УДК 517.5

С. А. Пичугов (Днепропетр. ун-т)

О ТЕОРЕМЕ ДЖЕКСОНА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

We consider the approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in metric (not normed) spaces which are generalizations of the spaces L_p, $0 < p < 1$, and L_0. In particular, we prove multi-various Jackson theorem in $L_p(\mathbb{T}^m)$, $0 < p < 1$.

Досліджується апроксимація тригонометричними поліномами періодичних функцій у метричних (ненормованих) просторах, що є узагальненням просторів L_p, $0 < p < 1$, і L_0. Зокрема, доведено багатовимірну теорему Джексона в $L_p(\mathbb{T}^m)$, $0 < p < 1$.

1. Введение. Пусть $f(x)$, $x = (x_1, \ldots , x_m) \in \mathbb{R}^m$, — действительнозначные функции m переменных, имеющие период 1 по каждой переменной; $\mathbb{T}^m = [-1/2; 1/2)^m$ — основной тор периодов; $L_0 \equiv L_0(\mathbb{T}^m)$ — множество всех таких функций, которые почти всюду на $\mathbb{T}^m$ конечны и измеримы. С помощью функции $\varphi(t) = t(1+t)^{-1}$, $t \in \mathbb{R}^1_+$, в L_0 вводится метрика

$$\rho(f,g)_0 := \int_{\mathbb{T}^m} \varphi(|f(x) - g(x)|)\, dx,$$

порождающая сходимость по мере.

Пусть, далее, для $p \in (0; \infty)$ и $b = \max(p; 1)$

$$L_p \equiv L_p(\mathbb{T}^m) = \left\{ f \in L_0(\mathbb{T}^m) \colon \|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{T}^m} |f(x)|^p\, dx \right)^{1/b} < \infty \right\}.$$

Пространства L_0 и L_p, $p \in (0; 1)$, можно включить в более общее семейство линейных метрических пространств L_ψ с интегральной метрикой.

Пусть функция $\psi \colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ является модулем непрерывности, т. е. ψ — непрерывная, неубывающая функция, и $\psi(0) = 0$, $\psi(x+y) \le \psi(x) + \psi(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^1_+$;

$$L_\psi \equiv L_\psi(\mathbb{T}^m) = \left\{ f \in L_0(\mathbb{T}^m) \colon \|f\|_\psi := \int_{\mathbb{T}^m} \psi(|f(x)|)dx < \infty \right\}.$$

Функционал $\|f\|_\psi$, вообще говоря, не удовлетворяет аксиомам нормы, но в случае строгой монотонности ψ порождает метрику $\rho(f,g)_\psi = \|f-g\|_\psi$.

Мы будем рассматривать вопросы аппроксимации функций из $L_\psi(\mathbb{T}^m)$ тригонометрическими полиномами.

Пусть $\mathbb{Z}^m$ — решетка целых чисел из $\mathbb{R}^m$, S — некоторое ограниченное центрально-симметричное тело в $\mathbb{R}^m$, RS — его гомотет с коэффициентом $R \in \mathbb{R}^1_+$,

$$T_R(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \cap RS} c_k e^{ikx}$$

— тригонометрический полином со спектром в RS, где $kx := k_1x_1 + \ldots + k_mx_m$;

$$E_R(f)_\psi := \inf_{\{c_k\}} \|f - T_R\|_\psi$$

— наилучшее приближение f такими полиномами в пространстве $L_\psi(\mathbb{T}^m)$;

$$\omega(f, h)_\psi := \sup\left\{\|\Delta_t f\|_\psi ; |t| \le h\right\}, \quad h \in \mathbb{R}^1_+,$$

— модуль непрерывности f из $L_\psi(\mathbb{T}^m)$, где $\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x)$, $|t| = \left(\sum_{j=1}^m t_j^2\right)^{1/2}$.

Неравенствами Джексона будем называть следующие соотношения (если они выполняются):

$$\sup_{R>0} \sup_{f \in L_\psi(\mathbb{T}^m) f \not\equiv \mathrm{const}} \frac{E_R(f)_\psi}{\omega(f, 1/R)_\psi} = C(m, p) < \infty. \tag{1}$$

Библиография по неравенствам Джексона обширна. Мы только отметим, что в случае $m = 1$ в пространстве непрерывных функций неравенство (1) доказал Джексон [1], а для нормированных пространств $L_p(\mathbb{T}^1)$, $p \ge 1$, — Кваде [2]. Со многими результатами по аппроксимации в этих пространствах как в случае $m = 1$, так и в случае $m > 1$, можно ознакомиться в монографиях [3 – 5], а также в статьях [6, 7].

В метрических пространствах $L_p(\mathbb{T}^1)$, $p \in (0; 1)$, неравенства Джексона доказаны независимо в работах [8, 9]. В то же время в пространстве $L_0(\mathbb{T}^1)$ неравенства Джексона невозможны; этот результат С. В. Конягина, а также дальнейшие исследования по этой задаче в пространстве L_0 см. в [10].

Что касается пространств L_ψ, отличных от L_p и L_0, то автору не известны никакие результаты относительно неравенств Джексона (1) в этих пространствах (отметим, что мы рассматриваем аппроксимацию только тригонометрическими полиномами).

В п. 2 проанализирован метод построения приближающих полиномов в пространствах $L_p(\mathbb{T}^1)$, предложенный в работе [11]. В п. 3 доказана теорема Джексона в пространствах $L_\psi(\mathbb{T}^1)$ для некоторого класса функций ψ, в п. 4 доказаны неравенства Джексона для функций многих переменных в $L_p(\mathbb{T}^m)$, $p \in (0; 1)$, и $L_\psi(\mathbb{T}^m)$ для некоторых ψ, а в п. 5 рассмотрена аппроксимация гладких функций в этих пространствах.

2. О теореме Джексона в $L_p(\mathbb{T}^1)$, $p \in (0; 1)$. Для оценки сверху наилучших приближений в нормированных пространствах L_p применяют линейные методы приближений, основанные на методах суммирования рядов Фурье.

Пусть $f(x) \in L_1(\mathbb{T}^1)$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}^1} f_k e^{2\pi i k x}$ — ее ряд Фурье, где

$$f_k = \int_{\mathbb{T}^1} f(x) e^{-2\pi i k x} dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

— коэффициенты Фурье.

Рассмотрим следующий класс методов суммирования: пусть Σ_1 — класс функций $\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, с носителями в $[-1; 1]$, которые непрерывны на $\mathbb{R}^1$, четные, и $\alpha(0) = 1$. Такие функции α будем называть суммирующими.

По функции α для каждого $n \in \mathbb{N}$ строится тригонометрический многочлен степени не выше $n-1$

$$\mathcal{K}_n(x) = \sum_{|k|<n} \alpha\left(\frac{k}{n}\right) e^{2\pi ikx}$$

со средним значением 1, который называют ядром метода суммирования $\tilde{\mathcal{L}}_n$,

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(\alpha; f, x) \equiv \tilde{\mathcal{L}}_n(f, x) := \int_{\mathbb{T}^1} f(x-t)\mathcal{K}_n(t)\,dt = \sum_{|k|<n} \alpha\left(\frac{k}{n}\right) f_k e^{2\pi ikx}. \qquad (2)$$

Кроме таких методов, определяемых сверткой с ядром, есть и другие линейные методы построения приближающих многочленов с помощью тех же ядер K_n:

$$\mathcal{L}_n(\alpha; f, x) \equiv \mathcal{L}_n(f, x) := \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \mathcal{K}_n(x - x_k) f(x_k), \qquad (3)$$

где $x_k = k/2n$.

Так как

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \mathcal{K}_n(x - x_k) = \int_{\mathbb{T}^1} \mathcal{K}_n(x)\,dx = 1,$$

то оба метода точны на константах, т. е. $\tilde{\mathcal{L}}_n(1, x) = \mathcal{L}_n(1, x) = 1$.

Методы сверток (2) оказались полезными при аппроксимации в нормированных пространствах L_p, т. е. в случае $p \geq 1$. Однако для функций, не принадлежащих L_1, операторы $\mathcal{L}_n$ не определены. Первоначально неравенство Джексона (1) в $L_p(\mathbb{T}^1)$, $p \in (0; 1)$, было доказано в [8, 9] методом промежуточного приближения функций кусочно-постоянными функциями. Позднее в [11] для построения приближающих многочленов были использованы линейные операторы (3). К анализу этого метода доказательства мы и переходим.

Для $t \in \mathbb{T}^1$ обозначим через f_t сдвиг f на параметр t:

$$f_t(x) := f(x+t).$$

Ввиду инвариантности L_p-метрики относительно сдвига очевидным образом выполняются равенства

$$E_{n-1}(f)_p = E_{n-1}(f_t)_p = \int_{\mathbb{T}^1} E_{n-1}(f_t)_p\,dt. \qquad (4)$$

Если теперь в качестве приближающих многочленов для $f_t(x)$ возьмем многочлены (3), построенные по произвольной функции $\alpha \in \Sigma_1$, то из (4) получаем

$$E_{n-1}(f)_p \leq \int_{\mathbb{T}^1} \|f_t - \mathcal{L}_n(\alpha; f_t)\|_p\,dt. \qquad (5)$$

Отметим, что функция $\mathcal{L}_n(\alpha; f, x)$ определяется значениями f в конечной системе точек, и, значит, при замене f на эквивалентную ей в $L_p(\mathbb{T}^1)$ значение $\mathcal{L}_n(\alpha; f, x)$ может существенно измениться. Однако легко видеть (и это показано в [11]), что правая часть (5) уже не зависит от выбора конкретной функции f из класса эквивалентных функций.

Лемма 1. *Пусть $p \in (0; 1)$, α — произвольная суммирующая функция из класса Σ_1. Тогда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^1)$ и всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства*

$$\int_{\mathbb{T}^1} \| f_t - \mathcal{L}_n(\alpha; f_t) \|_p \, dt \ \le\ (2n)^{1-p} \int_{\mathbb{T}^1} |\mathcal{K}_n(t)|^p \| \Delta_t f \|_p \, dt . \tag{6}$$

Теперь допустим, что удалось выбрать ядра $\mathcal{K}_n$ так, что с некоторой константой $C(p)$ для всех $f \in L_p(\mathbb{T}^1)$ и всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$(2n)^{1-p} \int_{\mathbb{T}^1} |\mathcal{K}_n(t)|^p \| \Delta_t f \|_p \, dt \ \le\ C(p)\, \omega(f, 1/n)_p. \tag{7}$$

Тогда из (5) – (7) будет следовать неравенство Джексона (1).

Соотношения (6) и (7) для конкретных ядер $\mathcal{K}_n$ были доказаны в [11]. В частности, там показано, что эти ядра можно выбирать из семейства известных положительных ядер Джексона. Однако выбор конкретного ядра зависел от фиксированного значения p. Оставалось неясным, во-первых, как строить при каждом фиксированном p „хорошие" ядра для неравенства (7), а во-вторых, существуют ли „хорошие" ядра сразу для всех p. К решению этих задач мы и переходим.

Сначала для полноты изложения приведем доказательство леммы 1. При этом мы по существу повторим рассуждения, приведенные в [11] для конкретных положительных ядер.

***Доказательство леммы* 1.** Ввиду точности метода $\mathcal{L}_n$ на константах

$$f_t(x) - \mathcal{L}_n(f_t, x) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \mathcal{K}_n(x - x_k) \big(f_t(x) - f_t(x_k) \big),$$

и из полуаддитивности функции $|u|^p$ при $p \in (0;1)$ следует

$$|f_t(x) - \mathcal{L}_n(f_t, x)|^p \ \le\ (2n)^{-p} \sum_{k=1}^{2n} |\mathcal{K}_n(x - x_k)|^p |f_t(x) - f_t(x_k)|^p .$$

Отсюда получаем (6):

$$\int_{\mathbb{T}^1} \| f_t - \mathcal{L}_n(f_t) \|_p \, dt \ \le\ (2n)^{-p} \sum_{k=1}^{2n} \int_{\mathbb{T}^1} |\mathcal{K}_n(x - x_k)|^p \int_{\mathbb{T}^1} |f(t+x) - f(t+x_k)|^p \, dt\, dx \ =$$

$$= \ (2n)^{-p} \sum_{k=1}^{2n} \int_{\mathbb{T}^1} |\mathcal{K}_n(x - x_k)|^p \left\| \Delta_{x - x_k} f \right\|_p dx \ =\ (2n)^{1-p} \int_{\mathbb{T}^1} |\mathcal{K}_n(t)|^p \| \Delta_t f \|_p \, dt .$$

Мы два раза использовали инвариантность по сдвигу интегралов по периоду от периодических функций.

Лемма 1 доказана.

Найдем теперь достаточные условия для функций α из Σ_1, гарантирующие выполнение (7). Основным средством будет формула суммирования Пуассона.

Для заданной функции $\alpha \in \Sigma_1$ вычислим ее преобразование Фурье

$$\hat{\alpha}(x) \ =\ \int_{\mathbb{R}^1} \alpha(t) e^{2\pi i t x} \, dt, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

положим

$$\hat{\alpha}_n(x) \ :=\ n \hat{\alpha}(nx)$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}_n(x - k). \tag{8}$$

Если для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}^1$ выполнено неравенство

$$|\hat{\alpha}(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^{1/2+\varepsilon}} \tag{9}$$

с некоторой константой C, то ряд (8) сходится, и в соответствии с формулой суммирования Пуассона [12] выполнено равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}_n(x-k) = \sum_{|k|<n} \alpha\left(\frac{k}{n}\right) e^{2\pi i k x} \left(= \mathcal{K}_n(x)\right). \tag{10}$$

Лемма 2. *Пусть* $p \in (0;1)$, *а функция* α *из* Σ_1 *для всех* $x \in \mathbb{R}^1$ *удовлетворяет условию*

$$|\hat{\alpha}(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{p}(1/2+\varepsilon)}} \tag{11}$$

при некоторых C *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда для любой* $g \in L_1(\mathbb{T}^1)$, $g \geq 0$, *выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbb{T}^1} |\mathcal{K}_n(x)|^p g(x)\,dx \leq n^{p-1} \int_{\mathbb{R}^1} |\hat{\alpha}(x)|^p g\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

Доказательство. Сравнивая (11) и (9), видим, что выполнено (10). Следовательно,

$$|\mathcal{K}_n(x)|^p \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\alpha}_n(x-k)|^p.$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{T}^1} |\mathcal{K}_n(x)|^p g(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{T}^1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\alpha}_n(x-k)|^p g(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{T}^1+k} |\hat{\alpha}_n(x)|^p g(x+k)\,dx = \int_{\mathbb{R}^1} |\hat{\alpha}_n(x)|^p g(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} |n\hat{\alpha}(nx)|^p g(x)\,dx = n^{p-1} \int_{\mathbb{R}^1} |\hat{\alpha}(x)|^p g\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

Сходимость последнего интеграла следует из (11).

***Следствие* 1.** *В условиях леммы* 2

$$\int_{\mathbb{T}^1} |\mathcal{K}_n(x)|^p \|\Delta_x f\|_p\,dx \leq n^{p-1} \int_{\mathbb{R}^1} |\hat{\alpha}(x)|^p \left\|\Delta_{\frac{x}{n}} f\right\|_p dx. \tag{12}$$

В следующей теореме сформулирован основной результат для пространств $L_p(\mathbb{T}^1)$.

Теорема 1. *Пусть* $p \in (0;1)$, *а суммирующая функция* α *из* Σ_1 *удовлетворяет условию: при некоторых* C *и* $\varepsilon > 0$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^1$ *выполнено неравенство*

$$|\hat{\alpha}(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^{(1+\varepsilon)/p}}. \tag{13}$$

Тогда для любой $f \in L_p(\mathbb{T}^1)$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство Джексона*

$$E_{n-1}(f)_p \le \int_{\mathbb{T}^1} \|f_t - \mathcal{L}_n(\alpha; f_t)\|_p \, dt \le 2C_1(p)\, \omega\left(f, \frac{C_2(p)}{n}\right)_p, \tag{14}$$

где

$$C_1(p) = 2^{1-p} \|\hat{\alpha}\|_{L_p(\mathbb{R}^1)} < \infty, \quad C_2(p) = \|\hat{\alpha}\|^{-1}_{L_p(\mathbb{R}^1)} \int_{\mathbb{R}^1} |x| |\hat{\alpha}(x)|^p \, dx < \infty,$$

а $\mathcal{L}_n(\alpha; f)$ *определены соотношениями* (3).

Доказательство. Условие (13) гарантирует конечность констант $C_1(p)$ и $C_2(p)$. Так как оно сильнее условия (11), то из лемм 1 и 2 следует

$$\int_{\mathbb{T}^1} \|f_t - \mathcal{L}_n(\alpha; f_t)\|_p \, dt \le 2^{1-p} \int_{\mathbb{R}^1} |\hat{\alpha}(x)|^p \, \omega\left(f, \frac{|x|}{n}\right)_p dx. \tag{15}$$

Через $\overline{\omega}(f, h)_p$ обозначим наименьшую выпуклую вверх мажоранту функции $\omega(f, h)_p$. Из леммы С. Б. Стечкина (см., например, [4]), справедливой для любой функции типа модуля непрерывности, получаем, что для всех $h \in \mathbb{R}^1_+$

$$\overline{\omega}(f, h)_p \le 2\omega(f, h)_p. \tag{16}$$

К правой части (15) применим последовательно очевидное неравенство $\omega(f, h)_p \le \overline{\omega}(f, h)_p$, неравенство Иенсена для вогнутой функции $\overline{\omega}$ в интегральной форме, неравенство (16) и получим (14). Теорема 1 доказана.

Как известно, для выполнения условия (13) достаточно наличия определенной гладкости α. В частности, если $\alpha \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}^1)$, то для всех $k \in \mathbb{N}$ $|x|^{-k} |\hat{\alpha}(x)| = o(|x|)$ при $x \to \infty$. Это условие позволяет указать единый метод приближения вида (3) сразу для всех $p \in (0; 1)$.

***Следствие* 2.** *Если* $\alpha \in \Sigma_1 \cap \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}^1)$, *то для соответствующих операторов* $\mathcal{L}_n(\alpha; f)$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $f \in L_p(\mathbb{T}^1)$ *неравенства Джексона* (14) *справедливы сразу для всех* $p \in (0; 1)$.

3. О теореме Джексона в $L_\psi(\mathbb{T}^1)$. Можно ли описать множество строго монотонных модулей непрерывности ψ, для которых в соответствующих пространствах L_ψ выполняются неравенства Джексона?

В этом направлении мы можем доказать лишь следующий частный результат.

Теорема 2. *Пусть строго монотонный модуль непрерывности* ψ *имеет следующие свойства*:

1) ψ — *полумультипликативная функция, т. е.*

$$\exists M: \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^1_+ \quad \psi(x \cdot y) \le M \psi(x) \psi(y);$$

2) *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$\int_0^1 \frac{\psi(t)}{t^{1+\varepsilon}} dt < \infty.$$

Тогда в пространстве $L_\psi(\mathbb{T}^1)$ *выполняются неравенства Джексона в следующей форме: существует константа* K *такая, что при всех* $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{f\in L_\psi(\mathbb{T}^1) f\not\equiv\mathrm{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega(f,1/n)_\psi} \le K.$$

Доказательство. По существу эта теорема получается в результате анализа метода доказательства теоремы 1.

Пусть $\alpha\in\Sigma_1\bigcap C^\infty(\mathbb{R}^1)$, тогда

$$E_{n-1}(f)_\psi = \int_{\mathbb{T}^1} E_{n-1}(f_t)_\psi\, dt \le \int_{\mathbb{T}^1}\left\| f_t(x)-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\mathcal{K}_n(x-x_k)}{2n} f_t(x_k)\right\|_\psi dt =$$
$$= \int_{x\in\mathbb{T}}\int_{t\in\mathbb{T}} \psi\left(\left| f_t(x)-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\mathcal{K}_n(x-x_k)}{2n} f_t(x_k)\right|\right) dt\,dx.$$

Из полуаддитивности ψ и свойства 1 следует

$$\psi\left(\left| f_t(x)-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\mathcal{K}_n(x-x_k)}{2n} f_t(x_k)\right|\right) \le \psi\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{|\mathcal{K}_n(x-x_k)|}{2n}| f_t(x)-f_t(x_k)|\right) \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{2n}\psi\left(\frac{|\mathcal{K}_n(x-x_k)|}{2n}| f_t(x)-f_t(x_k)|\right) \le M\sum_{k=1}^{2n}\psi\left(\frac{|\mathcal{K}_n(x-x_k)|}{2n}\right)\psi(| f_t(x)-f_t(x_k)|).$$

Следовательно,

$$E_{n-1}(f)_\psi \le \int_{x\in\mathbb{T}}\int_{t\in\mathbb{T}} M\sum_{k=1}^{2n}\psi\left(\frac{|\mathcal{K}_n(x-x_k)|}{2n}\right)\psi(| f_t(x)-f_t(x_k)|)\,dt\,dx =$$
$$= M\sum_{k=1}^{2n}\int_{\mathbb{T}}\psi\left(\frac{|\mathcal{K}_n(x-x_k)|}{2n}\right)\|\Delta_{x-x_k} f\|_\psi dx = M2n\int_{\mathbb{T}}\psi\left(\frac{|\mathcal{K}_n(t)|}{2n}\right)\|\Delta_t f\|_\psi dt.$$

Далее используем формулу суммирования Пуассона и полуаддитивность ψ:

$$\psi\left(\frac{|\mathcal{K}_n(t)|}{2n}\right) = \psi\left(\frac{1}{2n}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat\alpha_n(t-k)\right|\right) \le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi\left(\frac{|\hat\alpha_n(t-k)|}{2n}\right).$$

Учитывая, что $\hat\alpha_n(x)=n\hat\alpha(nx)$, получаем

$$E_{n-1}(f)_\psi \le M2n\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{T}}\psi\left(\frac{|\hat\alpha_n(t-k)|}{2n}\right)\|\Delta_t f\|_\psi dt =$$
$$= M2n\int_{\mathbb{R}^1}\psi\left(\frac{|\hat\alpha_n(x)|}{2n}\right)\|\Delta_x f\|_\psi dx = 2M\int_{\mathbb{R}^1}\psi\left(\frac{1}{2}|\hat\alpha_n(x)|\right)\|\Delta_{x/n} f\|_\psi dx \le$$
$$\le 2M\int_{\mathbb{R}^1}\psi\left(\frac{1}{2}|\hat\alpha_n(x)|\right)\overline{\omega}\left(f,\frac{|x|}{n}\right)_\psi dx \le 2MC_1\overline{\omega}\left(f,\frac{C_2}{n}\right)_\psi,$$

где

$$C_1=\int_{\mathbb{R}^1}\psi\left(\frac{1}{2}|\hat\alpha(x)|\right)dx, \qquad C_2 = C_1^{-1}\int_{\mathbb{R}^1}|x|\,\psi\left(\frac{1}{2}|\hat\alpha(x)|\right)dx.$$

На последнем этапе мы применили неравенство Иенсена для выпуклой вверх функции $\overline{\omega}$. Нам осталось убедиться в том, что константы C_1 и C_2 конечны. Очевидно, для этого достаточно показать, что

$$I := \int_{\mathbb{R}^1}(1+|x|)\,\psi(|\hat\alpha(x)|)\,dx < \infty.$$

Поскольку $\alpha \in \mathbb{C}^\infty$, то для произвольного $\zeta \in \mathbb{R}^1_+$ существует константа C_ζ такая, что для каждого $x \in \mathbb{R}^1$

$$|\hat{\alpha}(x)| \le \frac{C_\zeta}{(1+|x|)^\zeta}.$$

Тогда

$$I \le 2\int_0^\infty (1+x)\,\psi\left(\frac{C_\zeta}{(1+|x|)^\zeta}\right)dx = 2\int_1^\infty y\,\psi\left(\frac{C_\zeta}{y^\zeta}\right)dy = \frac{2}{\zeta}\int_0^1 \frac{\psi(C_\zeta t)}{t^{1+2/\zeta}}\,dt,$$

и последний интеграл конечен в силу условия 2 на функцию ψ. Теорема 2 доказана.

Приведем пример функций ψ (отличных от степенной), удовлетворяющих условиям теоремы.

Пусть $\psi_{p,\alpha}(t) = t^p(1+\ln^+ t)^\alpha$, $t \ge 0$, $p \in (0;1)$, $\alpha \in [0;1]$. Легко видеть, что функция $g(t) = 1+\ln^+ t$ удовлетворяет неравенству $g(xy) \le g(x)g(y)$. Отсюда следует полумультипликативность $\psi_{p,\alpha}$. Очевидно, что $\psi_{p,\alpha}(0) = 0$, и $\psi_{p,\alpha}$ не убывает. Для полуаддитивности функции $\psi_{p,\alpha}$ достаточно, чтобы она была выпуклой вверх. Простые вычисления показывают, что неравенство $\psi''_{p,\alpha} \le \le 0$ при всех t гарантируется при $p \le 1/2$ для всех $\alpha \in [0;1]$, а при $p \in \in (1/2;1)$ — для достаточно малых α.

Осталось проверить условие 2. Но поскольку

$$\int_0^1 \frac{\psi_{p,\alpha}(t)}{t^{1+\varepsilon}}\,dt = \int_0^1 \frac{t^p}{t^{1+\varepsilon}}\,dt,$$

то оно очевидно выполнено при любом $\varepsilon \in (0;p)$.

4. Теорема Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{T}^m)$, $p \in (0;1)$, и $L_\psi(\mathbb{T}^m)$ в случае $m > 1$. Пусть для данного спектра $\mathcal{S}$ класс суммирующих функций $\Sigma_m(\mathcal{S})$ состоит из функций $\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, таких, что:

1) $\operatorname{supp}\alpha \subset \mathcal{S}$;
2) $\alpha \in C(\mathbb{R}^m)$;
3) $\alpha(-x) = \alpha(x)$;
4) $\alpha(0) = 1$.

Каждой такой функции α при всех $R \in \mathbb{R}^1_+$ соответствует тригонометрический полином

$$\mathcal{K}_R(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \cap R\mathcal{S}} \alpha\left(\frac{k}{R}\right) e^{2\pi i k x},$$

который будем называть ядром.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ все возможные содержащие $\mathcal{S}$ параллелепипеды вида

$$\prod_{j=1}^m [-N_j, N_j], \quad N_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{17}$$

и их пересечение. В результате также получим некоторый параллелепипед $\Pi_N(\mathcal{S})$, $N = (N_1, \ldots, N_m)$, вида (17). Для данного $R \in \mathbb{N}$ и функции $f \in \in L_\psi(\mathbb{T}^m)$ определим операторы $\mathcal{L}_R$ равенством

$$\mathcal{L}_R(\alpha; f, x) \equiv \mathcal{L}_R(f, x) := \frac{1}{(2R)^m \prod_{j=1}^m N_j} \sum_{j \in \mathbb{Z}^m \cap (\prod_{j=1}^m [1, 2RN_j])} \mathcal{K}_R(x - x^j)\, f(x^j), \tag{18}$$

где точки x^j из $[0;1]^m$ имеют вид $x^j = (j_1/2RN_1, j_2/2RN_2, \ldots, j_m/2RN_m)$, а числа $N_1, \ldots, N_m$ определяются параллелепипедом $\Pi_N(\mathcal{S})$. При таком выборе точек x^j выполнено равенство

$$\frac{1}{(2R)^m \prod_{j=1}^m N_j} \sum_{j \in \mathbb{Z}^m \cap (\prod_{j=1}^m [1, 2RN_j])} \mathcal{K}_R(x - x^j) = 1$$

для любого полинома со спектром в $R\Pi_N(\mathcal{S})$. Поэтому операторы $\mathcal{L}_R$ (18) являются многомерным аналогом операторов (3), и исследование приближений с помощью операторов (18) будет аналогично одномерному случаю.

Теорема 3. *Пусть $p \in (0;1)$, а суммирующая функция α из Σ_1 такова, что при некоторых $C > 0$, $\varepsilon > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$ выполняется условие*

$$|\hat{\alpha}(x)| \le \frac{C}{(1 + x^2)^{\frac{1}{p}((m+1)/2 + \varepsilon)}}.$$

Тогда для любой $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ при всех $R \in \mathbb{R}^1_+$ справедливо неравенство Джексона

$$E_R(f)_p \le \int_{\mathbb{T}^m} \|f_t - \mathcal{L}_R(\alpha; f_t)\|_p\, dt \le 2C_1(m, p)\, \omega\left(f, \frac{C_2(m, p)}{R}\right)_p, \tag{19}$$

где

$$C_1(m, p) = \left(\prod_{j=1}^m 2N_j\right)^{1-p} \|\hat{\alpha}\|_{L_p(\mathbb{T}^m)} < \infty,$$

$$C_2(m, p) = \|\hat{\alpha}\|^{-1}_{L_p(\mathbb{T}^m)} \int_{\mathbb{R}^m} |x|\, |\hat{\alpha}(x)|^p\, dx < \infty,$$

а $\mathcal{L}_R(\alpha; f)$ определены равенством (18).

Доказательство. Отметим нужные нам факты.

1. Справедлив аналог леммы 1: поскольку

$$|f_t(x) - \mathcal{L}_R(\alpha; f_t, x)|^p \le \left((2R)^m \prod_{j=1}^m N_j\right)^{-p} \left|\mathcal{K}_R(x - x^j)\right|^p \left|f_t(x) - f_t(x^j)\right|^p,$$

то для произвольной α из $\Sigma_m(\mathcal{S})$ выполняется оценка

$$E_R(f)_p \le \int_{\mathbb{T}^m} E_R(f_t)_p\, dt \le \int_{\mathbb{T}^m} \|f_t - \mathcal{L}_R(\alpha; f_t)\|_p\, dt \le$$

$$\le \left((2R)^m \prod_{j=1}^m N_j\right)^{-p} \sum_{j \in \mathbb{Z}^m \cap (\prod_{j=1}^m [1, 2RN_j])} \int_{\mathbb{T}^m} \left|\mathcal{K}_R(x - x^j)\right|^p \int_{\mathbb{T}^m} \left|f(t + x) - f(t + x^j)\right|^p dt\, dx =$$

$$= (2R)^{m(1-p)} \left(\prod_{j=1}^m N_j\right)^{1-p} \int_{\mathbb{T}^m} |\mathcal{K}_R(x)|^p \|\Delta_x f\|_p\, dx. \tag{20}$$

2. Пусть $\alpha \in \Sigma_m(S)$,

$$\hat{\alpha}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \alpha(u)\, e^{2\pi i u x}\, du$$

— ее преобразование Фурье,

$$\hat{\alpha}_R(x) := R^m \hat{\alpha}(Rx).$$

Если для некоторых C и $\varepsilon > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$|\hat{\alpha}(x)| \le \frac{C}{(1+x^2)^{m/2+\varepsilon}},$$

то применима формула суммирования Пуассона (см., например, [12]):

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{\alpha}_R(x-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \alpha\left(\frac{k}{R}\right) e^{2\pi i k x} \quad (= \mathcal{K}_R(x)).$$

3. Если для некоторых C и $\varepsilon > 0$

$$|\hat{\alpha}(x)| \le \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{p}(m/2+\varepsilon)}},$$

то для любой $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ при всех $R \in \mathbb{R}^1_+$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}^m} |\mathcal{K}_R(x)|^p \|\Delta_x f\|_p\, dx \le R^{m(p-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\hat{\alpha}(x)|^p \|\Delta_{x/R} f\|_p\, dx. \tag{21}$$

Действительно,

$$\int\limits_{\mathbb{T}^m} |\mathcal{K}_R(x)|^p \|\Delta_x f\|_p\, dx = \int\limits_{\mathbb{T}^m} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{\alpha}_R(x-k) \right|^p \|\Delta_x f\|_p\, dx \le$$

$$\le \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \int\limits_{\mathbb{T}^m} |\hat{\alpha}_R(x-k)|^p \|\Delta_x f\|_p\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\hat{\alpha}_R(x)|^p \|\Delta_x f\|_p\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left| R^m \hat{\alpha}(Rx) \right|^p \|\Delta_x f\|_p\, dx = R^{mp-m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\hat{\alpha}(x)|^p \|\Delta_{x/R} f\|_p\, dx,$$

и конечность последнего интеграла гарантируется условием на функцию $\hat{\alpha}$.

4. Если при некоторых C и $\varepsilon > 0$

$$|\hat{\alpha}(x)| \le \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{p}((m+1)/2+\varepsilon)}}, \tag{22}$$

то выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} |\hat{\alpha}(x)|^p \,\overline{\omega}\left(f, \frac{|x|}{R}\right)_p dx \le \|\hat{\alpha}\|_p \,\overline{\omega}\left(f, \frac{1}{R} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |x| |\hat{\alpha}(x)|^p\, dx}{\|\hat{\alpha}\|_p}\right)_p. \tag{23}$$

Это вытекает из неравенства Иенсена для вогнутой функции $\overline{\omega}(f,t)_p$. При этом из (22) следует $\|\hat{\alpha}\|_p < \infty$, $\int\limits_{\mathbb{R}^m} |x| |\hat{\alpha}(x)|^p\, dx < \infty$.

Теперь из (20), (21) и (23) следует утверждение теоремы.

***Следствие* 3.** *Если* $\alpha \in \Sigma_m(S) \cap C^\infty(\mathbb{R}^m)$, *то для соответствующих* *операторов* $\mathcal{L}_R(\alpha; f)$ *при* $R \in \mathbb{R}^1_+$ *и* $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ *неравенства Джексона* (19) *справедливы сразу для всех* $p \in (0; 1)$.

Аналогично доказывается и следующее обобщение теоремы 2 на многомерный случай.

Теорема 4. *Пусть строго монотонный модуль непрерывности* $\psi : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ *имеет свойства*:

1) $\psi(xy) \le M\psi(x)\psi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^1_+$;

2) *существует* $\zeta > m$ *такое, что*

$$\int_0^1 \frac{\psi(t)}{t^{1+(m+1)/\zeta}}\,dt < \infty. \tag{24}$$

Тогда для любой суммирующей функции $\alpha \in \Sigma_m(S)$ *такой, что для всех* $x \in \in \mathbb{R}^m$

$$|\hat{\alpha}(x)| \le \frac{C_\zeta}{(1+x^2)^{\zeta/2}}, \tag{25}$$

для всех $f \in L_\psi(\mathbb{T}^m)$ *и* $R \in \mathbb{R}^1_+$ *справедливы неравенства*

$$E_R(f)_\psi \le \int_{\mathbb{T}^m} \|f_t - \mathcal{L}_R(\alpha; f_t)\|_\psi\,dt \le M\prod_{j=1}^m (2N_j)\,C_1(m;\psi)\,\overline{\omega}\left(f; \frac{C_2(m;\psi)}{R}\right)_\psi,$$

где

$$C_1(m;\psi) = \int_{\mathbb{R}^m} \psi\left(\frac{|\hat{\alpha}(x)|}{\prod_{j=1}^m (2N_j)}\right)dx,$$

$$C_2(m;\psi) = C_1^{-1}(m;\psi)\int_{\mathbb{R}^m} |x|\,\psi\left(\frac{|\hat{\alpha}(x)|}{\prod_{j=1}^m (2N_j)}\right)dx.$$

Ограничимся только некоторыми комментариями.

1. Условие $\zeta > m$ дает возможность применять формулу Пуассона.

2. Для конечности констант $C_i(m;\psi)$, $i = 1, 2$, достаточно показать, что

$$\int_{\mathbb{R}^m} (1+|x|)\,\psi(|\hat{\alpha}(x)|) < \infty,$$

а это следует из (25) и (24).

3. Неравенства Джексона справедливы, в частности, в пространствах $L_p(1+\ln^+ L)^\alpha(\mathbb{T}^m)$, $p \in (0;1)$, определяемых функциями $\psi_{p,\alpha}(t) = t^p(1+\ln^+ t)^\alpha$, при всех $\alpha \in [0;1]$, если $p \le 1/2$, и при достаточно малых α, если $p > 1/2$.

5. О второй теореме Джексона. Для данного натурального r в пространстве $L_\psi(\mathbb{T}^1)$ выделим множество r раз дифференцируемых функций $L^r_\psi(\mathbb{T}^1)$,

$$L^r_\psi(\mathbb{T}^1) := \{f \in L_\psi(\mathbb{T}^1) : f^{(r-1)} \text{— абсолютно непрерывна, } f^{(r)} \in L_\psi(\mathbb{T}^1)\},$$

и для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим вопрос о конечности величин

$$C_r(n; L_\psi) := \sup_{f \in L^r_\psi(\mathbb{T}^1)\ f \not\equiv \mathrm{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega\left(f^{(r)}, \alpha_n\right)_\psi}$$

при каком-либо значении α_n.

Соотношения вида $C_r(n; L_\psi) < \infty$ называют второй теоремой Джексона. Покажем, что если функция ψ возрастает на бесконечности недостаточно быстро, то в пространстве L_ψ вторая теорема Джексона неверна.

Теорема 5. *Пусть строго монотонный модуль непрерывности* $\psi : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t} = 0. \tag{26}$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ *и при любом выборе* α_n *имеет место соотношение*

$$\sup_{f\in L^1_\psi(\mathbb{T}^1)\ f\not\equiv\mathrm{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega(f', \alpha_n)_\psi} = \infty. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $g(x) = \operatorname{sign} x$ для $|x| \le 1/2$ и $g(x+1) = g(x)$,

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} g(x+u)\,du$$

— усреднение по Стеклову функции g с малым шагом $\varepsilon > 0$. Тогда при любом значении α_n

$$\omega(g'_\varepsilon, \alpha_n)_\psi \le 2\|g'_\varepsilon\|_\psi = 8\int_0^{\varepsilon/2} \psi\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)dx = 8\frac{\varepsilon}{2}\psi\left(\frac{2}{\varepsilon}\right). \tag{28}$$

С другой стороны, так как функция g не является полиномом, то при любом n $E_{n-1}(g)_\psi > 0$ и, значит,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_{n-1}(g_\varepsilon)_\psi > 0. \tag{29}$$

Теперь из (26), (28) и (29) следует (27). Отметим, что для пространств $L_p(\mathbb{T}^1)$, $p \in (0; 1)$, соотношение (27) было известно.

1. *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Functionen durch ganze rationale Functionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. – Dissertation. – Göttingen, 1911. – 98 S.
2. *Quade E.* Trigonometric approximation in the mean // Duke Math. J. – 1937. – **3**. – P. 37 – 49.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближений функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
5. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
6. *Юдин В. А.* Многомерная теорема Джексона // Мат. заметки. – 1976. – **20**, № 3. – С. 439 – 444.
7. *Темляков В. Н.* О приближении функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 518 – 524.
8. *Стороженко Э. А., Освальд П., Кротов В. Г.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395 – 415.
9. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Мат. заметки. – 1975. – **16**, № 5. – С. 641 – 658.
10. *Kornienko A. A.* On the Jackson theorem in the space with convergence in measure // E. J. Approxim. – 1998. – **4**, № 1. – P. 15 – 24.
11. *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1994. – **185**, № 8. – С. 81 – 102.
12. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 330 с.

Получено 12.10.99