УДК 517.956.4

М. І. Матійчук, В. М. Лучко (Чернів. нац. ун-т)

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

For linear parabolic systems with pulse effect, we establish the correctness of the Cauchy problem in normed Dini spaces.

Для лінійних параболічних систем з імпульсною дією встановлено коректність задачі Коші в нормованих просторах Діні.

Якщо реальний процес описується системою диференціальних рівнянь і підлягає імпульсній дії в різні моменти часу, то виникають математичні моделі з імпульсною дією. Задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією глибоко вивчені у працях А. М. Самойленка і О. М. Перестюка [1] та інших авторів.

З іншого боку, існує завершена теорія задачі Коші та крайових задач для рівнянь з частинними похідними параболічного типу [2 – 6]. Задачі з імпульсною дією для цих рівнянь вивчені мало.

У цій статті встановлено коректність задачі Коші для параболічних систем з імпульсною дією у максимально широких нормованих просторах Діні.

1. Постановка задачі Коші з імпульсною дією. Функція Гріна. Розглянемо в шарі $\Pi = (t_0, T) \times E_n$ параболічну систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k| \le 2b} A_k(t) D_x^k u + f(t, x) \tag{1}$$

і будемо шукати її розв'язок при $t \ne \tau_i$, який задовольняє умови

$$\begin{gathered} u|_{t=t_0} = \varphi(x), \\ \Delta_t u(t, x)|_{t=\tau_i} = B_i u(\tau_i, x) + a_i(x) \equiv \Im_i(u). \end{gathered} \tag{2}$$

Тут $A_k(t)$ — неперервні на $[t_0, T]$ квадратні матриці виміру N, f, B_i, a_i — одностовпцеві матриці, причому $a_i(x)$, $f(t, x)$ неперервні по t і абсолютно сумовні за аргументом x, B_i — сталі,

$$\Delta_t u|_{t=\tau_i} = u(t_i + 0, x) - u_i(t_i, x), \qquad u(t_i, x) = \lim_{t \to \tau_i - 0} u(t, x),$$

$t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_i < \ldots < T$ (i — скінченне число).

В образах Фур'є

$$V(t, \sigma) = F_x u(t, x) = \int_{E_n} e^{i\sigma x} u(t, x)\, dx$$

задачі (1), (2) відповідає задача з імпульсною дією і параметром $\sigma \in E_n$:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{|k| \le 2b} A_k(t)(i\sigma)^k V + \tilde{f}(t, \sigma), \qquad t \ne \tau_i, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \Delta_t V(t, \sigma)|_{t=\tau_i} = B_i V(t_i, \sigma) + \tilde{a}_i(\sigma), \\ V|_{t=t_0} = V_0(\sigma) \equiv F\varphi(x) = \tilde{\varphi}(\sigma). \end{gathered} \tag{4}$$

Для неоднорідної задачі (3), (4) розглянемо відповідну однорідну задачу

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t)(i\sigma)^k V, \quad t \ne \tau_i, \tag{5}$$

$$\Delta_t V\big|_{t=\tau_i} = B_i V(\tau_i, \sigma),$$
$$V_0(\sigma) = \tilde{\varphi}(x). \tag{6}$$

Нехай $Q(t, \tau, \sigma)$ — нормальна фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t)(i\sigma)^k Q, \qquad Q\big|_{t=\tau} = E.$$

Тоді матрицант $V(t, t_0, \sigma)$ задачі (5), (6) визначається формулою [1]

$$V(t, t_0', \sigma) = Q(t, \tau_{j+k}, \sigma)(E + B_{j+k}) \prod_{\nu=1}^{k} Q(\tau_{j+\nu}, \tau_{j+\nu-1}, \sigma) \times$$
$$\times\ (E + B_{j+\nu-1}) Q(\tau_j, t_0', \sigma), \tag{7}$$

де $\tau_{j-1} < t_0' \le \tau_j < \tau_{j+k} < t \le \tau_{j+k+1} < \ldots < T$, причому V — невироджена матриця, якщо такими є $E + B_j$.

Розв'язок задачі (5), (6) з початковою умовою $V\big|_{t=t_0} = v_0$ однозначно визначається формулою

$$v(t, \sigma) = V(t, t_0, \sigma)\, v_0(\sigma).$$

Для розв'язку неоднорідної задачі (3), (4) отримуємо зображення

$$v(t, \sigma) = V(t, t_0, \sigma)\, v_0(\sigma) + \int_{t_0}^{t} V(t, \tau, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma)\, d\tau +$$
$$+ \sum_{t_0 < \tau_i < t} V(t, \tau_i, \sigma) \tilde{a}_i(\sigma), \qquad t \ge t_0. \tag{8}$$

Якщо система рівнянь (1) рівномірно параболічна, то норма матриці $Q(t, \tau, \sigma)$ задовольняє нерівність [2]

$$\| Q(t, \tau, \sigma) \| \le C e^{-C_0 |\sigma|^{2b} (t-\tau)}.$$

Тому для матрицанта $V(t, t_0, \sigma)$ із (7) дістаємо оцінку

$$\| V(t, t_0, \sigma) \| \le C e^{-C_0 (t-\tau_{j+k}) |\sigma|^{2b}} \big\| E + B_{j+k} \big\| \times$$
$$\times \prod_{\nu=1}^{k} e^{-C_0 (\tau_{j+\nu} - \tau_{j+\nu-1}) |\sigma|^{2b}} \big\| E + B_{j+\nu-1} \big\| e^{(\tau_j - t_0) |\sigma|^{2b}}.$$

Звідси випливає нерівність

$$\| V(t, t_0, \sigma) \| \le C_k e^{-C_0 (t-t_0) |\sigma|^{2b}} \prod_{\nu=0}^{k} \| E + B_{j+\nu} \| \tag{9}$$

для $t_0 < \tau_j$, $t > \tau_{j+k}$, $\sigma \in E_n$.

Застосуємо до обох частин формули (8) обернене перетворення Фур'є і скористаємось теоремою про перетворення Фур'є згортки. В результаті будемо мати розв'язок задачі (1), (2)

$$u(t,x) \;=\; \int\limits_{E_n} G(t,t_0,x-\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \;+\; \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{E_n} G(t,\tau,x-\xi)\,f(\tau,\xi)\,d\xi \;+$$

$$+\; \sum_{t_0<\tau_i<t}\;\int\limits_{E_n} G(t,\tau_i,x-\xi)\,a_i(\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

Тут $G(t,\tau,x)$ — функція Гріна задачі (1), (2), яка визначається як обернене перетворення Фур'є матрицанта

$$G(t,\tau,x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n} e^{-i\sigma x}V(t,\tau,\sigma)\,d\sigma, \tag{11}$$

$$\Delta_t G(t,t_0,x)\big|_{t=\tau_i} \;=\; B_i G(\tau_i,t_0,x), \tag{12}$$

де $t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \ldots < \tau_{i+k} < t < T,\;\; x\in E_n$.

Теорема 1 (про коректність). *Нехай*:

1) *коефіцієнти системи* (1) *належать класу* $C(\Pi)$, *система рівномірно параболічна, тобто характеристичні корені матриці* $\sum_{|k|=2b}A_k(i\sigma)^k$ *задовольняють нерівність*

$$\operatorname{Re}\lambda(t,\sigma) \;\le\; -\,\delta|\sigma|^{2b}, \qquad \delta \;=\; \text{const} \;>\; 0, \qquad \sigma\in E_n, \qquad t\in[t_0,T];$$

2) *матриці* $(E+B_j)$ — *невироджені*, $\det\{E+B_j\}\neq 0$.

Тоді матриця Гріна $G(t,\tau,x)$ *задачі* (1), (2) *визначається як обернене перетворення Фур'є матрицанта* $V(t,\tau,\sigma)$ *формулою* (11) *і є цілою функцією аргументів* $\dfrac{x}{(t-\tau)^{1/2b}}$, *похідні якої задовольняють нерівності*

$$\left|D_x^m G(t,\tau,x)\right| \;\le\; C_m\Phi_k(B_j)(t-\tau)^{-\frac{n+|m|}{2b}}\, e^{-C\left(\frac{|x|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q},$$

де $\Phi_k(B_j) = \prod_{\nu=0}^{k}\left\|E+B_{j+\nu}\right\|$.

Розв'язок задачі (1), (2) визначається формулою (10) для будь-яких функцій $f\in C^{(\alpha)}(\Pi)$, φ, $a_i\in C(E_n)$ і справджуються оцінки

$$\left|D_x^m u(t,x)\right| \;\le\; C_m\Phi_k(B_j)\left(\sum_{i=1}^{i_0}\frac{\left[|a_i|_{C(E_n)}+|\varphi|_{C(E_n)}\right]}{t-\tau_i} + |f|_\alpha\right).$$

Якщо φ, $a_i\in C^{(2b,\omega)}(E_n)$, то $u\in C^{(2b,F)}(\Pi)$ і для норми розв'язку виконується нерівність

$$|u|_{2b+\alpha}^F \;\le\; C\Phi_k(B_j)\left(\sum_{i=1}^{i_0}|a_i|_{2b+\omega} + |\varphi|_{2b+\omega} + |f|_\alpha\right).$$

Нагадаємо, що нормою в просторі $C^{(2b,\omega)}(\Pi)$ є величина

$$|u|_{2b}^{\omega} \;=\; |u|_{2b} + \sum_{|k|\le 2b}\sup_{\Pi}\left(\frac{\left|D_x^k u(t,x) - D_\xi^k u(t,\xi)\right|}{\omega|x-\xi|}\right),$$

а $C^{(\omega)}(\Pi)$ — нормований простір Діні, якщо модуль неперервності $\omega(t)$ задовольняє умову

$$F(h) = \int_0^h \tau^{-1}\omega(\tau)d\tau < \infty, \quad h > 0.$$

2. Задача Коші для рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Розглянемо задачу Коші з імпульсними умовами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x) D_x^k u + f(t,x), \quad t \ne \tau_i, \tag{13}$$

$$u\big|_{t=t_0} = \varphi(x), \qquad \Delta_t u\big|_{t=\tau_i} = B_i u(\tau_i, x) + a_i(x), \tag{14}$$

B_i — сталі матриці, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_j < \ldots < T$.

Знаходження розв'язку задачі проводиться за допомогою методики із [5], яка базується на „заморожуванні" коефіцієнтів системи (1).

Нехай $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — довільно фіксована точка в E_n.

Запишемо тотожність

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,y) D_x^k u + F_u(t,x,y), \tag{13'}$$

де

$$F_u(t,x,y) \equiv \sum_{|k|\le 2b} \left[A_k(t,x) - A_k(t,y)\right] D_x^k u + f(t,x).$$

За умов 1, 2 теореми 1 для задачі

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,y) D_x^k u, \\ u\big|_{t=t_0} = \varphi, \qquad \Delta_t u\big|_{t=\tau_i} = B_i u(\tau_i, x) \end{gathered} \tag{15}$$

можна знайти за допомогою перетворення Фур'є матрицю Гріна

$$G(t,\tau,x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{E_n} e^{-i\sigma x} V(t,\tau,\sigma;y) d\sigma, \tag{16}$$

де $V(t, t_0, \sigma; y)$ визначається формулою (7), у якій $Q(t, \tau_j, \sigma)$ замінено на нормальну матрицю $Q(t, \tau_j, \sigma; y)$ системи з параметром

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,y)(i\sigma)^k V.$$

Система (13′) рівномірно параболічна і $A_k(t,y)$ неперервні по t рівномірно щодо y і гельдерові по y, тому $Q(t,\tau,\sigma;y)$ задовольняє нерівність [2]

$$\left|\Delta_y Q(t,\tau,\sigma+i\gamma;y)\right| \le C\omega(|\Delta y|) e^{-c_1|\sigma|^{2b}(t-\tau)+c_2|\gamma|^{2b}(t-\tau)},$$

матрицант $V(t, t_0, \sigma; y)$ також задовольняє оцінку (9) і, крім цього,

$$\left|\Delta_y V(t,t_0,\sigma;y)\right| \le C e^{-(t-t_0)|\sigma|^{2b}} \Phi_k(B_j)\omega(|\Delta y|).$$

До інтеграла (16), яким визначається матриця Гріна задачі (15), можна застосувати теорему про перетворення Фур'є цілих функцій [2]. В результаті будемо мати

$$
\begin{aligned}
\left| D_x^m G(t, t_0, x; y) \right| &\le C_m \Phi_k(B_j)(t-\tau)^{-\frac{n+|m|}{2}} e^{-c\left(\frac{|x|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q}, \\
\left| \Delta_y D_x^m G(t, t_0, x; y) \right| &\le C_m \Phi_k(B_j)\omega(|\Delta y|)(t-\tau)^{-\frac{n+|m|}{2}} e^{-c\left(\frac{|x|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Як і в праці [5], за допомогою матриці Гріна на основі формули (10) задачі (17), (14) поставимо у відповідність інтегро-диференціальне рівняння

$$
\begin{aligned}
u(t, x) = &\int_{E_n} G(t, t_0, x-\xi, y)\varphi(\xi)d\xi + \sum_{t_0<\tau_i<t} \int_{E_n} G(t, \tau_i, x-\xi, y) a_i(\xi)d\xi + \\
&+ \int_t^{t_0} d\tau \int_{E_n} G(t, \tau, x-\xi, y) F_u(\tau, \xi, y)d\xi.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Диференціюючи це співвідношення і покладаючи потім $y = x$, отримаємо систему інтегральних рівнянь щодо похідних розв'язку

$$
D_x^m u(t, x) = F_m(t, x) + \sum_{|k|\le 2b} \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{E_n} K_{mk}(t, \tau, x, \xi) D_\xi^k u(\tau, \xi)d\xi, \quad |m| \le 2b, \tag{19}
$$

де

$$
\begin{aligned}
F_m(t, x) = &\int_{E_n} \overline{D}_x^m G(t, t_0, x-\xi; x)\varphi(\xi)d\xi + \\
&+ \sum_{t_0<\tau_i<t} \int_{E_n} \overline{D}_x^m G(t, \tau, x-\xi; x) a_i(\xi)d\xi + \\
&+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{E_n} \overline{D}_x^m G(t, \tau, x-\xi; x) f(\tau, \xi)d\xi, \\
K_{me}(t, \tau, x, \xi) \equiv &\ \overline{D}_x^m G(t, \tau, x-\xi; x)[A_e(\tau, \xi) - A_e(\tau, x)].
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Операція $\overline{D}_x^m$ означає диференціювання функції $G(t, \tau, x-\xi; x)$ по третьому аргументу x.

На відміну від обмежень в теоремі 1 на функції φ та $\{a_i(x)\}$ тут будемо припускати, що вони належать класу $C^{(\omega)}(E_n)$. Ця умова забезпечить сумовність функцій $\{F_m\}$, $|m| \le 2b$, а отже, і похідних розв'язку. Дійсно, використовуючи оцінки (17), із (18) знаходимо

$$
\begin{aligned}
|F_m(t, x)| \le &\ C\Phi_k(B_j)|\varphi|_c \int_{E_n} e^{-c\left(\frac{|x-\xi|}{(t-t_0)^{1/2b}}\right)^q} (t-t_0)^{-\frac{n}{2b}} d\xi + \\
+ \sum_{i=1}^{i_0} C_0|a_i|_c \Phi_k(B_j) + C_0|f|_c\Phi_k \le &\ C\Phi_k(B_j)\left[|\varphi|_c + |f|_c + \sum_{i=1}^{i_0}|a_i|_c\right], \quad m = 0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

При $m \ne 0$, враховуючи рівність для доданків у (20)

$$
\int_{E_n} \overline{D}_x^m G(t, \tau, x-\xi; x)\varphi(\xi)d\xi = \int_{E_n} \overline{D}_x^m G[\varphi(\xi) - \varphi(x)]d\xi,
$$

дістаємо оцінку

$$|F_m(t,x)| \le C\omega\left(|t-t_0|^{1/2b}\right)(t-t_0)^{-|m|/2b}|\varphi|_\omega \Phi_k(B_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i_0} \frac{|a_i|_\omega \omega\left(\sqrt[2b]{|t-\tau_i|}\right)}{(t-\tau_i)^{|m|/2b}} + C|f|_\omega \Phi_k(B_j) \le$$

$$\le C_m\left(\sum_{i=1}^{i_0} \frac{[|a_i|_\omega + |\varphi|_\omega]\omega\left(\sqrt[2b]{t-\tau_i}\right)}{(t-\tau_i)^{|m|/2b}} + |f|_\omega\right]\Phi_k(B_j), \quad 1 \le |m| \le 2b. \tag{22}$$

Якщо $A_k \in C_x^{(\omega)}(\Pi)$, то для функцій $K_{me}(t,\tau,x,\xi)$ із (20) отримуємо нерівність

$$|K_{me}(t,\tau,x,\xi)| \le C\omega\left(\sqrt[2b]{t-\tau}\right)\Phi_k(B_j)(t-\tau)^{-\frac{n+|e|}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi))}, \quad |m|,\ |e| \le 2b. \tag{23}$$

Систему інтегральних рівнянь (19), ядро якої $K = (K_{me})$ задовольняє нерівність (23), досліджують за допомогою методики із праці [7, с. 52]. При цьому будують резольвенту

$$R(t,\tau,x,\xi) =$$

$$= K(t,\tau,x,\xi) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_\tau^t d\beta \int_{E_n} K(t,\beta,x,y)\, K^{(\nu)}(\beta,\tau,y,\xi)\,dy, \qquad K_1 \equiv K,$$

для компонент $R = (R_{ij})$ якої також справджується нерівність вигляду (23), а розв'язок системи (19) визначається формулою

$$D_x^m u(t,x) =$$

$$= F_m(t,x) + \sum_{|e|\le 2b}\int_{\tau_0}^t d\beta \int_{E_n} R_{me}(t,\beta,x,y)\, F_e(\beta,y)\,dy, \qquad |m| \le 2b. \tag{24}$$

На основі зображення розв'язку (24) і оцінок (21) – (23) можна отримати таке твердження.

Теорема 2 (про коректність). *Нехай:*

1) *коефіцієнти* $A_k(t,x)$ *визначені в шарі* $\Pi = (t_0, T]$ *і неперервні по* t, *причому* A_k *з* $|k| = 2b$ *рівномірно щодо* $x \in E_n$; *за аргументом* x *вони належать класу Діні* $C_x^{(\omega)}(\Pi)$, *а система* (13) *рівномірно параболічна;*

2) *в імпульсних умовах* (14) *матриці* $\{B_j\}$ — *сталі і такі, що* $\{E + B_j\}$ *є невиродженими.*

Якщо функції $\varphi(x)$, $\{a_i\}$, $f(t,x)$ *належать класу Діні* $C_x^{(\omega)}(\Pi)$, *то похідні розв'язку задовольняють нерівність*

$$\left|D_x^m u(t,x)\right| \le C_m \Phi_k(B_j)\left[\sum_{i=1}^{i_0} \frac{|\varphi|_\omega + |a_i|_\omega}{(t-\tau_i)^{|m|/2b}}\omega\left(\sqrt[2b]{t-\tau_i}\right) + |f|_\omega\right], \quad |m| \le 2b. \tag{25}$$

Якщо φ, $a_i \in C^{(2b+\omega)}(E_n)$, $f \in C_x^{(\omega)}(\Pi)$, *то* $u \in C^{(2b,F)}(\Pi)$ *і норма*

$$|u|_{2b}^F \le C\left(|\varphi|_{2b}^\omega + |f|_\omega + \sum_{i=1}^{i_0}|a_i|_{2b}^\omega\right)\Phi_k(B_j),$$

де $F(t) = \int_0^t \tau^{-1}\omega(\tau)\,d\tau$.

3. Фундаментальна матриця розв'язків. У цьому пункті досліджується фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші з імпульсною дією.

3.1. Випадок системи зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|\le 2b} A_k D_x^k u = A(D)u, \tag{26}$$

$$u|_{t=t_0} = \varphi(x), \qquad \Delta_t u|_{t=\tau_i} = B_i u(\tau_i, x), \quad t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_j < T, \tag{27}$$

якій в образах Фур'є відповідає задача

$$\frac{dV}{dt} = A(\sigma)V, \qquad \Delta V|_{t=\tau_i} = B_i V(\tau_i, \sigma). \tag{28}$$

Нормальна матриця системи (26) $Q(t, t_0, \sigma) = e^{A(\sigma)(t-t_0)}$.

Тому матрицант задачі (28) згідно з формулою (7) набуває вигляду

$$V(t, t_0, \sigma) = e^{A(\sigma)(t-\tau_{j+k})}(E + B_{j+k})e^{A(\sigma)(\tau_{j+k}-\tau_{j+k-1})}\ldots(E + B_j)e^{A(\sigma)(\tau_j - t_0)},$$

де

$$t_0 \le \tau_j < \ldots < \tau_{j+k} < t < \tau_{j+k+1}.$$

Якщо матриці A і B_j комутують, то $B_j e^{At} = e^{At} B_j$, а отже,

$$V(t, t_0, \sigma) = e^{A(\sigma)(t-t_0)} \prod_{j=1}^{i(t_0,t)} (E + B_j), \tag{29}$$

де $i(t_0, t)$ — число точок τ_i на проміжку $[t_0, t]$, тобто $i(t_0, t) = k$, якщо $\tau_k < t < \tau_{k+1}$. Зокрема, якщо розбиття $[t_0, t]$ точками $\tau_0 = t_0$, $\tau_1 < \ldots < \tau_k$ рівномірне, $\tau_i = \tau_1 + (i-1)h$, а $(E + B)$ — невироджена матриця, то з (29) випливає

$$V(t, t_0, \sigma) = e^{A(t-t_0)}(E + B)e^{\mathrm{Ln}(E+B)\left[\frac{t-\tau_1}{h}\right]}, \quad t > \tau_1.$$

Цю формулу запишемо у вигляді

$$V(t, t_0, \sigma) = e^{A(\sigma)(\tau_1 - t_0)}(E + B)e^{-\mathrm{Ln}(E+B)\left\{\frac{t-\tau_1}{h}\right\}} \times$$
$$\times \exp\left\{\left(A(\sigma) + \frac{1}{h}\ln(E + B)\right)(t - \tau_1)\right\}.$$

Звідси випливає, що коли власні числа $\mu_1(\sigma, h)$ матриці $A(\sigma) + \dfrac{1}{h}\ln(E + B)$ при фіксованих $\sigma \in E_n$ мають від'ємні дійсні частини, то $V(t, t_0, \sigma)$ і всі розв'язки системи (28) прямують до нуля при $t \to \infty$ незалежно від знаку власних чисел матриць $A(\sigma)$. Функція Гріна задачі (26), (27) зображується формулою

$$G(t, t_0, x) = \int_{E_n} e^{i\sigma x + (\tau_1 - t_0)A(\sigma)} e^{(A(\sigma) + h^{-1}\ln(E+B))(t-\tau_1)} d\sigma \times$$
$$\times (E + B)e^{-\ln(E+B)\left\{\frac{t-\tau_1}{h}\right\}}.$$

Нехай власні числа матриці $A(\sigma) + \dfrac{1}{h}\ln(E + B)$ задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re}\mu_1(\sigma, h) \le -\gamma, \qquad \gamma = \mathrm{const} > 0. \tag{30}$$

Система рівнянь (26) параболічна, тому

$$\operatorname{Re}\lambda(A(\sigma)) \le -\delta\,|\sigma|^{2b+\delta_1}, \quad \sigma\in E_n.$$

Якщо до інтеграла застосувати теорему про перетворення Фур'є цілих функцій [2], то будемо мати оцінку

$$|G(t,t_0,x)| \le \frac{C_0}{(\tau_1-t_0)^{n/2b}}e^{-\gamma(t-\tau_1)}e^{-c\left(\frac{|x|}{(\tau_1-t_0)^{1/2b}}\right)^q}\left\|(E+B)^{1-\left\{\frac{t-\tau_1}{h}\right\}}\right\|.$$

Умова (30) реалізується за рахунок досить малих значень h, тобто імпульсної дії в близькі моменти часу $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k$. Зокрема, для випадку одного рівняння $N=1$, очевидно, повинно бути $B\in(-1,0)$, так що

$$\operatorname{Re}\left(A(\sigma)+\frac{1}{h}\ln(E+B)\right) = -\delta|\sigma|^{2b+\delta_1}-\frac{|\ln(1-B)|}{h} \le +\delta_1-\frac{|\ln(1-B)|}{h} = -\gamma.$$

Для похідних матриці Гріна справджується нерівність

$$\left|D_x^m G(t,t_0,x)\right| \le C_m(\tau_1-t_0)^{-\frac{n+|m|}{2b}}\exp\left\{-c_1\left(\frac{|x|}{(\tau_1-t_0)^{1/2b}}\right)^q-\gamma(t-\tau_1)\right\}. \quad (31)$$

Отже, матриця Гріна та її похідні експоненціально спадають до нуля при $t\to+\infty$ (задовольняють оцінки Λ_2 [2]). Розв'язок задачі для системи (26) з умовами $u|_{t=t_0}=\varphi$, $u|_{t=\tau_i}=Bu|_{\tau_i}+a_i$ визначається формулою

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n}G(t,t_0,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi+\sum_{t_0<\tau_i<t}\int\limits_{E_n}G(t,\tau_i,x-\xi)a_i(\xi)d\xi,$$

з якої на основі нерівності (31) отримуємо оцінку про спадання розв'язку при $t\to\infty$:

$$|u(t,x)| \le C_0\left(|\varphi|_c+\sum_{t_0<\tau_i<t}|a_i|_c\right)e^{-\gamma(t-\tau_1)}.$$

3.2. Фундаментальна матриця системи зі змінними коефіцієнтами. Розв'язок задачі (13), (14) знайдено у вигляді суми інтегралів (24). Виділимо ядро оберненого оператора цієї лінійної задачі та опишемо його властивості. Якщо в формулі (24) поміняти порядок інтегрування, то дістанемо зображення похідних розв'язку

$$\begin{aligned}D_x^m u(t,x) &= \int\limits_{E_n}D_x^m Z(t,t_0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi\ +\\ &+\sum_{t_0<\tau_i<t}\int\limits_{E_n}D_x^m Z(t,\tau_i,x,\xi)a_i(\xi)d\xi\ +\\ &+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_n}D_x^m Z(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}D_x^m Z(t,t_0,x,\xi) &= \overline{D}_x^m G(t,t_0,x-\xi,x)\ +\\ &+\sum_{|e|\le 2b}\int\limits_{t_0}^t d\beta\int\limits_{E_n}R_{me}(t,\beta,x,\xi)\overline{D}_y^e G(\beta,t_0,y-\xi,y)dy.\end{aligned}$$

В останній формулі лише при умовах теореми 2 на коефіцієнти системи (13) за особливості $D_y^{2b} G(\beta, \tau_i, y-\xi, y)$ при $\beta = \tau_i \in [t_0, t)$ є розбіжними інтеграли

$$\Im(t, \tau_i, x, \xi) = \sum_{|e|=2b} \int_{\tau_i}^{t_i} d\beta \int_{E_n} R_{me}(t, \beta, x, y)\, \overline{D}_y^e G(\beta, \tau_i, y-\xi, y)\, dy,$$

де $t_i = (t - \tau_i)/2$.

Але якщо коефіцієнти $A_k(t, x)$ з $|k| = 2b$ належать класу $C_x^{(\omega_0)}(\Pi)$ з модулем $\omega_0(t)$, який задовольняє умови

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{F(\tau)}{\tau} d\tau < \infty, \qquad F(t) = \int_0^t \omega_0(\tau)\tau^{-1} d\tau < \infty,$$

то [7, с. 48]

$$\left|\Delta_y R_{me}(t, \beta, x, y)\right| \le C\Phi_k(B_j) \frac{\left[F(|\Delta y|)\, F\left(\sqrt[2b]{t-\beta} + \omega(|\Delta y|)\right)\right]}{(t-\beta)^{(n+2b)/2b}} \times$$

$$\times \left[e^{-c\rho(t, \beta, x, y+\Delta y)} + e^{-c\rho(t, \beta, x, y)}\right]. \tag{32}$$

Запишемо $\Im(t, \tau, x, \xi)$ у вигляді

$$\Im = \sum_{|e|=2b} \int_{\tau_i}^{t_i} d\beta \int_{E_n} [R_{me}(t, \beta, x, y) - R_{me}(t, \beta, x, y)] \times$$

$$\times \overline{D}_y^e G(\beta, \tau_i, y-\xi; y)\, dy + \sum_{|e|=2b} \int_{\tau_i}^{t_i} R_{me}(t, \beta, x, \xi) \int_{E_n} \left[\overline{D}_y^e G(\beta, \tau_i, y-\xi; y)\, dy \; + \right.$$

$$\left. + \; \overline{D}_y^e G(\beta, \tau_i, y-\xi; \xi)\right] dy\, d\beta.$$

Для оцінки доданків $\Im$ скористаємося нерівностями (17) і (32). В результаті отримаємо

$$|\Im(t, \tau_i, x, \xi)| \le$$

$$\le \Phi_k(B_j) \sum_{|e|=2b} \int_{\tau_i}^{t_i} d\beta \int_{E_n} \frac{e^{-c\left(\frac{|x-y|}{(t-\beta)^{1/2b}}\right)^q}}{(t-\beta)^{\frac{n+2b}{2b}}} F\left(\sqrt{t-\beta}\right) F(|y-\xi|) \frac{e^{-c\left(\frac{|y-\xi|}{(\beta-\tau_i)^{1/2b}}\right)^q}}{(\beta-\tau_i)^{\frac{n+2b}{2b}}} dy.$$

Звідси, враховуючи нерівність

$$t - \beta \ge \frac{t-\tau_i}{2}, \qquad F(|y-\xi|)e^{-\rho(\beta, \tau_i, y, \xi)} \le C_0 F\left(\sqrt[2b]{\beta-\tau_i}\right),$$

знаходимо

$$|\Im| \le C\Phi_k(B_j) F\left(\sqrt[2b]{t-\tau_i}\right)(t-\tau_i)^{\frac{n+2b}{2b}} e^{-C_1\rho(t, \tau_i, x, \xi)}, \quad 0 < c_1 < c.$$

Означення. *Фундаментальною матрицею розв'язків* (*ф. м. р.*) *задачі* (13), (14) *називається матриця* $Z(t, \tau, x, \xi) = (Z_{ij}(t, \tau, x, \xi))_{ij=1}^N$, *стовпчики якої задовольняють систему*

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{|k| \le 2b} A_k(t, x) D_x^k Z, \quad t_0 \le t \ne \tau_i,$$

та умови

$$Z(t, t_0, x, \xi)\big|_{t=t_0} = \delta(x-\xi)E,$$

E — одинична матриця, δ — функція Дірака,

$$\Delta_t Z(t, \tau, x, \xi)\big|_{t=\tau_i} = B_i Z(\tau_i, \tau, x, \xi),$$

$$t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{j+k} < \ldots < T.$$

Якщо ф. м. р. шукати у вигляді

$$Z(t, \tau, x, \xi) = G(t, \tau, x-\xi; \xi) + W(t, \tau, x, \xi), \tag{33}$$

то для W отримуємо таку задачу:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t, x) D_x^k W + \sum_{|k|\le 2b} [A_k(t, x) - A_k(t, \xi)] D_x^k G(t, \tau, x-\xi, \xi) \equiv$$

$$\equiv \sum_{|k|\le 2b} A_k(t, y) D_x^k W + F_W(t, \tau, x, \xi, y) + K(t, \tau, x, \xi),$$

$$\Delta_t W(t, \tau, x, \xi)\big|_{t=\tau_i} = B_i W\big|_{t=\tau_i}, \qquad W\big|_{t=t_0} = 0.$$

Цій задачі відповідає інтегро-диференціальне рівняння

$$W(t, t_0, x, \xi) = \int_{t_0}^{t} d\beta \int_{E_n} G(t, \beta, y-\zeta, y) K(\beta, t_0, \zeta, \xi) d\zeta +$$

$$+ \sum_{|e|\le 2b} \int_{t_0}^{t} d\beta \int_{E_n} G(t, \beta, y-\zeta, y)[A_e(\beta, \zeta) - A_e(\beta, y)] D_t^e W(\beta, t_0, \zeta, \xi) d\zeta. \tag{34}$$

Диференціюванням обох частин (34) з наступною підстановкою параметра $y = x$, як і для рівняння (18), одержуємо систему

$$D_x^m W(t, t_0, x, \xi) = \Phi_m(t, t_0, x, \xi) + \sum_{|e|\le 2b} \int_{t_0}^{t} d\beta \int_{E_n} R_{me}(t, \beta, x, \zeta) \times$$

$$\times D_\xi^e W(\beta, t_0, \zeta, \xi) d\zeta, \qquad |m| \le 2b,$$

де

$$\Phi_m = \int_{t_0}^{t_1} d\beta \int_{E_n} \overline{D}_x^m G K d\xi + \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{E_n} \overline{D}_x^m G(t, \beta, x-\zeta, x) \times$$

$$\times [K(\beta, t_0, \zeta, \xi) - K(\beta, t_0, \zeta, \xi)] d\zeta, \qquad t_1 = \frac{1}{2}(t-t_0).$$

Ядро $K(t, t_0, x, \xi)$ задовольняє нерівність (23), а його приріст допускає оцінку

$$|\Delta_x K(t, t_0, x, \xi)| \le C\Phi_k(B_j) \frac{\omega(|\Delta x|)}{(t-t_0)^{(n+2b)/2b}} \Big[e^{-c\rho(t, t_0, x+\Delta x, \xi)} + e^{-c\rho(t, t_0, x, \xi)} \Big].$$

Тому для Φ_m справджується нерівність

$$|\Phi_m(t, t_0, x, \xi)| \le C_j \int_{t_0}^{t_1} d\beta \int_{E_n} \frac{e^{-c\rho(t, \beta, x, \zeta)}}{(t-\beta)^{(n+|m|)/2b}} \frac{e^{-c\rho(\beta, t_0, \zeta, \xi)}\, \omega\big(\sqrt[2b]{\beta - t_0}\big)}{(\beta - t_0)^{(n+2b)/2b}} d\zeta +$$

$$+ C_j \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{E_n} \frac{e^{-c\rho(t, \beta, x, \zeta)}\, \omega\big(\sqrt[2b]{\beta - t_0}\big)}{(t-\beta)^{(n+|m|)/2b}} \frac{e^{-c\rho(\beta, t_0, x, \zeta)}}{(\beta - t_0)^{(n+2b)/2b}} d\zeta.$$

Звідси

$$\left|\Phi_m(t,t_0,x,\xi)\right| \le C_j\Phi_k(B_j)F\left(\sqrt[2b]{t-t_0}\right)(t-t_0)^{-(n+|m|)/2b}e^{-C_j\rho(t,t_0,x,\xi)}, \qquad (35)$$
$$|m|\le 2b, \quad 0<C<C_1.$$

Цю ж нерівність задовольняють похідні $D_x^m W(t,t_0,x,\xi)$, які при умові $A_k\in H^2$ визначаються за допомогою резольвенти (R_{ij}):

$$D_x^m W(t,t_0,x,\xi) = \Phi_m(t,t_0,x,\xi) + \sum_{|e|\le 2b}\int_{t_0}^{t} d\beta\int_{E_n} R_{me}(t,\beta,x,\zeta)\Phi_e(\beta,t_0,\zeta,\xi)\,d\zeta.$$

Теорема 3 (про фундаментальну матрицю розв'язків). *Нехай для коефіцієнтів системи* (13) *та імпульсних умов* (14) *справджуються умови* 1, 2 *теореми* 2, *тобто* $A_k\in H^1$, $\varphi\in C^{(\omega)}$, $a_i\in C^{(\omega)}$, $f\in C^{(\omega)}(\Pi)$. *Тоді розв'язок задачі однозначно зображується інтегралами Стільтьєса з мірою Бореля*

$$u(t,x) = \int_{E_n} P(t,x,t_0;d\xi)\varphi(\xi) + \sum_{t_0<\tau_i<t}\int_{E_n} P(t,x,\tau_i;d\xi)a_i(\xi) +$$
$$+ \iint_{\Pi} P(t,x,d\tau,d\xi)\varphi f(\tau,\xi).$$

Якщо $A_k\in H^2$, $\varphi\in C(E_n)$, $a_i\in C(E_n)$, $f\in C^{(\omega)}(\Pi)$, *то ф. м. р. визначається формулою* (33):

$$Z(t,\tau,x,\xi) = G(t,\tau,x-\xi,\xi) + W(t,\tau,x,\xi),$$

а розв'язком є функція

$$u(t,x) = \int_{E_n} Z(t,t_0,x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \sum_{t_0<\tau_i<t}\int_{E_n} Z(t,\tau_i,x,\xi)a_i(\xi)\,d\xi +$$
$$+ \int_0^t d\tau\int_{E_n} Z(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi,$$

причому $W(t,\tau,x,\xi)$ *в конструкції* Z *має меншу особливість*: *похідні* $D_x^m W(t,t_0,x,\xi)$ *задовольняють нерівність* (35).

1. *Самойленко А. М., Перестюк М. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 258 с.
2. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.
3. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 199 с.
4. *Ладыженская О.А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
5. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О параболических системах с непрерывными по Дини коэффициентами // Тр. сем. по функцион. анализу. – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 51 – 83.
6. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* Задача Коши для параболических систем, коэффициенты которых имеют малую гладкость // Укр. мат. журн. – 1970. – **22**, № 1. – С. 22 – 36.
7. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

Одержано 05.12.2005