УДК 519.65

М. О. Назаренко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ІЗОГЕОМЕТРИЧНЕ СПЛАЙН-ВІДНОВЛЕННЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ

Conditions of isogeometric restoration of plane curves by means of parametric parabolic and cubic splines of minimal defect are obtained.

Отримані умови ізогеометричного відновлення плоских кривих за допомогою параметричних параболічних та кубічних сплайнів мінімального дефекту.

Останнім часом з'явилося багато робіт, присвячених вивченню різних аспектів апроксимації, що пов'язані з успадкуванням геометричної структури вихідних даних (монотонність, опуклість і т. п.) (див., наприклад, роботи [1 – 5] та наведену в них бібліографію). Як правило, при використанні дискретної інформації будуються апроксимаційні процеси інтерполяційного типу. При цьому збереження геометричних властивостей встановлюється лише при додаткових досить жорстких умовах [3 – 5].

Значне місце в обчислювальній геометрії та її застосуваннях займає задача конструювання кривих та поверхонь [2, 4]. При цьому досить часто виникає задача відновлення вихідних даних: дано впорядковану множину опорних точок $\{(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})\}$, $i = 0, 1, \ldots, N$, евклідового простору R^n, $n \geq 2$; треба провести через них гладку криву чи поверхню, яка задовольняє деякі умови кількісного чи якісного характеру. Кількісні умови, як правило, формулюються у вигляді вимог мінімізації деяких функціоналів, а якісні часто зводяться до умов про успадкування геометричної структури вихідних даних. Відновлення об'єктів зі збереженням геометричної структури вихідних даних будемо називати, згідно з [3], ізогеометричним відновленням.

Відомо (див., наприклад, [2, 4, 5]), що при розв'язуванні цієї задачі найбільш зручним є параметричне зображення відновлюваних об'єктів, а саме, подання цих об'єктів за допомогою вектор-функцій. Таким чином, вихідна задача відновлення дискретних даних перетворюється в задачу знаходження компонент векторних об'єктів. Якщо компоненти шукаються у вигляді сплайнів, то така вектор-функція називається параметричним сплайном. Але при використанні параметричних сплайнів для відновлення геометричних об'єктів можуть з'явитися невластиві їм особливості у вигляді перегинів, зворотів, петель і т. п. Ці особливості форми відновлюваних об'єктів обумовлені використаним методом інтерполяції і тому в подальшому називаються хибними. Вони, як показала практика (див., наприклад, [2, 4, 5]), мають місце як при використанні локальних сплайнів, так і у випадку відновлення геометричних об'єктів нелокальними сплайнами.

Метою даної роботи є оцінка якості відновлення плоскої кривої параметричним параболічним чи кубічним сплайном мінімального дефекту та аналіз впливу на геометричну форму кривої розподілу опорних точок та крайових умов, що задаються в кінцевих точках.

Нехай в площині декартової системи координат задано скінченну впорядковану множину точок $\overrightarrow{P_i} = \{(x_{1i}, x_{2i})\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, а в точках з номерами 0 і N визначені напрями дотичних векторів кутовими коефіцієнтами α_0 і α_N.

Математичну модель кривої, що послідовно проходить через вихідні точки $\overrightarrow{P_i}$ і має в кінцевих точках $\overrightarrow{P_0}$ і $\overrightarrow{P_N}$ задані напрями дотичних векторів, будуємо у вигляді параметричного сплайна, кожна ланка якого зображена за допомогою розкладу за натуральними нормованими B-сплайнами [2]:

$$\vec{P}_i^m(t) = \sum_{k=0}^{m} \vec{\gamma}_{i+k-m} B_k(t), \qquad t \in [0, 1], \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

де $m = 2$ або $m = 3$ — порядок сплайна.

Функції $B_k(t)$ визначаються за формулами

$$B_{k-1}(t) = \frac{1}{m!} \sum_{j=1}^{m+1} c_{k,j} t^{m-j+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, m+1,$$

де $c_{k,j}$ — елементи матриці, яка для $m = 2$ і 3 має відповідно вигляд

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Побудова математичної моделі відновлюваної кривої полягає в знаходженні векторних коефіцієнтів $\vec{\gamma}_i = (\gamma_i^{x_1}, \gamma_i^{x_2})$ параметричного сплайна (1).

Для однозначного визначення цих коефіцієнтів перейдемо від задання напрямів крайових дотичних в декартовій площині до параметричного, тобто визначимо направляючі косинуси вектора $\vec{\tau}_i = (\tau_i^{x_1}, \tau_i^{x_2})$, $i = 0, N$. Компоненти вектора $\vec{\tau}_i$ визначаються із векторної рівності

$$\vec{\tau}_i = \lambda_i \left(\frac{1}{\left(1+\alpha_i^2\right)^{1/2}}, \frac{\alpha_i}{\left(1+\alpha_i^2\right)^{1/2}} \right),$$

$$\lambda_i = \text{const}, \qquad i = 0, N.$$

Коефіцієнти $\vec{\gamma}_i$ встановлюються із системи рівнянь [2]

$$-\vec{\gamma}_{-m} - \vec{\gamma}_{-m+2} = 2\lambda_0 \vec{\tau}_0,$$

$$\vec{\gamma}_{i-m} + \alpha\vec{\gamma}_{i-m+1} + \vec{\gamma}_{i-m+2} = \vec{\beta}_i,$$

$$\vec{\gamma}_{N-m} + \vec{\gamma}_{N-m+2} = 2\lambda_N \vec{\tau}_N,$$

де $\alpha = 6$, $\vec{\beta}_i = 8\vec{P}_i$ для $m = 2$ і $\alpha = 4$, $\vec{\beta}_i = 6\vec{P}_i$ для $m = 3$.

Позначимо

$$\vec{a} * \vec{b} = a_{x_1} b_{x_2} - a_{x_2} b_{x_1},$$

де $\vec{a} = (a_{x_1}, a_{x_2})$, $\vec{b} = (b_{x_1}, b_{x_2})$.

Нехай $\Delta_k \vec{P}_i$, $\nabla^k \vec{P}_i$ — ліва та права скінченні різниці k-го порядку в точці $\vec{P}_i$, $k = 1, 2, \ldots$.

Множину $\left\{\vec{P}_i, \vec{\tau}_0, \vec{\tau}_N\right\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, назвемо опорним базисом кривої. Опорний базис назвемо опуклим (вгнутим), якщо на його дугах виконуються нерівності

$$\Delta_1 \vec{P}_i * \Delta_1 \vec{P}_{i+1} > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{2}$$

$$\vec{\tau}_0 * \Delta_1 \vec{P}_1 > 0, \qquad \vec{\tau}_N * \nabla^1 \vec{P}_N > 0 \tag{3}$$

(для вгнутого базису в (2) і (3) знак $>$ слід замінити на $<$).

Для дослідження формозберігаючих властивостей відновлюваної плоскої кривої скористаємося формулою кривини для параметрично заданих кривих $\vec{R}(t)$ (див., наприклад, [2]):

$$K(t) = \frac{k(t)}{\left|\overrightarrow{R'}(t)\right|^3}, \tag{4}$$

де

$$k(t) = \overrightarrow{R'}(t) * \overrightarrow{R''}(t), \qquad t \in [0, 1]. \tag{5}$$

Чисельник в (4) характеризує „хвилястість" кривої (її форму), знаменник – величину цієї „хвилястості". Тому для оцінки форми кривої будемо досліджувати знак виразу (5).

Диференціюючи (1) і підставляючи в (5), після відповідних перетворень одержуємо

$$k_i(t) = \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=0}^{l} \left(\vec{\gamma}_{i+k-m} * \vec{\gamma}_{i+l-m} \right) \Phi_{l,k}(t), \tag{6}$$

де

$$\Phi_{l,k}(t) = B_l''(t) B_k'(t) - B_k''(t) B_l'(t).$$

Зрозуміло, що $\Phi_{l,k}(t) = -\Phi_{k,l}(t)$, $t \in [0, 1]$. Користуючись аналітичним зображенням натуральних нормалізованих B-сплайнів $B_k(t)$, функції $\Phi_{l,k}(t)$ можна записати в явному вигляді. Для $m = 2$ $\Phi_{l,k}(t)$ є константами

$$\Phi_{0,1} = \Phi_{1,2} = -1, \qquad \Phi_{0,2} = 1, \tag{7}$$

а для $m = 3$ — квадратними тричленами

$$\Phi_{0,1}(t) = -\frac{(1-t)(2-t)}{2}, \quad \Phi_{0,2}(t) = (t-1)^2, \quad \Phi_{0,3}(t) = \frac{t(1-t)}{2},$$

$$\Phi_{1,2}(t) = -\frac{3t^2 - 3t + 2}{2}, \quad \Phi_{1,3}(t) = t^2, \quad \Phi_{2,3}(t) = -\frac{t(t+1)}{2}.$$

Для параметричного параболічного сплайна ($m = 2$) вираз (6) внаслідок (7) не залежить від t і має вигляд

$$k_i = \left(\vec{\gamma}_i - \vec{\gamma}_{i-1} \right) * \left(\vec{\gamma}_{i+1} - \vec{\gamma}_i \right). \tag{8}$$

Для параметричного кубічного сплайна ($m = 3$), враховуючи аналітичний вигляд функції $\Phi_{l,k}(t)$, треба, по-перше, з'ясувати умови, при яких опуклість відновлюваної кривої в кінцевих точках дуги $\vec{P}_i \vec{P}_{i+1}$ буде визначатись її опорним базисом, а по-друге, встановити умови, при яких на дузі не з'являться хибні осциляції.

Враховуючи вигляд функції $\Phi_{l,k}(t)$, знаходимо

$$k_{i+1}(0) = k_i(1) = \left(\vec{\gamma}_i - \vec{\gamma}_{i-1} \right) * \left(\vec{\gamma}_{i+1} - \vec{\gamma}_i \right). \tag{9}$$

Явні формули для коефіцієнтів $\vec{\gamma}_i$ мають достатньо громіздкий вигляд, тому для подальших досліджень (8) і (9) скористаємося формулою [5]

$$\vec{\gamma}_i \approx m^{1/2}\left(\bar{P}_{i+m-1} - \sum_{k=0}^{j}(q_m / (1+q_m))^{k+1}\left(\nabla^k \bar{P}_{i+m-2} + \Delta_k \bar{P}_{i+m}\right)\right), \tag{10}$$

де $q_2 = 3 - 2^{3/2}$ і $q_3 = 2 - 3^{1/2}$, $j = \min(i, N-i)$, яка дозволяє з високою точністю обчислювати коефіцієнти $\vec{\gamma}_i$ при $0 < i < N-1$. При обчисленні в (10) скінченних різниць будемо вважати $\vec{P}_j = 0$, якщо $j < 0$ чи $j > N$.

Спочатку розглянемо ті сегменти відновлюваної кривої, на яких впливом крайових умов можна знехтувати, тобто коли можна скористатися формулою (10). Підставляючи вирази для $\vec{\gamma}_i$ із (10) в (8) і (9) і обмежуючись лінійними членами відносно q_m, одержуємо

$$\left(\vec{\gamma}_i - \vec{\gamma}_{i-1}\right) * \left(\vec{\gamma}_{i+1} - \vec{\gamma}_i\right) = \Delta_1\vec{P}_{i+1} * \Delta_1\vec{P}_{i+2} - q_m\left(\Delta_1\vec{P}_i * \Delta_1\vec{P}_{i+2}\right) -$$
$$- q_m\left(\Delta_1\vec{P}_{i+1} * \Delta_1\vec{P}_{i+3}\right) + o(q_m).$$

Звідси випливає, що при виконанні нерівностей

$$\left|\Delta_1\vec{P}_i * \Delta_1\vec{P}_{i+1}\right| > q_m\left(\left|\Delta_1\vec{P}_i * \Delta_1\vec{P}_{i+2}\right| + \left|\Delta_1\vec{P}_{i-1} * \Delta_1\vec{P}_{i+1}\right|\right)$$

форма відновлюваної кривої в околі опорних точок буде визначатись її базисом.

Для визначення допустимих довжин векторів дотичних треба провести дослідження виразів (8) і (9) на першому і останньому сегментах кривої. Шляхом нескладних технічних викладок отримаємо умови, при яких буде забезпечена опуклість відновлюваної кривої для її крайніх дуг:

$$(4 - q_m)\left|\vec{\tau}_0 * \Delta_1\vec{P}_0\right| > \left|\vec{\tau}_0 * \Delta_1\vec{P}_1\right| + q_m\left|\vec{\tau}_0 * \Delta_1\vec{P}_2\right|,$$

$$\lambda_0 \le \frac{3\left|\Delta_1\vec{P}_0 * \left(\Delta_1\vec{P}_1 - q_m\Delta_2\vec{P}_1\right)\right|}{\left|\vec{\tau}_0 * \left(\Delta_1\vec{P}_1 - q_m\Delta_2\vec{P}_1\right)\right|},$$

$$(4 - q_m)\left|\vec{\tau}_N * \nabla^1\vec{P}_N\right| > \left|\vec{\tau}_N * \nabla^1\vec{P}_{N-1}\right| + q_m\left|\vec{\tau}_N * \nabla^1\vec{P}_{N-2}\right|,$$

$$\lambda_N \le \frac{3\left|\nabla^1\vec{P}_N * \left(\nabla^1\vec{P}_{N-1} - q_m\nabla^2\vec{P}_{N-1}\right)\right|}{\left|\vec{\tau}_N * \left(\nabla^1\vec{P}_{N-1} - q_m\nabla^2\vec{P}_{N-1}\right)\right|}.$$

З'ясування умов, при яких на дузі між опорними точками не з'являться хибні осциляції у параметричного сплайна ($m = 3$), зводиться до дослідження нулів квадратного тричлена $k_i(t)$ на відрізку $[0, 1]$. В залежності від значень $k_i(t)$ в граничних точках відрізка можливі такі випадки:

а) $k_i(0)k_i(1) < 0$; тричлен $k_i(t)$ має на відрізку $[0, 1]$ один нуль, якому відповідає істинна точка перегину;

б) $k_i(0)k_i(1) \ge 0$; тричлен $k_i(t)$ може мати на відрізку $[0, 1]$ два нулі, що відповідають хибним точкам перегину на відновлюваній кривій.

Для того щоб на i-му сегменті параметричного кубічного сплайна не було хибних перегинів, необхідне виконання однієї з умов

$$U_i = \min_{0 \le t \le 1} k_i(t) \ge 0, \qquad V_i = \max_{0 \le t \le 1} k_i(t) \le 0.$$

Оцінюючи U_i, V_i відповідно знизу і зверху, маємо

$$U_i \geq \sum_{l=0}^{3}\sum_{k=0}^{l} a_{l,k}^{i}\, b_{l,k} = u_i; \quad V_i \leq \sum_{l=0}^{3}\sum_{k=0}^{l} a_{l,k}^{i}\, \tilde{b}_{l,k} = v_i,$$

де

$$a_{l,k}^{i} = \vec{\gamma}_{i+k-3} * \vec{\gamma}_{i+l-3},$$

$$b_{l,k} = \begin{cases} \min\limits_{0\le t\le 1} \Phi_{l,k}(t), & \text{якщо } a_{l,k}^{i} > 0; \\ \max\limits_{0\le t\le 1} \Phi_{l,k}(t), & \text{якщо } a_{l,k}^{i} < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{b}_{l,k} = \begin{cases} \max\limits_{0\le t\le 1} \Phi_{l,k}(t), & \text{якщо } a_{l,k}^{i} > 0; \\ \min\limits_{0\le t\le 1} \Phi_{l,k}(t), & \text{якщо } a_{l,k}^{i} < 0. \end{cases}$$

Враховуючи, що функції $\Phi_{l,k}(t)$ — квадратні тричлени, легко обчислюємо необхідні значення екстремумів $\Phi_{l,k}(t)$. Зрозуміло, що якщо $u_i \geq 0$, то і $U_i \geq 0$; якщо $v_i \leq 0$, то і $V_i \leq 0$.

Отже, з'ясування появи хибних осциляцій на відновлюваній кривій зводиться до перевірки знаку величин u_i, v_i (в залежності від знаку функції $k_i(t)$ на кінцях відрізка $[0, 1]$). Якщо $k_i(0) \geq 0$, $k_i(1) \geq 0$ і $u_i \geq 0$ або $k_i(0) \leq 0$, $k_i(1) \leq 0$ і $v_i \leq 0$, то на досліджуваному сегменті кривої хибних перегинів немає.

Таким чином, справедливі наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай опорний базис плоскої кривої* $\left\{\vec{P}_i, \vec{\tau}_0, \vec{\tau}_N\right\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, N$, *опуклий. Тоді параметричний параболічний сплайн* $\vec{P}_i^2(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, *послідовно проходить через точки* $\vec{P}_i$, *в точках* $\vec{P}_0$ і $\vec{P}_N$ *має задані напрями дотичних векторів і зберігає ізогеометрію опорного базису при виконанні нерівностей*

$$\left|\Delta_1\vec{P}_i * \Delta_1\vec{P}_{i+1}\right| > q_2\left(\left|\Delta_1\vec{P}_i * \Delta_1\vec{P}_{i+2}\right| + \left|\Delta_1\vec{P}_{i-1} * \Delta_1\vec{P}_{i+1}\right|\right),$$

$$(4-q_2)\left|\vec{\tau}_0 * \Delta_1\vec{P}_0\right| > \left|\vec{\tau}_0 * \Delta_1\vec{P}_1\right| + q_2\left|\vec{\tau}_0 * \Delta_1\vec{P}_2\right|,$$

$$\lambda_0 \leq \frac{3\left|\Delta_1\vec{P}_0 * \left(\Delta_1\vec{P}_1 - q_2\Delta_2\vec{P}_1\right)\right|}{\left|\vec{\tau}_0 * \left(\Delta_1\vec{P}_1 - q_2\Delta_2\vec{P}_1\right)\right|},$$

$$(4-q_2)\left|\vec{\tau}_N * \nabla^1\vec{P}_N\right| > \left|\vec{\tau}_N * \nabla^1\vec{P}_{N-1}\right| + q_2\left|\vec{\tau}_N * \nabla^1\vec{P}_{N-2}\right|,$$

$$\lambda_N \leq \frac{3\left|\nabla^1\vec{P}_N * \left(\nabla^1\vec{P}_{N-1} - q_2\nabla^2\vec{P}_{N-1}\right)\right|}{\left|\vec{\tau}_N * \left(\nabla^1\vec{P}_{N-1} + q_2\nabla^2\vec{P}_{N-1}\right)\right|},$$

де $q_2 = 3 - 2^{3/2}$.

Теорема 2. *Нехай опорний базис плоскої кривої* $\left\{\vec{P}_i, \vec{\tau}_0, \vec{\tau}_N\right\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, *опуклий. Тоді параметричний кубічний сплайн* $\vec{P}_i^3(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, *послідовно проходить через точки* $\vec{P}_i$, *в точках* $\vec{P}_0$ і $\vec{P}_N$ *має задані напрями дотичних векторів і зберігає ізогеометрію опорного базису при виконанні умов*

$$\left|\Delta_1\vec{P}_i * \Delta_1\vec{P}_{i+1}\right| > q_3\left(\left|\Delta_1\vec{P}_i * \Delta_1\vec{P}_{i+2}\right| + \left|\Delta_1\vec{P}_{i-1} * \Delta_1\vec{P}_{i+1}\right|\right),$$

$$(4-q_3)\left|\vec{\tau}_0 * \Delta_1\vec{P}_0\right| > \left|\vec{\tau}_0 * \Delta_1\vec{P}_1\right| + q_3\left|\vec{\tau}_0 * \Delta_1\vec{P}_2\right|,$$

$$\lambda_0 \le \frac{3\left|\Delta_1\vec{P}_0 * \left(\Delta_1\vec{P}_1 - q_3\Delta_2\vec{P}_1\right)\right|}{\left|\vec{\tau}_0 * \left(\Delta_1\vec{P}_1 - q_3\Delta_2\vec{P}_2\right)\right|},$$

$$(4-q_3)\left|\vec{\tau}_N * \nabla^1\vec{P}_N\right| > \left|\vec{\tau}_N * \nabla^1\vec{P}_{N-1}\right| + q_3\left|\vec{\tau}_N * \nabla^1\vec{P}_{N-2}\right|,$$

$$\lambda_N \le \frac{3\left|\nabla^1\vec{P}_N * \left(\nabla^1\vec{P}_{N-1} - q_3\nabla^2\vec{P}_{N-1}\right)\right|}{\left|\vec{\tau}_N * \left(\nabla^1\vec{P}_{N-1} + q_3\nabla^2\vec{P}_{N-1}\right)\right|}$$

при $q_3 = 2 - 3^{1/2}$ *та*

$$k_i(0) \ge 0, \quad k_i(1) \ge 0 \quad i \quad u_i \ge 0,$$

або

$$k_i(0) \le 0, \quad k_i(1) \le 0 \quad i \quad v_i \le 0.$$

Аналогічні твердження справедливі для вгнутого базису $\left\{P_i, \vec{\tau}_0, \vec{\tau}_N\right\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, плоскої кривої.

Зауважимо, що у випадку появи на кривих $\vec{P}_i^2(t)$ чи $\vec{P}_i^3(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, хибних точок перегину необхідно виконати варіювання точок $\vec{P}_i$ у відповідності з умовами сформульованих теорем.

1. *Späth H.* Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven una Flächen. – München: R. Oldenbourg Verlag, 1973. – 134 S.
2. *Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А.* Сплайны в инженерной геометрии. – М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.
3. *Гребенников А. И.* Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 207 с.
4. *Фокс А., Пратт М.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
5. *Su Bu Qing, Liu Ding Yuan.* Computational geometry – curve and surface modeling. – Boston: Acad. Press, 1989. – 225 p.

Одержано 29.12.98