нескінченного порядку // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 115 – 119.
79. *Илькив В. С.* Нелокальная краевая задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных бесконечного порядка // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 2. – С. 250 – 257.
80. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. вісн. – 2004. – **1**, № 4. – С. 501 – 517.
81. *Илькив В. С., Полищук В. Н., Пташник Б. И.* Нелокальная краевая задача для систем псевдодифференциальных уравнений // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 75 – 79.
82. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для неоднорідної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними та змінними коефіцієнтами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 139 – 143.
83. *Ільків В. С., Пелех Я. М., Салига Б. О.* Нелокальна двоточкова задача для систем з частинними похідними і змінними коефіцієнтами // Вісн. Держ. ун-ту „Львів. політехніка". Прикл. мат. – 2000. – № 407. – С. 245 – 252.
84. *Ільків В. С.* Дослідження нелокальної крайової задачі для рівнянь з частинними похідними за допомогою методу мінімізації в соболєвських просторах // Мат. студії. – 1999. – **11**, № 2. – С. 167 – 176.
85. *Il'kiv V.* Incorrect nonlocal boundary value problem for partial differential equations // Funct. Analysis and Appl. – 2004. – **197**. – P. 115 – 121.
86. *Илькив В. С., Пташник Б. И.* Некорректная нелокальная двухточечная задача для систем уравнений с частными производными // Сиб. мат. журн. – 2005. – **46**, № 1. – С. 119 – 129.
87. *Дасюк Я. І., Ільків В. С., Пукач П. Я.* Крайова двоточкова нелокальна задача для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними // Вісн. Держ. ун-ту „Львів. політехніка". Прикл. мат. – 2000. – № 411. – С. 102 – 106.
88. *Ільків В. С.* Двоточкова нелокальна крайова задача для системи неоднорідних рівнянь із частинними похідними // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 87 – 94.
89. *Ільків В. С.* Багатоточкова нелокальна неоднорідна задача для систем рівнянь з частинними похідними зі змінними за t коефіцієнтами // Мат. вісн. НТШ. – 2004. – **1**. – С. 47 – 58.
90. *Ільків В. С.* Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами // Вісн. Держ. ун-ту „Львів. політехніка". Прикл. мат. – 1999. – № 364. – С. 318 – 323.

Одержано 06.07.2006