УДК 517.944

В. А. Михайлец (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. А. Мурач (Чернигов. технол. ун-т)

РЕГУЛЯРНАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ В ДВУСТОРОННЕЙ УТОЧНЕННОЙ ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ*

We study a regular elliptic boundary-value problem for a homogeneous differential equation in a bounded domain. We prove that an operator of this problem possesses the properties of the Fredholm (Noether) operator in a two-sided refined scale of the functional Hilbert spaces. The Hörmander – Volevich – Paneyakh isotropic spaces are elements of this scale. We establish a priory estimate of a solution and investigate its regularity.

Вивчається регулярна еліптична гранична задача для однорідного диференціального рівняння в обмеженій області. Доведено, що оператор цієї задачі є фредгольмовим (нетеровим) у двобічній уточненій шкалі функціональних гільбертових просторів. Елементами цієї шкали є ізотропні простори Хермандера – Волевіча – Панеяха. Встановлено апріорну оцінку розв'язку та досліджено його регулярність.

Введение. В настоящей работе рассматривается регулярная эллиптическая граничная задача для однородного дифференциального уравнения в ограниченной гладкой евклидовой области. Оператор, соответствующий этой задаче, исследуется в двусторонней уточненной шкале гильбертовых функциональных пространств, введенной авторами в [1 – 3]. Элементами этой шкалы являются некоторые изотропные пространства Хермандера – Волевича – Панеяха. Гладкостные свойства функций этих пространств определяются двумя параметрами — числовым s и функциональным φ. Параметр φ является медленно меняющейся на $+\infty$ функцией одной вещественной переменной и позволяет более тонко охарактеризовать гладкость функции по свойствам ее преобразования Фурье вблизи бесконечности. В частном случае $\varphi \equiv 1$ получается известная шкала гильбертовых пространств Соболева.

Основной результат работы — теорема о фредгольмовости (нетеровости) указанного оператора в уточненной шкале при *произвольном* вещественном s. В качестве приложения приведены априорная оценка решения задачи и утверждение о повышении гладкости решения вплоть до границы области.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с границей Γ, которая является бесконечно гладким многообразием без края размерности $n-1$. Предполагается, что область Ω локально расположена по одну сторону от Γ. Обозначим $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Рассмотрим следующую граничную задачу для *однородного* уравнения в области Ω:

$$L\,u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad B_j\,u = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, q. \qquad (1.1)$$

Здесь и всюду далее L — линейное дифференциальное выражение в $\overline{\Omega}$ произвольного четного порядка $2q \geq 2$, а B_j, $j = 1, \dots, q$, — граничное линейное дифференциальное выражение на Γ порядка $m_j \leq 2q-1$. Все коэффициенты выражений L

* Поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (грант 01.07/00252).

и B_j являются комплекснозначными функциями, бесконечно гладкими в $\overline{\Omega}$ и на Γ соответственно.

Далее будем предполагать, что граничная задача (1.1) является *регулярной эллиптической*. Это означает [4, с. 137, 138; 5, с. 167], что выражение L правильно эллиптическое в $\overline{\Omega}$, а система $\{B_j\colon j=1,\dots,q\}$ нормальна и удовлетворяет условию дополнительности Лопатинского по отношению к L на Γ. Из условия нормальности следует, что порядки m_j граничных дифференциальных выражений различны.

Наряду с (1.1) рассмотрим граничную задачу

$$L^+ v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad B_j^+ v = h_j \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{при} \quad j=1,\dots,q. \tag{1.2}$$

Она формально сопряжена к задаче (1.1) относительно формулы Грина:

$$(L\,u,\,v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (B_j\,u,\,C_j^+\,v)_\Gamma = (u,\,L^+\,v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (C_j\,u,\,B_j^+\,v)_\Gamma, \quad u,v\in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,).$$

Здесь L^+ — сопряженное к L линейное дифференциальное выражение порядка $2q$ с коэффициентами из класса $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$, а $\{B_j^+\}$, $\{C_j\}$ и $\{C_j^+\}$ — некоторые нормальные системы линейных дифференциальных граничных выражений с коэффициентами из класса $C^\infty(\Gamma)$. Их порядки удовлетворяют условию

$$\operatorname{ord} B_j + \operatorname{ord} C_j^+ = \operatorname{ord} C_j + \operatorname{ord} B_j^+ = 2q-1.$$

Кроме того, здесь через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ обозначены скалярные произведения в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ функций, квадратично суммируемых в Ω и на Γ соответственно, а также (см. далее) расширения по непрерывности этих скалярных произведений.

Известно [3 – 5], что поскольку задачи (1.1) и (1.2) являются одновременно регулярными эллиптическими, их ядра

$$N := \{u\in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)\colon L\,u=0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad B_j\,u=0 \text{ на } \ \Gamma \ \text{ для каждого } \ j=1,\dots,q\},$$

$$N^+ := \{v\in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)\colon L^+ \ \ v=0 \ \text{ в } \ \Omega,$$

$$B_j^+\,v=0 \ \text{ на } \ \Gamma \ \text{ для каждого } \ j=1,\dots,q\}$$

конечномерны.

Исследуем оператор, соответствующий задаче (1.1). Положим

$$K_L^\infty(\Omega) := \{\,u\in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)\colon \ L\,u=0 \quad \text{в} \quad \Omega\,\}$$

и рассмотрим линейное отображение

$$u\mapsto Bu=(B_1\,u,\dots,B_q\,u), \quad u\in K_L^\infty(\Omega). \tag{1.3}$$

Мы будем изучать его продолжения в специально подобранных парах гильбертовых пространств из *уточненных шкал* в области Ω и на Γ. Эти шкалы введены авторами в [1 – 3] и обозначены соответственно через

$$\{\,H^{s,\varphi}(\Omega)\colon \ s\in\mathbb{R},\varphi\in\mathcal{M}\} \quad \text{и} \quad \{\,H^{s,\varphi}(\Gamma)\colon \ s\in\mathbb{R},\varphi\in\mathcal{M}\}\,. \tag{1.4}$$

Их определения будут даны в п. 2. Здесь отметим лишь, что гладкость в пространствах

$$H^{s,\varphi}(\Omega) \quad \text{и} \quad H^{s,\varphi}(\Gamma) \tag{1.5}$$

задается с помощью двух параметров — числового s, который определяет основную (степенную) гладкость, и функционального φ, который пробегает достаточно широкое множество $\mathcal{M}$, состоящее из медленно меняющихся на $+\infty$ функций, и уточняет основную гладкость. Гильбертовы пространства (1.5) непрерывно вложены в $\mathcal{D}'(\Omega)$ и $\mathcal{D}'(\Gamma)$ соответственно и при $\varphi \equiv 1$ совпадают с классическими гильбертовыми пространствами Соболева в Ω и на Γ. Здесь, как обычно, $\mathcal{D}'(\Omega)$ и $\mathcal{D}'(\Gamma)$ — линейные топологические пространства распределений в области Ω и на Γ. Отметим, что эти распределения мы трактуем как *антилинейные* функционалы.

Обозначим

$$K_L^{s,\varphi}(\Omega) := \{\, u \in H^{s,\varphi}(\Omega) \colon L\,u = 0 \ \text{ в } \ \Omega \,\}, \quad s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}.$$

Поскольку вложение $H^{s,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ непрерывно, $K_L^{s,\varphi}(\Omega)$ — замкнутое подпространство в $H^{s,\varphi}(\Omega)$.

Напомним, что линейный ограниченный оператор $T : X \to Y$, где X, Y — банаховы пространства, называется *фредгольмовым* (или *нетеровым*), если его ядро конечномерно, а область значений $T(X)$ замкнута в Y и имеет там конечную коразмерность. Полуфредгольмов оператор T имеет конечный индекс $\operatorname{ind} T = \dim\ker T - \dim(Y/\,T(X))$.

Основным результатом статьи является следующая теорема о разрешимости задачи (1.1) в уточненной шкале пространств.

Теорема 1.1. *Для произвольных $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ множество $K_L^{\infty}(\Omega)$ плотно в $K_L^{s,\varphi}(\Omega)$, а отображение* (1.3) *продолжается по непрерывности до ограниченного фредгольмового оператора*

$$B :\, K_L^{s,\varphi}(\Omega) \to \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma). \tag{1.6}$$

Этот оператор имеет ядро N, область значений

$$\left\{ \big(\, g_1, \dots, g_q \big) \in \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma) \colon \ \sum_{j=1}^{q} \big(\, g_j,\, C_j^+\, v \big)_\Gamma = 0 \right.$$
$$\left. \text{для любого} \quad v \in N^+ \right\} \tag{1.7}$$

и конечный индекс, не зависящий от s и φ.

Отметим, что в формуле (1.7) величина $\big(\, g_j,\, C_j^+\, v \big)_\Gamma$ — это значение антилинейного функционала g_j на основной функции $C_j^+\, v$. Следовательно, множество (1.7) замкнуто в правом пространстве соотношения (1.6). Далее, согласно теореме 1.1 множество

$$G := \big\{ \big(C_1^+ v, \dots, C_q^+ v \big) \,:\, v \in N^+ \big\} \tag{1.8}$$

является дефектным подпространством оператора (1.6): оно ортогонально области значений этого оператора относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в $\big(L_2(\Gamma)\big)^q$. Индекс оператора (1.6) равен $\dim N - \dim G$. Ясно, что $\dim G \leq \dim N^+$, где возможно и строгое неравенство, как это следует из [6, с. 257].

В частном случае $\varphi \equiv 1$, $s \notin \{-1/2, -3/2, \ldots\}$ теорема 1.1 содержится в результате Ж.-Л. Лионса и Э. Мадженеса [4, с. 216, 217] о разрешимости регулярной эллиптической граничной задачи для неоднородного эллиптического уравнения в двусторонней шкале. Общий случай $\varphi \in \mathcal{M}$, $s \in \mathbb{R}$ мы получим из этого результата с помощью интерполяции с подходящим функциональным параметром и последующего сужения оператора задачи на пространство решений однородного дифференциального уравнения.

В связи с теоремой 1.1 упомянем также исследование Р. Сили [7] (см. также [8], § 5.4) данных Коши решений однородного эллиптического уравнения в двусторонней шкале пространств бесселевых потенциалов.

2. Уточненные шкалы пространств. В этом пункте мы сформулируем определения и некоторые свойства уточненных шкал пространств, введенных и изученных авторами в [1 – 3].

Обозначим через $\mathcal{M}$ совокупность таких функций $\varphi\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, что:

а) φ измерима по Борелю на $[1, +\infty)$;

б) функции φ и $1/\varphi$ ограничены на каждом отрезке $[1, b]$, $1 < b < +\infty$;

в) функция φ является медленно меняющейся на $+\infty$.

Напомним [9, с. 9, 10], что условие в) означает следующее:

$$\frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \to 1 \quad \text{при} \quad t \to +\infty \quad \text{для произвольного} \quad \lambda > 0.$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ и целое число $n \geq 1$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совокупность всех распределений u медленного роста, заданных на $\mathbb{R}^n$, таких, что преобразование Фурье $\widehat{u}$ распределения u является локально суммируемой по Лебегу на $\mathbb{R}^n$ функцией, удовлетворяющей условию

$$\int \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

Здесь интеграл берется по $\mathbb{R}^n$, а $\langle\xi\rangle = (1 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2}$ — сглаженный модуль вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. В пространстве $\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в качестве скалярного произведения используем величину

$$\big(u, v\big)_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \int \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, \widehat{u}(\xi)\, \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi.$$

Она естественным образом порождает норму.

Пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — частный изотропный гильбертов случай пространств, введенных Л. Хермандером [10, с. 54; 6, с. 18] и Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [11, с. 14]. В случае $\varphi \equiv 1$ пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать также через $H^s(\mathbb{R}^n)$. Это известное гильбертово пространство Соболева на $\mathbb{R}^n$ порядка s.

Пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ тесно связано со шкалой пространств бесселевых потенциалов. В частности,

$$\bigcup_{\varepsilon>0} H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) =: H^{s+}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s-}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{\varepsilon>0} H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда следует, что в семействе $\{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\}$ функциональный параметр φ уточняет основную s-гладкость пространства. Поэтому данное семейство будем называть *уточненной шкалой* на $\mathbb{R}^n$. Из нее строятся уточненные шкалы в Ω и на Γ следующим стандартным образом.

Обозначим через $H^{s,\varphi}(\Omega)$ фактор-пространство пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ по замкнутому подпространству

$$\{w \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}. \tag{2.1}$$

Пространство $H^{s,\varphi}(\Omega)$ гильбертово сепарабельное; в нем скалярное произведение классов смежности распределений $u_1,\, u_2 \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ равно

$$\big(u_1 - \Pi u_1,\, u_2 - \Pi u_2\big)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)},$$

где Π — ортопроектор в $\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ на подпространство (2.1). Отметим, что $H^{s,\varphi}(\Omega)$ естественно трактовать как пространство сужений на Ω всех распределений из $\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Для такого сужения v имеем

$$\|v\|_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\Omega)} = \inf\Big\{\|u\|_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} : u = v \text{ на } \Omega\Big\}.$$

Перейдем к пространству $H^{s,\varphi}(\Gamma)$. Возьмем какой-нибудь конечный атлас α_j: $\mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow U_j$, $j = 1, \ldots, r$, из C^∞-структуры на Γ. Здесь U_j, $j = 1, \ldots, r$, — открытое покрытие многообразия Γ. Возьмем также какое-нибудь разбиение единицы $\chi_j \in \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, r$, на Γ, удовлетворяющее условию $\operatorname{supp} \chi_j \subseteq U_j$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ пространство всех распределений f на Γ таких, что

$$(\chi_j f) \circ \alpha_j \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \text{для каждого} \quad j = 1, \ldots, r.$$

Здесь $(\chi_j f) \circ \alpha_j$ — представление распределения $\chi_j f$ в локальной карте α_j. В $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ определим скалярное произведение и норму по формулам

$$(f, g)_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{r} \big(\,(\chi_j f) \circ \alpha_j, (\chi_j\, g) \circ \alpha_j\,\big)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

$$\|f\|^2_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{r} \|\,(\chi_j f) \circ \alpha_j\,\|^2_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Пространство $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ гильбертово сепарабельное и с точностью до эквивалентности норм не зависит от выбора атласа и разбиения единицы.

Таким образом, уточненные шкалы (1.4) определены. В случае $\varphi \equiv 1$ пространства (1.5) будем обозначать через $H^s(\Omega)$ и $H^s(\Gamma)$. Это классические гильбертовы пространства Соболева в области Ω и на Γ.

Отметим следующие свойства уточненной шкалы в Ω.

Предложение 2.1 [3, с. 362]**.** *Пусть* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varphi,\, \varphi_1 \in \mathcal{M}$. *Тогда*:

а) *множество* $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ *плотно в* $H^{s,\varphi}(\Omega)$;

б) *справедливы компактные плотные вложения*

$$H^{s+\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\Omega) \quad \textit{и} \quad H^{s+\varepsilon,\varphi_1}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\Omega) \quad \textit{при} \quad \varepsilon > 0;$$

в) *если* $\varphi(t) \le c\,\varphi_1(t)$ *при* $t \gg 1$ *для некоторого числа* $c > 0$, *то справедливо непрерывное вложение* $H^{s,\varphi_1}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\Omega)$; *это вложение компактно, если* $\varphi(t)/\varphi_1(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$;

г) *если*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t\,\varphi^2(t)} < \infty, \tag{2.2}$$

то справедливо компактное вложение

$$H^{k+n/2,\,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\,\overline{\Omega}\,) \quad \textit{для любого вещественного} \quad k \ge 0;$$

здесь $C^k(\,\overline{\Omega}\,)$ — *пространство Гельдера на* $\overline{\Omega}$ *порядка* k.

Уточненная шкала на Γ имеет аналогичные свойства: предложение 2.1 остается в силе, если в нем заменить Ω и $\overline{\Omega}$ на Γ, а n на $n-1$. Кроме того, пространства $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ и $H^{-s,\,1/\varphi}(\Gamma)$ взаимно сопряжены с эквивалентностью норм относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$. (Заметим здесь, что $\varphi \in \mathcal{M} \Leftrightarrow 1/\varphi \in \mathcal{M}$.)

3. Интерполяция в уточненных шкалах. Между уточненной и классической соболевской шкалами существует тесная связь. А именно, интерполяция с подходящим функциональным параметром пар пространств Соболева дает пространства уточненной шкалы. Этот факт, установленный авторами в [3], будет использован ниже для доказательства теоремы 1.1. Перед тем как его сформулировать, напомним определение интерполяции с функциональным параметром.

Упорядоченную пару $X = [X_0, X_1]$ гильбертовых пространств X_0 и X_1 будем называть *допустимой*, если эти пространства комплексные сепарабельные и справедливо непрерывное плотное вложение $X_1 \hookrightarrow X_0$.

Пусть $X = [X_0, X_1]$ — допустимая пара гильбертовых пространств. Как известно [4, с. 22], для X существует изометрический изоморфизм $A : X_1 \leftrightarrow X_0$ такой, что A является самосопряженным положительно определенным оператором в пространстве X_0 с областью определения X_1. Оператор A называется *порождающим* для пары X; этот оператор определяется парой X однозначно.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех положительных функций, заданных и измеримых по Борелю на $(0, +\infty)$. Пусть $\psi \in \mathcal{B}$. Поскольку спектр оператора A является подмножеством полуоси $(0, +\infty)$, в пространстве X_0 определен как функция от A оператор $\psi(A)$. Область определения оператора $\psi(A)$ есть линейное множество, плотное в X_0. Обозначим через $[X_0, X_1]_\psi$ или, короче, X_ψ область определения оператора $\psi(A)$, наделенную скалярным произведением графика:

$$(u, v)_{X_\psi} = (u, v)_{X_0} + (\psi(A)u, \psi(A)v)_{X_0}.$$

Пространство X_ψ гильбертово сепарабельное.

Будем называть функцию $\psi \in \mathcal{B}$ *интерполяционным параметром*, если для произвольных допустимых пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств и для любого линейного отображения T, заданного на X_0, выполняется следующее условие. Если при $j = 0, 1$ сужение отображения T на пространство X_j является ограниченным оператором $T : X_j \to Y_j$, то и сужение отображения T на пространство X_ψ является ограниченным оператором $T \colon X_\psi \to Y_\psi$.

Иначе говоря, функция ψ является интерполяционным параметром тогда и только тогда, когда отображение $X \mapsto X_\psi$ является интерполяционным функтором, заданным на категории допустимых пар X гильбертовых пространств [12, с. 18]. Это отображение и будем называть интерполяцией с функциональным параметром ψ.

Отметим, что для интерполяционного параметра $\psi \in \mathcal{B}$ справедливы непрерывные плотные вложения $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Классический результат [5, с. 253; 4, с. 41] теории интерполяции гильбертовых пространств состоит в том, что степенная функция $\psi(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$, является интерполяционным параметром. В [13, 2, 14] найдены значительно более широкие классы интерполяционных функциональных параметров.

Сформулируем необходимый нам далее результат об интерполяции пространств Соболева с функциональным параметром. Предварительно примем следующее обозначение. Для гильбертовых пространств H_0 и H_1 будем писать $H_0 \cong H_1$, если эти пространства равны, как множества, и нормы в них эквивалентны.

Предложение 3.1 [3, с. 359]. *Пусть заданы функция $\varphi \in \mathcal{M}$ и положительные числа ε, δ. Положим*

$$\psi(t) = t^{\,\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\,\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)}) \quad \text{при} \quad t \geq 1 \quad \text{и} \quad \psi(t) = \varphi(1) \quad \text{при} \quad 0 < t < 1.$$

Тогда:

а) *функция ψ является интерполяционным параметром*;

б) *для любого $s \in \mathbb{R}$*

$$\bigl[H^{s-\varepsilon}(\Omega), H^{s+\delta}(\Omega)\bigr]_\psi \cong H^{s,\varphi}(\Omega) \quad \text{и} \quad \bigl[H^{s-\varepsilon}(\Gamma), H^{s+\delta}(\Gamma)\bigr]_\psi \cong H^{s,\varphi}(\Gamma).$$

Нам также понадобятся два утверждения об интерполяции фредгольмовых операторов и прямых произведений пространств (см. [14], п. 3).

Предложение 3.2. *Пусть заданы две допустимые пары $X = [X_0, X_1]$ и $Y = [Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств. Пусть, кроме того, на X_0 задано линейное отображение T, для которого существуют ограниченные фредгольмовы операторы $T \colon X_j \to Y_j$, $j = 0, 1$, имеющие общее ядро $\mathcal{N}$ и одинаковый конечный индекс κ. Тогда для произвольного интерполяционного параметра $\psi \in \mathcal{B}$ ограниченный оператор $T \colon X_\psi \to Y_\psi$ фредгольмов с ядром $\mathcal{N}$, областью значений $Y_\psi \cap T(X_0)$ и тем же индексом κ.*

Предложение 3.3. *Пусть задано конечное число допустимых пар $[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}]$, $k = 1, \ldots, r$, гильбертовых пространств. Тогда для любой функции $\psi \in \mathcal{B}$*

$$\left[\prod_{k=1}^{r} X_0^{(k)},\, \prod_{k=1}^{r} X_1^{(k)}\right]_\psi = \prod_{k=1}^{r} \left[X_0^{(r)},\, X_1^{(r)}\right]_\psi \quad \text{с равенством норм.}$$

4. Один результат об интерполяции подпространств. В этом пункте мы сформулируем и докажем одно (несколько громоздкое по формулировке) утверждение об интерполяции некоторых подпространств, связанных с линейным оператором. Оно наряду с предложением 3.1 сыграет решающую роль в доказательстве основного результата статьи. Для случая голоморфной (комплексной) интерполяции это утверждение сформулировано и доказано в [4, с. 119 – 121]. Мы покажем, что оно справедливо и для интерполяции гильбертовых пространств с функциональным параметром. При этом в отличие от цитированной работы при доказательстве мы не будем использовать конструкцию интерполяционного функтора.

Введем следующее обозначение. Пусть H, Φ и Ψ — гильбертовы пространства, причем непрерывно $\Phi \hookrightarrow \Psi$. Пусть также задан линейный ограниченный оператор $T\colon H \to \Psi$. Обозначим

$$(H)_{T,\Phi} = \{u \in H\colon Tu \in \Phi\}.$$

Пространство $(H)_{T,\Phi}$ гильбертово относительно скалярного произведения графика

$$\big(u, v\big)_{(H)_{T,\Phi}} = \big(u, v\big)_H + \big(Tu, Tv\big)_\Phi$$

и не зависит от Ψ.

Теорема 4.1. *Пусть заданы шесть гильбертовых пространств X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1 и три линейных отображения T, R, S, которые удовлетворяют следующим условиям*:

а) *пары $X = [X_0, X_1]$ и $Y = [Y_0, Y_1]$ являются допустимыми*;

б) *Z_0 и Z_1 являются подпространствами некоторого линейного пространства E*;

в) *справедливы непрерывные вложения $Y_j \hookrightarrow Z_j$ при $j = 0,\ 1$*;

г) *отображение T задано на X_0 и определяет ограниченные операторы $T\colon X_j \to Z_j$ при $j = 0,\ 1$*;

д) *отображение R задано на E и определяет ограниченные операторы $R\colon Z_j \to X_j$ при $j = 0,\ 1$*;

е) *отображение S задано на E и определяет ограниченные операторы $S\colon Z_j \to Y_j$ при $j = 0,\ 1$*;

ж) *для любого $\omega \in E$ справедливо $TR\omega = \omega + S\omega$.*

Тогда пара пространств $\big[\,(X_0)_{T,Y_0},\ (X_1)_{T,Y_1}\,\big]$ является допустимой и для произвольного интерполяционного параметра $\psi \in \mathcal{B}$ справедливо равенство

$$[\,(X_0)_{T,Y_0},\ (X_1)_{T,Y_1}\,]_\psi \cong (X_\psi)_{T,Y_\psi}. \tag{4.1}$$

Доказательство. В силу условий в), г) пространства $(X_j)_{T,Y_j}$, $j = 0,\ 1$, определены корректно. Покажем, что пространство в правой части (4.1) также определено корректно. Согласно условию а) определены пространства X_ψ и Y_ψ; для них справедливы непрерывные вложения $X_\psi \hookrightarrow X_0$ и $Y_\psi \hookrightarrow Y_0$. Теперь первое вложение и условие г) при $j = 0$ влекут ограниченность оператора $T\colon X_\psi \to Z_0$. Кроме того, второе вложение и условие в) влекут непрерывность вложения $Y_\psi \hookrightarrow Z_0$. Таким образом, пространство в правой части (4.1) определено корректно и является гильбертовым пространством, как и пространства $(X_j)_{T,Y_j}$, $j = 0,\ 1$.

Далее нам понадобится отображение

$$Pu = -RTu + u, \quad u \in X_0. \tag{4.2}$$

В силу условий г), д) при любом $j = 0,\ 1$ оператор $P\colon X_j \to X_j$ ограничен. Более того, условия е), ж) влекут для произвольного $u \in X_j$ следующее:

$$TPu = -TRTu + Tu = -(Tu + STu) + Tu = -STu \in Y_j, \quad \text{т. е.} \quad Pu \in (X_j)_{T,Y_j}.$$

Кроме того, из ограниченности оператора $P\colon X_j \to X_j$ и условий г), е) следует оценка

$$\|Pu\|^2_{(X_j)_{T,Y_j}} = \|Pu\|^2_{X_j} + \|TPu\|^2_{Y_j} = \|Pu\|^2_{X_j} + \|-STu\|^2_{Y_j} \leq c_1 \|u\|^2_{X_j},$$

в которой число $c_1 > 0$ не зависит от u. Таким образом, отображение (4.2) задает ограниченные операторы

$$P : X_j \to (X_j)_{T,Y_j} \quad \text{при каждом} \quad j = 0, 1. \tag{4.3}$$

Рассмотрим также сужение отображения R на Y_j при $j = 0, 1$. В силу условий в), д) существует ограниченный оператор $R\colon Y_j \to X_j$. Более того, из условий е), ж) вытекает, что для любого $\omega \in Y_j$ выполняется $TR\omega = \omega + S\omega \in Y_j$, т. е. $R\omega \in (X_j)_{T,Y_j}$. Кроме того, из условий в), е), ж) и ограниченности оператора $R : Y_j \to X_j$ следует оценка

$$\|R\omega\|^2_{(X_j)_{T,Y_j}} = \|R\omega\|^2_{X_j} + \|TR\omega\|^2_{Y_j} = \|R\omega\|^2_{X_j} + \|\omega + S\omega\|^2_{Y_j} \leq$$

$$\leq \|R\omega\|^2_{X_j} + \Big(\|\omega\|_{Y_j} + \|S\omega\|_{Y_j}\Big)^2 \leq$$

$$\leq c_2 \|\omega\|^2_{Y_j} + \Big(\|\omega\|_{Y_j} + c_3 \|\omega\|_{Z_j}\Big)^2 \leq c_4 \|\omega\|^2_{Y_j}$$

с постоянными c_2, c_3, c_4, не зависящими от ω. Таким образом, ограничены операторы

$$R : Y_j \to (X_j)_{T,Y_j} \quad \text{при каждом} \quad j = 0, 1. \tag{4.4}$$

Теперь с помощью операторов (4.3), (4.4) покажем, что пара $\big[(X_0)_{T,Y_0}, (X_1)_{T,Y_1}\big]$ является допустимой. Установим сначала сепарабельность пространства $(X_j)_{T,Y_j}$ при каждом $j = 0, 1$. В силу условия а) пространства X_j и Y_j сепарабельные. Возьмем любые счетные множества X_j^0 и Y_j^0, лежащие и плотные в X_j и Y_j соответственно. Построим по ним счетное множество

$$Q = \{Pu_0 + Rv_0 \colon u_0 \in X_j^0,\, v_0 \in Y_j^0\}$$

и аппроксимируем его элементами произвольное $u \in (X_j)_{T,Y_j}$. Поскольку $u \in X_j$ и $Tu \in Y_j$, найдутся последовательности элементов $u_k \in X_j^0$ и $v_k \in Y_j^0$ такие, что $u_k \to u$ в X_j и $v_k \to Tu$ в Y_j при $k \to \infty$. Отсюда с помощью операторов (4.3), (4.4) и равенства (4.2) получаем

$$w_k = Pu_k + Rv_k \to Pu + RTu = u \quad \text{в} \quad (X_j)_{T,Y_j} \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{4.5}$$

причем $w_k \in Q$. Значит, счетное множество Q плотно в пространстве $(X_j)_{T,Y_j}$, т. е. последнее сепарабельно.

Для доказательства того, что эта пара является допустимой, остается установить плотность непрерывного вложения $(X_1)_{T,Y_1} \hookrightarrow (X_0)_{T,Y_0}$. Выберем произвольное $u \in (X_0)_{T,Y_0}$; тогда $u \in X_0$ и $Tu \in Y_0$. В силу условия а) пространство X_1 плотно в X_0, а пространство Y_1 — в Y_0. Следовательно, существуют последовательности элементов $u_k \in X_1$ и $v_k \in Y_1$ такие, что $u_k \to u$ в X_0 и $v_k \to Tu$ в Y_0 при $k \to \infty$. Отсюда с помощью операторов (4.3), (4.4) и равенства (4.2) имеем (4.5) для $j = 0$ и $w_k \in (X_1)_{T,Y_1}$. Таким образом, $(X_1)_{T,Y_1}$ плотно в $(X_0)_{T,Y_0}$.

Перейдем к доказательству формулы (4.1). Установим сначала вложение левого пространства из этой формулы в правое. В силу определения пространства $(X_j)_{T,Y_j}$ операторы

$$I\colon (X_j)_{T,Y_j} \to X_j \quad \text{и} \quad T\colon (X_j)_{T,Y_j} \to Y_j \quad \text{при каждом} \quad j = 0,\, 1$$

ограничены. Здесь, как обычно, через I обозначено тождественное отображение. Отсюда, поскольку параметр ψ интерполяционный, получаем ограниченность операторов

$$I\colon\ [\,(X_0)_{T,Y_0},\, (X_1)_{T,Y_1}\,]_\psi \to X_\psi \quad \text{и} \quad T\colon\ [\,(X_0)_{T,Y_0},\, (X_1)_{T,Y_1}\,]_\psi \to Y_\psi.$$

Следовательно, если $u \in [\,(X_0)_{T,Y_0},\, (X_1)_{T,Y_1}\,]_\psi$, то $u \in X_\psi$, $Tu \in Y_\psi$, причем

$$\|u\|^2_{X_\psi} + \|Tu\|^2_{Y_\psi} \le c\,\|u\|^2_{[\,(X_0)_{T,Y_0},\,(X_1)_{T,Y_1}\,]_\psi}$$

с некоторой постоянной с, не зависящей от u. Иными словами, справедливо непрерывное вложение

$$[\,(X_0)_{T,Y_0},\, (X_1)_{T,Y_1}\,]_\psi \hookrightarrow (X_\psi)_{T,Y_\psi}. \tag{4.6}$$

Теперь в силу теоремы Банаха об обратном операторе остается доказать включение, обратное к (4.6). Для этого применим к (4.3) и (4.4) интерполяцию с параметром ψ. В результате получим ограниченные операторы

$$P: X_\psi \to [\,(X_0)_{T,Y_0},\, (X_1)_{T,Y_1}\,]_\psi \quad \text{и} \quad R: Y_\psi \to [\,(X_0)_{T,Y_0},\, (X_1)_{T,Y_1}\,]_\psi\,.$$

Следовательно, если $u \in (X_\psi)_{T,Y_\psi}$, т. е. $u \in X_\psi$, $Tu \in Y_\psi$, то в силу (4.2)

$$u = Pu + RTu \in [\,(X_0)_{T,Y_0},\, (X_1)_{T,Y_1}\,]_\psi\,.$$

Тем самым справедливо включение, обратное к (4.6).

Теорема 4.1 доказана.

5. Задача в шкалах соболевских пространств. Для доказательства основного результата нам понадобятся два известных утверждения об операторе регулярной эллиптической граничной задачи

$$L\,u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad B_j\,u = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, q.$$

Здесь в отличие от (1.1) рассматривается *неоднородное* уравнение в области Ω.

Предложение 5.1 [4, с. 191; 5, с. 169, 170]**.** *Отображение*

$$u \mapsto \Lambda u = (Lu, B_1\,u, \ldots, B_q\,u), \quad u \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,), \tag{5.1}$$

продолжается по непрерывности до ограниченного фредгольмового оператора

$$\Lambda\colon H^s(\Omega) \to H^{s-2q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma) = \mathcal{H}_s(\Omega,\Gamma)$$

при любом вещественном $s \geq 2q$. *Этот оператор имеет ядро* N, *область значений*

$$\Big\{ \big(f, g_1, \ldots, g_q\big) \in \mathcal{H}_s(\Omega, \Gamma) \colon \big(\, f,\, v\,\big)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} \big(\, g_j,\, C_j^+\, v\big)_\Gamma = 0$$

$$\text{для любого} \quad v \in N^+ \Big\}$$

и конечный индекс, равный $\dim N - \dim N^+$.

Предложение 5.1 было распространено на случай произвольного вещественного значения s в [4] (гл. 2) и [15] (ч. 5). При этом оператор Λ исследовался в пространствах, построенных различным образом с помощью пространств бесселевых потенциалов соответствующих порядков. Нам понадобится конструкция [4] (гл. 2, § 6, 7), которая в отличие от [15] остается в рамках пространств распределений в области Ω. Для простоты изложения ограничимся случаем целого s (этого будет достаточно).

Возьмем функцию $\rho \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$, положительную в Ω и равную нулю на Γ, такую, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\rho(x)}{\operatorname{dist}(x, \Gamma)} = d \neq 0 \quad \text{для любого} \quad x_0 \in \Gamma.$$

Пусть целое число $\sigma \geq 0$. Обозначим

$$\Xi^\sigma(\Omega) := \Big\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) \colon \rho^{|\alpha|} D^{\alpha} u \in L_2(\Omega) \ \text{ для любого } \ \alpha \ \text{ такого, что } \ |\alpha| \leq \sigma \Big\}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс с неотрицательными целыми компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ и $D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, где D_j, $j = 1, \ldots, n$, — оператор взятия обобщенной частной производной по j-й переменной. Пространство $\Xi^\sigma(\Omega)$ гильбертово относительно скалярного произведения

$$\big(u, v\big)_{\Xi^\sigma(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq \sigma} \Big(\rho^{|\alpha|} D^{\alpha} u,\, \rho^{|\alpha|} D^{\alpha} v \Big)_\Omega.$$

Справедливы непрерывные плотные вложения

$$H_0^\sigma(\Omega) \hookrightarrow \Xi^\sigma(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega). \tag{5.2}$$

Здесь $H_0^\sigma(\Omega)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,) \colon \operatorname{supp} u \subset \Omega\}$ в топологии пространства $H^\sigma(\Omega)$.

Обозначим через $\Xi^{-\sigma}(\Omega)$ гильбертово пространство, сопряженное к $\Xi^\sigma(\Omega)$ относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. Поскольку [12, с. 414] пространства $H_0^\sigma(\Omega)$ и $H^{-\sigma}(\Omega)$ взаимно сопряжены относительно этого же скалярного произведения, то (5.2) влечет непрерывность плотных вложений

$$L_2(\Omega) \hookrightarrow \Xi^{-\sigma}(\Omega) \hookrightarrow H^{-\sigma}(\Omega), \quad \text{где целое} \quad \sigma > 0. \tag{5.3}$$

Из правого вложения следует, что пространство $\Xi^{-\sigma}(\Omega)$ состоит из распределений в области Ω.

Теперь с выражением L свяжем пространство

$$D_L^s(\Omega) := \left\{ u \in H^s(\Omega) \colon Lu \in \Xi^{\,s-2q}(\Omega) \right\}, \quad \text{где целое} \quad s < 2q.$$

Это пространство гильбертово относительно скалярного произведения графика

$$\bigl(u, v\bigr)_{D_L^s(\Omega)} = \bigl(u, v\bigr)_{H^s(\Omega)} + \bigl(Lu, Lv\bigr)_{\Xi^{\,s-2q}(\Omega)}.$$

Множество $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ плотно в $D_L^s(\Omega)$. (Заметим, что в работе [4] через $H^s(\Omega)$ для $s < 0$ обозначено пространство, сопряженное к $H_0^{-s}(\Omega)$ относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. Как отмечено выше, это сопряженное пространство совпадает с используемым нами пространством $H^s(\Omega)$ для целых $s < 0$.) В силу (5.3) и ограниченности оператора $L\colon H^{2q}(\Omega) \to L_2(\Omega)$ справедливы непрерывные плотные вложения

$$H^{2q}(\Omega) \hookrightarrow D_L^s(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega) \quad \text{при целом} \quad s < 2q. \tag{5.4}$$

Предложение 5.2 [4, с. 206, 207, 216]**.** *Отображение* (5.1) *продолжается по непрерывности до ограниченного фредгольмового оператора*

$$\Lambda : D_L^s(\Omega) \to \Xi^{s-2q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma) = \mathcal{K}_s(\Omega, \Gamma)$$

при любом целом $s < 2q$. *Этот оператор имеет ядро* N, *область значений*

$$\left\{ \bigl(f, g_1, \ldots, g_q\bigr) \in \mathcal{K}_s(\Omega, \Gamma) \colon \bigl(\, f,\, v\,\bigr)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} \bigl(\, g_j,\, C_j^+\, v\bigr)_\Gamma = 0 \right.$$

$$\left. \text{для любого} \quad v \in N^+ \right\}$$

и конечный индекс, равный $\dim N - \dim N^+$.

Нам также понадобится одно утверждение об изоморфизме, который осуществляет оператор, соответствующий некоторой однородной граничной задаче Дирихле. Зафиксируем произвольное целое число $r \geq 1$ и возьмем r-ю степень (итерацию) L^r выражения L. Пусть L^{r+} — выражение, формально сопряженное к L^r. Рассмотрим линейное дифференциальное выражение $L^r L^{r+} + 1$ порядка $4qr$ с коэффициентами класса $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$. Положим

$$H_D^\sigma(\Omega) := \{u \in H^\sigma(\Omega) : \gamma_j u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 0, \ldots, 2qr - 1\}$$

$$\text{при любом целом} \quad \sigma \geq 2qr.$$

Здесь γ_j — оператор следа на Γ нормальной к границе Γ производной порядка j; этот оператор понимается в смысле теоремы о следах для пространств бесселевых потенциалов [5, с. 82]. Мы рассматриваем $H_D^\sigma(\Omega)$ как замкнутое подпространство в $H^\sigma(\Omega)$.

Лемма 5.1. *Пусть число* $r \geq 1$. *Тогда справедлив топологический изоморфизм*

$$L^r L^{r+} + 1 : H_D^\sigma(\Omega) \leftrightarrow H^{\sigma-4qr}(\Omega) \quad \text{при любом целом} \quad \sigma \geq 2qr. \tag{5.5}$$

Доказательство. Дифференциальное выражение $L^r L^{r+} + 1$ правильно эллиптическое в $\overline{\Omega}$, поскольку таковым является выражение L. Рассмотрим неоднородную граничную задачу Дирихле

$$L^r L^{r+} u + u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \gamma_j u = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{при} \quad j = 0, \ldots, 2qr - 1.$$

Она эллиптическая и, как установлено в [4, с. 223, 227], оператор этой задачи является ограниченным и фредгольмовым с нулевым индексом в паре пространств

$$\bigl(L^r L^{r+} + 1; \gamma_0, \ldots, \gamma_{2qr-1}\bigr):$$

$$H^{\sigma}(\Omega) \to H^{\sigma-4qr}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{2qr-1} H^{\sigma-j-1/2}(\Gamma) \quad \text{при целом} \quad \sigma \geq 2qr. \tag{5.6}$$

Ядро $\mathcal{N}_D$ оператора (5.6) лежит в $C^{\infty}(\,\overline{\Omega}\,)$. С помощью интегрирования по частям нетрудно вывести, что оно является тривиальным:

$$u \in \mathcal{N}_D \quad \Rightarrow \quad \bigl(u, u\bigr)_{\Omega} = -\bigl(L^r L^{r+} u, u\bigr)_{\Omega} = -\bigl(L^{r+} u, L^{r+} u\bigr)_{\Omega} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

Заметим, что при перебрасывании дифференциального выражения L^r порядка $2qr$ с помощью интегрирования по частям появятся выражения вида $(\,\cdot\,, \gamma_j u)_{\Gamma}$, $j = 0, \ldots, 2qr - 1$, а они равны нулю для $u \in \mathcal{N}_D$. Следовательно, оператор (5.6) — топологический изоморфизм. Поэтому его сужение на подпространство $H^{\sigma}_{D}(\Omega)$ определяет топологический изоморфизм (5.5), что и требовалось доказать (см. также [12, с. 506]).

6. Доказательство основного результата. В этом пункте мы докажем основной результат статьи — теорему 1.1.

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Возьмем такое целое число $r \geq 1$, что

$$2q(1 - r) < s < 2qr, \tag{6.1}$$

и воспользуемся предложением 5.2 для целого $s = 2q(1-r) \leq 0$ и предложением 5.1 для $s = 2qr \geq 2q$. Тогда отображение (5.1) продолжается по непрерывности до ограниченных фредгольмовых операторов

$$\Lambda\colon D_L^{2q(1-r)}(\Omega) \to \Xi^{-2qr}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{q} H^{2q(1-r)-m_j-1/2}(\Gamma) =: \mathcal{K}_{2q(1-r)}(\Omega, \Gamma), \tag{6.2}$$

$$\Lambda\colon H^{2qr}(\Omega) \to H^{2q(r-1)}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{q} H^{2qr-m_j-1/2}(\Gamma) =: \mathcal{H}_{2qr}(\Omega, \Gamma), \tag{6.3}$$

имеющих общее ядро N и одинаковый конечный индекс. Заметим здесь, что пары пространств

$$\Bigl[\, D_L^{2q(1-r)}(\Omega),\, H^{2qr}(\Omega) \Bigr] \quad \text{и} \quad \Bigl[\, \Xi^{-2qr}(\Omega),\, H^{2q(r-1)}(\Omega) \Bigr] \tag{6.4}$$

являются допустимыми. В самом деле, в силу (5.3), (5.4) справедливы непрерывные плотные вложения

$$H^{2qr}(\Omega) \hookrightarrow H^{2q}(\Omega) \hookrightarrow D_L^{2q(1-r)}(\Omega) \quad \text{и} \quad H^{2q(r-1)}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow \Xi^{-2qr}(\Omega).$$

Следовательно, правые пространства пар (6.4) непрерывно и плотно вкладываются в левые пространства. Отсюда, поскольку правые пространства бесселевых потенциалов сепарабельны, вытекает, что и левые пространства сепарабельны. Значит, пары (6.4) являются допустимыми. Из допустимости второй пары следует, что пара

$$\left[\,\mathcal{K}_{2q(1-r)}(\Omega,\Gamma),\, \mathcal{H}_{2qr}(\Omega,\Gamma)\,\right]$$

также допустимая. Теперь в силу (6.1) положим

$$\varepsilon = s - 2q(1-r) > 0, \quad \delta = 2qr - s > 0 \tag{6.5}$$

и возьмем для φ, ε, δ интерполяционный параметр ψ из предложения 3.1. Применив к пространствам, в которых действуют фредгольмовы операторы (6.2) и (6.3), интерполяцию с параметром ψ, получим, согласно предложению 3.2, ограниченный фредгольмов оператор

$$\Lambda\colon\ \Big[D_L^{2q(1-r)}(\Omega),\, H^{2qr}(\Omega)\Big]_\psi \to \big[\,\mathcal{K}_{2q(1-r)}(\Omega,\Gamma),\, \mathcal{H}_{2qr}(\Omega,\Gamma)\,\big]_\psi . \tag{6.6}$$

Отметим, что в силу предложений 3.3 и 3.1, где вместо s следует взять значение $s - m_j - 1/2$, а также соотношений (6.5) справедливы равенства

$$\big[\,\mathcal{K}_{2q(1-r)}(\Omega,\Gamma),\, \mathcal{H}_{2qr}(\Omega,\Gamma)\,\big]_\psi =$$

$$= \left[\Xi^{-2qr}(\Omega)\times\prod_{j=1}^{q} H^{2q(1-r)-m_j-1/2}(\Gamma),\ H^{2q(r-1)}(\Omega)\times\prod_{j=1}^{q} H^{2qr-m_j-1/2}(\Gamma)\right]_\psi =$$

$$= \Big[\Xi^{-2qr}(\Omega),\, H^{2q(r-1)}(\Omega)\Big]_\psi \times \prod_{j=1}^{q}\Big[H^{2q(1-r)-m_j-1/2}(\Gamma),\, H^{2qr-m_j-1/2}(\Gamma)\Big]_\psi =$$

$$= Z(\Omega)\times\prod_{j=1}^{q}\Big[H^{s-m_j-1/2-\varepsilon}(\Gamma),\, H^{s-m_j-1/2+\delta}(\Gamma)\Big]_\psi \cong$$

$$\cong Z(\Omega)\times\prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma),$$

где

$$Z(\Omega) := \Big[\,\Xi^{-2qr}(\Omega),\, H^{2q(r-1)}(\Omega)\,\Big]_\psi . \tag{6.7}$$

Следовательно, в таких пространствах оператор (6.6) является ограниченным фредгольмовым

$$\Lambda\colon\ \Big[D_L^{2q(1-r)}(\Omega),\, H^{2qr}(\Omega)\Big]_\psi \to Z(\Omega)\times\prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma). \tag{6.8}$$

Этот оператор имеет то же ядро N и тот же конечный индекс, что и операторы (6.2), (6.3).

Опишем с помощью $Z(\Omega)$ левое интерполяционное пространство в (6.8). Это будет сделано на основании теоремы 4.1, в которой полагаем

$$X_0 = H^{2q(1-r)}(\Omega), \quad Y_0 = \Xi^{-2qr}(\Omega), \quad Z_0 = E = H^{-2qr}(\Omega),$$

$$X_1 = H^{2qr}(\Omega), \quad Y_1 = Z_1 = H^{2q(r-1)}(\Omega), \quad T = L.$$

Из того, что вторая пара (6.4) является допустимой, и из правого вложения (5.3) следует, что условия а) – в) теоремы 4.1 выполняются. Условие г) этой теоремы также выполняется, поскольку ограничен оператор $L : H^{\sigma}(\Omega) \to H^{\sigma-2q}(\Omega)$ для произвольного $\sigma \in \mathbb{R}$. Нам, кроме того, нужны линейные отображения R и S, удовлетворяющие условиям д) – ж). Определим их следующим образом. Воспользуемся леммой 5.1 и рассмотрим отображение $(L^r L^{r+} + 1)^{-1}$, обратное к изоморфизму (5.5). Имеем линейный ограниченный оператор

$$(L^r L^{r+} + 1)^{-1} : H^{\sigma-4qr}(\Omega) \to H^{\sigma}(\Omega) \quad \text{при любом целом} \quad \sigma \geq 2qr. \tag{6.9}$$

Положим

$$R = L^{r-1} L^{r+} (L^r L^{r+} + 1)^{-1} \quad \text{и} \quad S = -(L^r L^{r+} + 1)^{-1}.$$

В силу (6.9) при $\sigma = 2qr$ и при $\sigma = 2q(3r-1)$ получаем ограниченные операторы

$$R\colon Z_0 = H^{-2qr}(\Omega) \to H^{2qr-2q(2r-1)}(\Omega) = X_0,$$

$$R\colon Z_1 = H^{2q(r-1)}(\Omega) \to H^{2q(3r-1)-2q(2r-1)}(\Omega) = X_1,$$

$$S\colon Z_0 = H^{-2qr}(\Omega) \to H^{2qr}(\Omega) \hookrightarrow H^{0}(\Omega) \hookrightarrow \Xi^{-2qr}(\Omega) = Y_0,$$

$$S\colon Z_1 = H^{2q(r-1)}(\Omega) \to H^{2q(3r-1)}(\Omega) \hookrightarrow H^{2qr}(\Omega) = X_1.$$

Кроме того, на $E = H^{-2qr}(\Omega)$ справедливы равества

$$TR = LL^{r-1}L^{r+}(L^r L^{r+} + 1)^{-1} = (L^r L^{r+} + 1 - 1)(L^r L^{r+} + 1)^{-1} = 1 - S.$$

Таким образом, все условия теоремы 4.1 выполняются. Согласно этой теореме для интерполяционного параметра ψ запишем

$$\big[(X_0)_{L,Y_0},\, (X_1)_{L,Y_1}\big]_{\psi} \cong (X_{\psi})_{L,Y_{\psi}}. \tag{6.10}$$

Здесь

$$(X_0)_{L,Y_0} = \Big\{u \in H^{2q(1-r)}(\Omega)\colon Lu \in \Xi^{-2qr}(\Omega)\Big\} = D_L^{2q(1-r)}(\Omega),$$

причем нормы в крайних пространствах равны. Далее, в силу ограниченности оператора $L : H^{2qr}(\Omega) \to H^{2q(r-1)}(\Omega)$ справедливо равенство

$$(X_1)_{L,Y_1} = \Big\{u \in H^{2qr}(\Omega)\colon Lu \in H^{2q(r-1)}(\Omega)\Big\} = H^{2qr}(\Omega)$$

с эквивалентностью норм в крайних пространствах. Кроме того, согласно предложению 3.1 с учетом (6.5) имеем

$$X_{\psi} = \big[H^{2q(1-r)}(\Omega),\, H^{2qr}(\Omega)\big]_{\psi} = \big[H^{s-\varepsilon}(\Omega),\, H^{s+\delta}(\Omega)\big]_{\psi} \cong H^{s,\varphi}(\Omega).$$

Таким образом, соотношение (6.10) принимает вид

$$\Big[\,D_L^{2q(1-r)}(\Omega),\, H^{2qr}(\Omega)\,\Big]_\psi \cong \big\{u\in H^{s,\varphi}(\Omega)\colon Lu\in Z(\Omega)\big\}, \tag{6.11}$$

причем в последнем пространстве рассматривается скалярное произведение графика (мы также воспользовались обозначением (6.7), согласно которому $Y_\psi = Z(\Omega)$).

Подставив теперь (6.11) в (6.8), получим, что (6.11) — это оператор

$$\Lambda = (L, B_1, \ldots, B_q)\colon\ \{u\in H^{s,\varphi}(\Omega)\colon Lu\in Z(\Omega)\}\to$$

$$\to Z(\Omega)\times\prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma) = \mathcal{Z}(\Omega,\Gamma). \tag{6.12}$$

Согласно доказанному, он ограниченный фредгольмов и имеет ядро N. Кроме того, поскольку оператор (6.12) получен с помощью интерполяции, примененной к фредгольмовым операторам (6.2) и (6.3), на основании предложений 3.2 и 5.2 область значений оператора (6.12) принимает вид

$$\mathcal{Z}(\Omega,\Gamma)\cap\Lambda\Big(\,D_L^{2q(1-r)}(\Omega)\,\Big) =$$

$$=\Bigg\{\big(f, g_1,\ldots,g_q\big)\in\mathcal{Z}(\Omega,\Gamma)\colon\ \big(\,f,\,v\,\big)_\Omega +$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\big(\,g_j,\,C_j^+\,v\big)_\Gamma = 0\quad\text{для любого}\quad v\in N^+\Bigg\}. \tag{6.13}$$

Сужение оператора (6.12) на подпространство

$$K_L^{s,\varphi}(\Omega) = \big\{\,u\in H^{s,\varphi}(\Omega)\colon L\,u = 0\ \text{ в }\ \Omega\,\big\}$$

определяет ограниченный оператор

$$B = (B_1,\ldots,B_q)\colon K_L^{s,\varphi}(\Omega)\to\prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma). \tag{6.14}$$

Его ядро равно $N\cap K_L^{s,\varphi}(\Omega) = N$ и, значит, конечномерно, а область значений в силу (6.13) совпадает с (1.7) и, следовательно, замкнута и имеет конечную коразмерность, равную размерности пространства G, определенного по формуле (1.8). Таким образом, оператор (6.14) фредгольмов с ядром N, областью значений (1.7) и конечным индексом $\dim N - \dim G$, не зависящим от s, φ.

Осталось показать, что множество $K_L^\infty(\Omega)$ плотно в $K_L^{s,\varphi}(\Omega)$ и оператор (6.14) является продолжением по непрерывности отображения (1.3). В связи с этим заметим следующее: поскольку (6.12) является продолжением отображения (5.1), в силу определения оператора (6.14) последний является продолжением отображения (1.3). Поэтому, для того чтобы завершить доказательство, надо установить плотность множества $K_L^\infty(\Omega)$ в $K_L^{s,\varphi}(\Omega)$. Выполним это с помощью топологического изоморфизма

$$B\colon K_L^{s,\varphi}(\Omega)/\,N\leftrightarrow\mathcal{R}, \tag{6.15}$$

который порожден фредгольмовым оператором (6.14). Здесь через $\mathcal{R}$ обозначена область значений (1.7) оператора (6.14). Рассмотрим изоморфизм B^{-1}, обратный к (6.15). Он каждому вектору $g = (g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{R}$ ставит в соответствие класс смежности

$$B^{-1}g = [\,u\,] = \{u + w \colon w \in N\}$$

элемента $u \in K_L^{s,\varphi}(\Omega)$ такого, что $Bu = g$.

Покажем предварительно, что (6.15) имеет следующее свойство повышения гладкости:

$$g \in \mathcal{R} \cap \big(\, C^\infty(\Gamma)\,\big)^q \ \Rightarrow\ B^{-1}g = [\,u\,] \quad \text{для некоторого} \quad u \in K_L^\infty(\Omega). \tag{6.16}$$

Пусть

$$g = (g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{R} \cap \big(\, C^\infty(\Gamma)\,\big)^q.$$

Поскольку $\mathcal{R}$ — множество (1.7), в силу предложения 5.1 эллиптическая граничная задача (1.1) имеет решение $u \in H^{2q}(\Omega)$. Правые части этой задачи бесконечно гладкие; следовательно [4, с. 191], $u \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$. Таким образом, $u \in K_L^\infty(\Omega)$ и $Bu = g$ в смысле оператора (6.14), что и доказывает (6.16).

Теперь нетрудно установить упомянутую плотность. Возьмем произвольное $u \in K_L^{s,\varphi}(\Omega)$ и по нему образуем вектор

$$g = Bu \in \mathcal{R} \subset \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma). \tag{6.17}$$

Поскольку множество $C^\infty(\Gamma)$ плотно в $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, для g существует такая последовательнось векторов $g^{(k)}$, что

$$g^{(k)} \in (\, C^\infty(\Gamma)\,)^q \quad \text{и} \quad g^{(k)} \to g \quad \text{в} \quad \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{6.18}$$

Заметим далее следующее: так как $\mathcal{R}$ и G — замкнутые подпространства в

$$\prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma), \tag{6.19}$$

удовлетворяющие условиям $\mathcal{R} \cap G = \{0\}$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R} = \dim G$, (6.19) является прямой суммой этих подпространств с ограниченными операторами проектирования на них. Из этой суммы получаем разложения

$$g = g + 0, \quad g^{(k)} = h^{(k)} + \omega^{(k)}, \quad h^{(k)} \in \mathcal{R}, \quad \omega^{(k)} \in G.$$

Отсюда и из (6.18) следуют два утверждения:

$$h^{(k)} = g^{(k)} - \omega^{(k)} \in \mathcal{R} \cap \big(\, C^\infty(\Gamma)\,\big)^q$$

$$\text{и} \quad h^{(k)} \to g \quad \text{в} \quad \mathcal{R} \quad \text{(т. е. в (6.19))} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Первое в силу (6.16) влечет $B^{-1}h^{(k)} = [\,u_k\,]$ для некоторого $u_k \in K_L^{\infty}(\Omega)$. Из второго вследствие (6.15) и (6.17) вытекает

$$[\,u_k\,] = B^{-1}h^{(k)} \to B^{-1}g = [\,u\,],$$

$$\text{т. е.} \quad [\,u_k - u\,] \to 0 \quad \text{в} \quad K_L^{s,\varphi}(\Omega)/\,N \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Последнее означает, что

$$u_k - u + w_k \to 0 \quad \text{в} \quad K_L^{s,\varphi}(\Omega) \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

для некоторой последовательности функций $w_k \in N \subset K_L^{\infty}(\Omega)$. Таким образом, произвольное $u \in K_L^{s,\varphi}(\Omega)$ аппроксимировано в $K_L^{s,\varphi}(\Omega)$ последовательностью функций $u_k + w_k \in K_L^{\infty}(\Omega)$. Значит, множество $K_L^{\infty}(\Omega)$ плотно в $K_L^{s,\varphi}(\Omega)$.

Теорема 1.1 доказана.

7. Некоторые приложения. Из теоремы 1.1 следует, что в случае тривиальности ядра N и дефектного подпространства G оператор (1.6) задачи (1.1) является топологическим изоморфизмом. В общем случае этот оператор определяет топологический изоморфизм

$$B = (B_1, \ldots, B_q) : \; K_L^{s,\varphi}(\Omega)/\,N \leftrightarrow \mathcal{R}, \quad s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}, \tag{7.1}$$

а $\mathcal{R}$ — подпространство (1.7). (Заметим, что оператор, обратный к (7.1), ограничен согласно теореме Банаха об обратном операторе.) Набор изоморфизмов (7.1) будем называть уточненным. Он дает решение задачи (1.1) для произвольных распределений $g_1, \ldots, g_q \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, удовлетворяющих условию

$$\big(g_1, C_1^+ v\big)_\Gamma + \ldots + \big(g_q, C_q^+ v\big)_\Gamma = 0 \quad \text{для любого} \quad v \in N^+.$$

При этом справедлива следующая априорная оценка решения u.

Теорема 7.1. *Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ и число $\varepsilon > 0$. Существует такое число $c > 0$, что для любого $u \in K_L^{s,\varphi}(\Omega)$ выполняется оценка*

$$\|\,u\,\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} \le c \sum_{j=1}^{q} \|\,B_j u\,\|_{H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma)} + c\,\|\,u\,\|_{H^{s-\varepsilon}(\Omega)}. \tag{7.2}$$

Доказательство. Для произвольного $u \in K_L^{s,\varphi}(\Omega)$ в силу изоморфизма (7.1) имеем

$$\inf\Big\{\,\|\,u + w\,\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} : w \in N\Big\} \le c_0 \sum_{j=1}^{q} \|\,B_j u\,\|_{H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma)}, \tag{7.3}$$

где c_0 — норма оператора, обратного к (7.1). Далее, поскольку N — конечномерное подпространство в $H^{s,\varphi}(\Omega)$ и в $H^{s-\varepsilon}(\Omega)$, нормы в этих двух пространствах эквивалентны на N. В частности, для любого $w \in N$

$$\|\,w\,\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} \le c_1 \|\,w\,\|_{H^{s-\varepsilon}(\Omega)}$$

с постоянной c_1, не зависящей от u, w. Кроме того,

$$\| w \|_{H^{s-\varepsilon}(\Omega)} \leq \| u + w \|_{H^{s-\varepsilon}(\Omega)} + \| u \|_{H^{s-\varepsilon}(\Omega)} \leq$$

$$\leq c_2 \| u + w \|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + \| u \|_{H^{s-\varepsilon}(\Omega)},$$

где c_2 — норма оператора вложения $H^{s,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\Omega)$. Следовательно,

$$\| u \|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} \leq \| u + w \|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + \| w \|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} \leq$$

$$\leq \| u + w \|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + c_1 \| w \|_{H^{s-\varepsilon}(\Omega)} \leq$$

$$\leq (1 + c_1 c_2) \| u + w \|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + c_1 \| u \|_{H^{s-\varepsilon}(\Omega)}.$$

Перейдем теперь к инфимуму по $w \in N$ и воспользуемся неравенством (7.3). В результате получим

$$\| u \|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} \leq (1 + c_1 c_2)\, c_0 \sum_{j=1}^{q} \| B_j u \|_{H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma)} + c_1 \| u \|_{H^{s-\varepsilon}(\Omega)},$$

т. е. оценку (7.2), если положить $c = \max\{(1 + c_1 c_2) c_0,\, c_1\}$, что и требовалось доказать.

Если в неравенстве (7.2) правая часть конечна, то конечна и левая часть. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.2. *Пусть* $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *и число* $\varepsilon > 0$. *Предположим, что распределение* $u \in H^{s-\varepsilon}(\Omega)$ *является решением задачи* (1.1), *в которой*

$$B_j u = g_j \in H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma) \quad \text{для каждого} \quad j = 1, \ldots, q. \tag{7.4}$$

Тогда $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$.

Доказательство. Согласно условию $u \in K_L^{s-\varepsilon,\,1}(\Omega)$ и $Bu = g$, где $g = (g_1, \ldots, g_q)$. Следовательно, в силу свойства (7.4) и теоремы 1.1 (описание области значений) справедливо

$$g \in B\big(K_L^{s-\varepsilon,\,1}(\Omega) \big) \cap \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma) = B\big(K_L^{s,\varphi}(\Omega) \big).$$

Поэтому существует $u_0 \in K_L^{s,\varphi}(\Omega)$ такое, что $Bu_0 = g$. Отсюда с учетом теоремы 1.1 (описание ядра) последовательно получаем

$$B(u - u_0) = 0, \qquad w = u - u_0 \in N \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}), \qquad u = u_0 + w \in H^{s,\varphi}(\Omega),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 7.2 — это утверждение о повышении глобальной (т. е. во всей замкнутой области $\overline{\Omega}$) гладкости решения u задачи (1.1). При этом, как видим, уточненная гладкость φ правых частей задачи наследуется в решении. Отметим (см., например, [10, с. 237]), что первое уравнение задачи (1.1) влечет $u \in C^{\infty}(\Omega)$. Поэтому в теореме 7.2 существенно то, что гладкость решения u повышается вплоть до границы области Ω.

***Следствие* 7.1.** *Пусть* $\sigma \in \mathbb{R}$. *Предположим, что распределение* $u \in H^{\sigma}(\Omega)$ *является решением задачи* (1.1), *в которой*

$$g_j \in H^{m-m_j+(n-1)/2,\varphi}(\Gamma) \quad \text{для каждого} \quad j = 1,\ldots,q, \tag{7.5}$$

где $m = \max\{m_1,\ldots,m_q\}$, *а функция* $\varphi \in \mathcal{M}$ *удовлетворяет условию* (2.2). *Тогда* u *принадлежит* $C^m(\overline{\Omega})$ *и, поскольку* u *принадлежит и* $C^\infty(\Omega)$, *является классическим решением задачи* (1.1).

Доказательство. Условие (7.5) совпадает с (7.4), если положить $s = m + n/2$. Следовательно, согласно теореме 7.2 и в силу п. г) предложения 2.1 имеем

$$u \in H^{m+n/2,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}),$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что для классического решения u левые части задачи (1.1) вычисляются с помощью классических производных, при этом $B_j u \in C(\Gamma)$.

1. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптические операторы в уточненной шкале функциональных пространств // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 5. – С. 689 – 696.
2. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. I // Там же. – 2006. – **58**, № 2. – С. 217 – 235.
3. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Там же. – № 3. – С. 352 – 370.
4. *Лионс Ж.-Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
5. *Функциональный* анализ / Под общ. ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
6. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – М.: Мир, 1986. – 456 с.
7. *Seeley R. T.* Singular integrals and boundary value problems // Amer. J. Math. – 1966. – **88**, № 4. – P. 781 – 809.
8. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Part. Different. Equat. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1 – 144.
9. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.
10. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.
11. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
12. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
13. *Шлензак Г.* Эллиптические задачи в уточненной шкале пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. – 1974. – **29**, № 4. – С. 48 – 58.
14. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Интерполяция с функциональным параметром и пространства дифференцируемых функций // Допов. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 13 – 18.
15. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – 427 p.

Получено 29.06.2006