УДК 511.33

П. Д. Варбанец, З. Ю. Дадаян (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ ПИЛЛАИ НАД $\mathbb{Z}[i]$ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

We construct an asymptotic formula for the average value of the generalized Pillai function in an arithmetic progression.

Побудовано асимптотичну формулу для середнього значення узагальненої функції Піллаї в арифметичній прогресії.

Введение. В 30-х годах прошлого века индийский математик S. S. Pillai (см. [1]) подробно изучал арифметическую функцию натурального аргумента

$$P(n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (k,\, n), \tag{1}$$

позже названную его именем.

Он доказал мультипликативность функции (1), получил формулы для ее вычисления, показал разложимость ее в произведение Дирихле. Кроме того, обнаружил ряд других нетривиальных свойств.

За последние несколько лет K. A. Broughan и O. Bordelles опубликовали ряд статей со своими результатами [2, 3], где существенно продвинулись в изучении функции (1). В частности, ими были получены асимптотические формулы для сумматорной функции

$$\sum_{n \le x} \frac{P(n)}{n^a},$$

где a — фиксированный вещественный параметр, а $x \to \infty$.

Мы обобщим (1) на целые гауссовые числа, задав ее в следующем виде:

$$g(\alpha) \;:=\; \sum_{\beta \,(\mathrm{mod}\, \alpha)} N((\beta,\alpha)), \tag{2}$$

причем суммирование, как и отмечалось, проводится по всем неассоциированным β по модулю α.

Цель настоящей статьи — получить асимптотическую формулу для суммы

$$G(x;\alpha_0,\gamma) \;:=\; \sum_{\substack{\alpha\equiv\alpha_0 \,(\mathrm{mod}\,\gamma) \\ N(\alpha)\le x}} g(\alpha), \tag{3}$$

где $(\alpha_0,\gamma)=1$ и $N(\gamma)$ увеличивается вместе с x.

1. Вспомогательные утверждения. Введем следующие обозначения: $\mathbb{Z}[i]$ — кольцо целых гауссовых чисел; $N(\alpha)=|\alpha|^2$ — норма целого гауссового α; (α,β) — наибольший общий делитель α, β; $\wp$ — простое гауссовое; $R_\gamma = \{\alpha \in \mathbb{Z}[i] \mid \alpha$ образует полную систему вычетов по модулю γ в $\mathbb{Z}[i]\}$; R_γ^* — приведенная система вычетов по модулю γ; $\tau(\cdot)$ — функция числа делителей над $\mathbb{Z}[i]$; $\varphi(\cdot)$ — функция Эйлера над $\mathbb{Z}[i]$; $\mu(\cdot)$ — функция Мебиуса над $\mathbb{Z}[i]$; $\chi_\gamma(\alpha)$ — групповой характер по модулю γ целого $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$; Id — «тождественная» функция, т. е. $\mathrm{Id}(\alpha) = N(\alpha)$; $f * h$ — свертка Дирихле функций f и h над $\mathbb{Z}[i]$:

$$f * h(\alpha) = \sum_{\delta | \alpha} f(\delta)\, h\left(\frac{\alpha}{\delta}\right),$$

причем суммирование здесь и всюду в настоящей статье проводится по всем неассоциированным делителям.

Известно [4], что для $\mathrm{Re}\, s > 2$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[i]} \frac{g(\alpha)}{N^s(\alpha)} = \frac{Z^2(s-1)}{Z(s)}. \tag{4}$$

Тогда для $\mathrm{Re}\, s > 2$

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}[i] \\ \alpha \equiv \alpha_0 \,(\mathrm{mod}\,\gamma)}} \frac{g(\alpha)}{N^s(\alpha)} = \sum_{\substack{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \equiv \alpha_0 \,(\mathrm{mod}\,\gamma) \\ (\alpha_0,\gamma)=1}} \frac{Z^2(s-1)}{Z(s)} =$$

$$= \sum_{\alpha_3 \in R_\gamma^*} N^{-s}(\gamma) Z^{-1}\left(s; \frac{\alpha_3}{\gamma}, 0\right) \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \equiv \alpha_0 \alpha_3^{-1} \,(\mathrm{mod}\,\gamma)} \left(N(\gamma)\right)^{-2(s-1)} Z\left(s-1; \frac{\alpha_1}{\gamma}, 0\right) =$$

$$= \sum_{\alpha_3 \in R_\gamma^*} \sum_{\alpha \equiv \alpha_3\,(\gamma)} f(s; \alpha_3, \gamma) \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \equiv \alpha_0 \alpha_3^{-1} \,(\mathrm{mod}\,\gamma)} \left(N(\gamma)\right)^{-2(s-1)} Z\left(s-1; \frac{\alpha_1}{\gamma}, 0\right) Z\left(s-1; \frac{\alpha_2}{\gamma}, 0\right) =$$

$$= \sum_{\alpha_3 \in R_\gamma^*} f(s; \alpha_3, \gamma) \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in R_\gamma^* \\ \alpha_1 \alpha_2 \equiv \alpha_0 \alpha_3^{-1} \,(\mathrm{mod}\,\gamma)}} \left(N(\gamma)\right)^{-2(s-1)} Z\left(s-1; \frac{\alpha_1}{\gamma}, 0\right) Z\left(s-1; \frac{\alpha_2}{\gamma}, 0\right), \tag{5}$$

где $Z\left(s; \delta_0, \delta_1\right) = \sum_{\substack{\omega \in \mathbb{Z}[i] \\ \omega \neq -\delta_0}} \frac{e^{2\pi i\, \mathrm{Re}(\delta_1 \omega)}}{N^s(\omega + \delta_0)}$ (здесь δ_0 и δ_1 гауссовые (необязательно целые)), а функция $f(s; \alpha_3, \gamma)$ определена рядом

$$f(s; \alpha_3, \gamma) := \sum_{\substack{\omega \in \mathbb{Z}[i] \\ \omega \equiv \alpha_3 \,(\mathrm{mod}\,\gamma)}} \frac{\mu(\omega)}{N^s(\omega)}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть* α_0, $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$, $N(\alpha_0) \le N(\gamma)$, $a(\omega)$ *и* $b(\omega)$ *— две комплекснозначные функции, определенные на* $\mathbb{Z}[i]$, *причем* $|a(\omega)| \le \Phi(N(\omega))$, *где* $\Phi(u) > 0$. *Предположим еще, что ряды Дирихле*

$$A(s;\alpha_0) = \sum_{\substack{\omega\in\mathbb{Z}[i]\\ \omega\equiv\alpha_0 \,(\mathrm{mod}\,\gamma)}} \frac{a(\omega)}{N^s(\omega)}, \qquad B(s) = \sum_{\omega\in\mathbb{Z}[i]} \frac{b(\omega)}{N^s(\omega)}$$

абсолютно сходятся при $\operatorname{Re} s \geq \sigma_a$ *и* $\operatorname{Re} s \geq \sigma_a - 1$ *соответственно. Тогда для любых вещественных чисел* $c > \sigma_a$ *и* $T > 1$ *имеем*

$$\sum_{\substack{\omega\equiv\alpha_0 \,(\mathrm{mod}\,\gamma)\\ N(\omega)\leq x}} \sum_{\alpha|\omega} a(\alpha)\, b\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} B(s)\left(A(s) - \sum_{\beta\in B}\frac{\tau(\beta)}{N^s(\beta)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds + R(x,T,\gamma) \tag{7}$$

$$\text{при} \quad x \to \infty,$$

где

$$R(x,T,\gamma) \ll \frac{x^c}{TN(\gamma)\,(c-\sigma_a)^l} + \frac{x\,\Phi(x)}{TN(\gamma)} + \Phi(x), \tag{8}$$

$$B := \{\alpha_0,\, \alpha_0 \pm 1,\, \alpha_0 \pm i\}.$$

Это утверждение является аналогом формулы Перрона на арифметической прогрессии и доказывается аналогичным образом.

Пусть $m \in \mathbb{Z}$, δ_0, $\delta_1 \in \mathbb{R}[i]$. Рассмотрим Z-функцию Гекке с Grossencharacter $\lambda_m(\alpha) = e^{4mi\arg\alpha}$, определяемую для $\operatorname{Re} s > 1$ следующим абсолютно сходящимся рядом:

$$Z_m(s;\delta_0,\delta_1) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[i]} \lambda_m(\alpha+\delta_0)\,\frac{e^{2\pi i \operatorname{Re}(\alpha\delta_1)}}{N^s(\alpha+\delta_0)}. \tag{9}$$

Лемма 2. *Функция* $Z_m(s;\delta_0,\delta_1)$ *целая, если* $m \neq 0$ *или* $m = 0$, δ_1 *— нецелое гауссово число; для* $m = 0$, $\delta_1 \in \mathbb{Z}[i]$ $Z_m(s;\delta_0,\delta_1)$ *голоморфна во всей комплексной* s*-плоскости, кроме точки* $s = 1$, *где она имеет полюс первого порядка с вычетом* π. *Кроме того, справедливо функциональное уравнение*

$$\pi^{-s}\Gamma(s+|2m|)Z_m(s;\delta_0,\delta_1) = \pi^{-(1-s)}\Gamma(1-s+|2m|)e^{-2\pi i\operatorname{Re}(\delta_0\delta_1)}Z_{-m}(1-s;\delta_1,-\delta_0). \tag{10}$$

Для $\delta_0 = \delta_1 = 0$ имеем стандартную Z-функцию Гекке с Grossencharacter λ_m, а при $m = 0$ получаем дзета-функцию Эпштейна квадратичной формы $Q(u,v) = u^2 + v^2$.

Для ω_1, $\omega_2 \in \mathbb{Z}[i]$ обозначим

$$\Phi(\omega_1,\omega_2;\gamma) := \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \,(\mathrm{mod}\ \gamma)\\ \alpha_1\alpha_2\equiv\alpha_0\,(\mathrm{mod}\ \gamma)}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2}{\gamma}\right)}. \tag{11}$$

Ясно, что при $(\alpha_0, \gamma) = 1$ имеем

$$\Phi(\omega_1, \omega_2; \gamma) = K(\omega_1, \alpha_0\omega_2; \gamma),$$

где $K(\alpha, \beta; \gamma)$ — сумма Клостермана над кольцом $\mathbb{Z}[i]$, для которой известна оценка

$$K(\alpha, \beta; \gamma) \ll \tau(\gamma) N^{1/2}((\alpha, \beta, \gamma)) N^{1/2}(\gamma). \tag{12}$$

Пусть α, α_0, γ — целые гауссовые числа, $(\alpha_0, \gamma) = 1$. Для $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ определим функции

$$f_0(s; \alpha) = \sum_{\substack{\omega \\ \omega \equiv \alpha \, (\mathrm{mod}\, \gamma)}} N^{-s}(\omega), \tag{13}$$

$$g_0(s; \alpha) = \sum_{\substack{\omega \\ \omega \equiv \alpha \, (\mathrm{mod}\, \gamma)}} \mu(\omega) N^{-s}(\omega), \tag{14}$$

$$F_0(s; \alpha_0) = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in R_\gamma^* \\ \alpha_1 \alpha_2 \equiv \alpha_0 \, (\mathrm{mod}\, \gamma)}} f_0(s; \alpha_1) f_0(s; \alpha_2). \tag{15}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} f_0(s; \alpha) &= N^{-s}(\gamma) Z_0\left(s; \frac{\alpha}{\gamma}, 0\right), \\ F_0(s; \alpha_0) &= \sum_{\substack{\omega \\ \omega \equiv \alpha_0 \, (\mathrm{mod}\, \gamma)}} \frac{\tau(\omega)}{N^s(\omega)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Обозначим еще

$$F_0^*(s; \alpha_0) = F_0(s; \alpha_0) - \sum_{\beta \in B} \frac{\tau(\beta)}{N^s(\beta)}, \tag{17}$$

где $B := \{\alpha_0, \alpha_0 \pm 1, \alpha_0 \pm i\}$.

Лемма 3. *В прямоугольнике* $-\varepsilon \le \operatorname{Re} s \le 1 + \varepsilon$, $3 \le |\operatorname{Im} s| \le T$ *справедлива оценка*

$$F_0^*(s; \alpha_0) \ll_\varepsilon \left(N(\gamma)\right)^{\frac{1-3\sigma}{2} + 4\varepsilon} T^{2(1-\sigma+4\varepsilon)}. \tag{18}$$

Доказательство. На прямой $\operatorname{Re} s = 1 + \varepsilon$

$$F_0^*(s; \alpha_0) \ll N^{-1-\varepsilon}(\gamma).$$

На прямой $\operatorname{Re} s = -\varepsilon$ будем использовать функциональное уравнение (см. лемму 1), формулу Стирлинга для Γ-функции и оценки сумм Клостермана. Тогда получим

$$F_0(-\varepsilon + it; \gamma) \ll |t|^{2(1+2\varepsilon)} \sum_{\omega} N^{-1-\varepsilon}(\omega) \left| \sum_{\omega_1\omega_2 = \omega} \Phi(\omega_1, \omega_2; \gamma) \right| + N^{\varepsilon}(\gamma) \ll$$

$$\ll \tau(\gamma) N^{1/2}(\gamma) \sum_{\delta | \gamma} \sum_{\omega} \frac{N^{1/2}(\delta)\tau(\delta\omega)}{N^{1+\varepsilon}(\delta\omega)} |t|^{2(1+2\varepsilon)} \ll T^{2(1+2\varepsilon)} N^{1/2+\varepsilon}(\gamma).$$

Теперь утверждение леммы следует в силу принципа Фрагмена – Линделефа, примененного к регулярной в полосе $-\varepsilon \le \operatorname{Re} s \le 1+\varepsilon$ функции $\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 F_0(s; \alpha_0)$.

Лемма 4. *Пусть* $s = \sigma + it$, $0 < \sigma \le 2$, *и* τ *— комплексное число с* $\arg \tau = \arg s$. *Существует постоянная* $T_0 > 0$ *такая, что для* $|s| \ge T_0$

$$f(s; \alpha) := \sum_{\substack{\omega \\ \omega \equiv \alpha\,(\gamma)}} N^{-s}(\omega) = \sum_{\substack{\omega \\ \omega \equiv \alpha\,(\gamma) \\ N(\omega) \le U}} N^{-s}(\omega)\, \Gamma^*\left(s; \frac{\pi N(\omega)\tau}{N^{1/2}(\gamma)} \right) +$$

$$+ \frac{\pi^{1-s}}{N^s(\gamma)} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} \sum_{\substack{\omega \\ N(\omega) \le V}} N^{s-1}(\omega)\, \Gamma^*\left(1-s; \frac{\pi N(\omega)}{\tau N^{1/2}(\gamma)} \right) e^{-2\pi i \operatorname{Re}(\alpha\omega/\gamma)}, \tag{19}$$

где

$$\Gamma^*(z; Z) = l + O\left(\exp\left(-c_1 \left| \frac{Z}{z} \right| \right) \left| \frac{Z}{\operatorname{Im}(z)} \right|^{\operatorname{Re}(z)} \left(1 + \left(|\operatorname{Im}(z)|^{1/2} - \frac{c_2 |Z|}{|\operatorname{Im}(z)|^{1/2}} \right)^{-1} \right) \right),$$

$$l = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad |Z| \le |z|, \\ 0, & \textit{если} \quad |Z| > |z|, \end{cases}$$

c_1, $c_2 > 0$ *— абсолютные постоянные,*

$$U = u \cdot (1 + M \log u), \qquad u = \frac{N^{1/2}(\gamma)|s|}{\pi |\tau|},$$

$$V = v \cdot (1 + M \log v), \qquad v = \frac{N^{1/2}(\gamma)|s||\tau|}{\pi},$$

$M > 0$ *— фиксированное число, а постоянная в символе „O" не зависит от* α, γ, s, τ.

Это утверждение является специальным случаем теоремы Лаврика [5] о приближенных функциональных уравнениях для рядов Дирихле. Для этого достаточно рассмотреть ряды

Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \qquad \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s},$$

где $a_n = \sum_{\substack{\omega\equiv\alpha(\gamma)\\ N(\omega)=n}} 1$, $b_n = \sum_{N(\omega)=n} e^{-2\pi i \operatorname{Re}(\alpha\omega/\gamma)}$, и заметить, что (в силу леммы 2)

$$A^s\Gamma(s) f(s) = \eta A^{1-s}\Gamma(1-s)\varphi(1-s)$$

с $A = \dfrac{1}{\pi}N^{1/2}(\gamma)$, $\eta = N^{-1/2}(\gamma)$.

Следствие. *В обозначениях леммы* 4 *с* $\tau = |s|N^{-1/2}(\gamma)\pi$ *имеем*

$$f(s;\alpha) = \sum_{\beta\in B} N^{-s}(\beta) + \frac{\pi^{1-s}}{N^s(\gamma)}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} \sum_{\substack{\omega\\ N(\omega)\le V_0}} N^{s-1}(\omega)\, e^{-2\pi i \operatorname{Re}(\alpha\omega/\gamma)} +$$

$$+ O\left(N^{-1/2}(\gamma)\log(|s|N(\gamma))\right) + O\left(|t|^{-M+2}\right), \tag{20}$$

где $M \ge 4$ *фиксировано,* $V_0 = |s|^2\log|s|$.

Пусть $(\alpha_0,\gamma) = 1$. Рассмотрим функцию

$$F(s;\alpha_0) = \sum_{\alpha\equiv\alpha_0 \,(\mathrm{mod}\,\gamma)} \frac{\tau(\alpha)}{N^s(\alpha)} = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \alpha_1\alpha_2\equiv\alpha_0\,(\mathrm{mod}\,\gamma)}} f(s;\alpha_1)\, f(s;\alpha_2).$$

Вычислим вычет в точке $s = 2$ функции

$$\Phi_0(s) := \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}[i]\\ \alpha\equiv\alpha_0\,(\mathrm{mod}\,\gamma)}} \frac{g(\alpha)}{N^s(\alpha)} = \sum_{\alpha_3\in R_\gamma^*} g_0(s;\alpha_3)F(s-1;\alpha_0). \tag{21}$$

Рассмотрим Z-функцию Гекке с групповым характером

$$Z(s;\chi) = \sum_{\omega} \frac{\chi((\omega))}{N^s(\omega)}$$

(здесь суммирование проводится по всем идеалам (ω) кольца целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$). Имеем

$$f_0(s;\alpha) = \frac{1}{\varphi(\gamma)} \sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,\gamma)} \bar{\chi}((\alpha))\, Z(s;\chi). \tag{22}$$

Рассмотрим ряд Лорана для $Z(s;\chi)$:

$$Z(s;\chi) = \frac{\varepsilon(\chi)}{s-1} + b_{0,\gamma}(\chi) + b_{1,\gamma}(\chi)(s-1) + \ldots. \tag{23}$$

Поскольку $Z(s) = \sum_{(\omega)} \frac{1}{N^s((\omega))} = \zeta(s)L(s,\chi_4)$, имеем

$$Z(s;\chi_0) = Z(s)\prod_{\wp|\gamma}\left(1 - \frac{1}{N^s(\wp)}\right) = \frac{\pi\varphi(\gamma)}{N(\gamma)}\frac{1}{s-1} + b_{0,\gamma}(\chi_0) + b_{1,\gamma}(\chi_0)(s-1) + \ldots, \tag{24}$$

где $b_{0,\gamma}(\chi_0) = \frac{\pi\varphi(\gamma)}{N(\gamma)}\left(E + \frac{L'(1,\chi_4)}{L(1,\chi_4)} + \sum_{\wp|\gamma}\frac{\log N(\wp)}{N(\wp)-1}\right)$.

Отсюда

$$F_0(s;\alpha_3^{-1}\alpha_0) = \frac{\pi^2\varphi(\gamma)}{N^2(\gamma)}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{\pi}{N(\gamma)\varphi(\gamma)}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,\gamma)} b_{0,\gamma}(\chi)\sum_{\alpha_1\alpha_2\equiv\alpha_3^{-1}\alpha_0}\left(\bar\chi(\alpha_1)+\bar\chi(\alpha_2)\right)\frac{1}{s-1} + \ldots. \tag{25}$$

Но

$$\sum_{\substack{\alpha_1,\,\alpha_2\\ \alpha_1\alpha_2\equiv\alpha_3^{-1}\alpha_0\,(\gamma)}}\left(\bar\chi(\alpha_1)+\bar\chi(\alpha_2)\right) = \begin{cases} 2\varphi(\gamma), & \text{если } \chi=\chi_0,\\ 0 & \text{— в остальных случаях.}\end{cases}$$

Таким образом,

$$F_0(s;\alpha_3^{-1}\alpha_0) = \frac{\pi^2\varphi(\gamma)}{N^2(\gamma)}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\pi}{N(\gamma)}\frac{b_{0,\gamma}(\chi_0)}{s-1} + \ldots. \tag{26}$$

Далее в окрестности точки $s=2$ в силу (14) имеем

$$g_0(s;\alpha_3) = \sum_{\substack{\omega\in\mathbb{Z}[i]\\ \omega\equiv\alpha_3\,(\mathrm{mod}\,\gamma)}}\frac{\mu(\omega)}{N^2(\omega)} + \sum_{\substack{\omega\in\mathbb{Z}[i]\\ \omega\equiv\alpha_3\,(\mathrm{mod}\,\gamma)}}\frac{\mu(\omega)\log N(\omega)}{N^2(\omega)}(s-1) + \ldots.$$

Следовательно,

$$\sum_{\omega\equiv\alpha_3\,(\mathrm{mod}\,\gamma)} g_0(s;\alpha_3) = \sum_{(\omega,\gamma)=1}\frac{\mu(\omega)}{N^2(\omega)} + \left(\sum_{(\omega,\gamma)=1}\frac{\mu(\omega)\log N(\omega)}{N^2(\omega)}\right)(s-1) + \ldots. \tag{27}$$

Принимая во внимание, что два первых коэффициента в разложении (24) не зависят от α_3, получаем из (24), (25) значение вычета в точке $s=2$ функции $\Phi_0(s)$:

$$\operatorname*{res}_{s=1}\Phi_0(s) = A_1(\gamma)\frac{\varphi(\gamma)}{N^2(\gamma)}x^2\log x + A_0(\gamma)\frac{\varphi(\gamma)}{N^2(\gamma)}x^2, \tag{28}$$

где $|A_0(\gamma)|$, $|A_1(\gamma)|$ ограничены сверху и снизу вычислимыми положительными постоянными.

Теперь можно доказать основную теорему настоящей статьи.

2. Основные результаты. Поскольку функцию Пиллаи $g(\alpha)$ над кольцом $\mathbb{Z}[i]$ можно задать произведением Дирихле (см. [4])

$$g = \mu * \mathrm{Id} * \mathrm{Id},$$

то

$$g(\alpha) = \sum_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\alpha} N(\alpha_1)\,N(\alpha_2)\,\mu(\alpha_3).$$

Поэтому (см. обозначения (13) – (15)) получаем

$$\Phi_0(s) := \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}[i] \\ \alpha\equiv\alpha_0 \,(\mathrm{mod}\,\gamma)}} \frac{g(\alpha)}{N^s(\alpha)} = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}[i] \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\equiv\alpha_0 \,(\mathrm{mod}\,\gamma)}} f_0(s-1;\alpha_1)\,f_0(s-1;\alpha_2)\,g_0(s;\alpha_3)\,. \qquad (29)$$

Напомним, что мы рассматриваем случай $(\alpha_0,\gamma)=1$, поэтому $(\alpha_1,\gamma)=(\alpha_2,\gamma)=(\alpha_3,\gamma)=1$.

Теорема. *Для целых* α_0, $\gamma\in\mathbb{Z}[i]$, $(\alpha_0,\gamma)=1$, *справедлива асимптотическая формула*

$$G(x;\alpha_0,\gamma) := \sum_{\substack{\alpha\equiv\alpha_0 \,(\mathrm{mod}\ \gamma) \\ N(\alpha)\le x}} g(\alpha) = \frac{x^2\log x}{N(\gamma)}c_1(\gamma) + \frac{x^2}{N(\gamma)}c_0(\gamma) + O\left(x^{3/2+3\varepsilon/2}\right), \qquad (30)$$

где

$$c_1(\gamma) = \prod_{\wp|\gamma}\left(1-\frac{1}{N(\wp)}\right)\left(1-\frac{1}{N^2(\wp)}\right),$$

$$c_0(\gamma) = -\frac{Z'(2)}{Z^2(2)}\prod_{\wp|\gamma}\left(1-\frac{1}{N^2(\wp)}\right)^{-1} + \frac{1}{Z(2)}\prod_{\wp|\gamma}\frac{\log N(\wp)}{N^2(\wp)-1}$$

(*здесь и всюду в данной статье* $\wp$ *пробегает по всем неассоциированным делителям* γ).

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re}s>2$. Из определения $F_0(s;\alpha_3^{-1}\alpha_0)$ следует

$$\Phi_0^*(s) = \sum_{\alpha_3\in R_\gamma^*}\sum_{\alpha\equiv\alpha_3\,(\mathrm{mod}\,\gamma)}\frac{\mu(\alpha_3)}{N^s(\alpha_3)}F^*(s-1;\alpha_3^{-1}\alpha_0) = \sum_{\alpha_3\in R_\gamma^*}\sum_{\substack{\omega\equiv\alpha_3^{-1}\alpha_0\,(\mathrm{mod}\,\gamma) \\ N(\omega)>N(\alpha_3\gamma)}}\frac{g(\omega)}{N^s(\omega)}\,.$$

Следовательно, в силу леммы 1 для $c>2$ имеем

$$\sum_{\alpha_3\in R_\gamma^*}\ \sum_{\substack{\omega\equiv\alpha_3^{-1}\alpha_0\ (\mathrm{mod}\ \gamma)\\ N(\alpha_3\gamma)<N(\omega)\le x}} g(\omega) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{c-it}^{c+it}\Phi_0^*(s)\frac{x^s}{s}\,ds+$$

$$+O\left(\frac{x^c}{TN(\gamma)(c-2)^2}\right)+O\left(\frac{x\,\Phi(x)}{T\,N(\gamma)}\right)+O\big(\Phi(x)\big). \qquad (31)$$

В интеграле (31) выполним замену $s-1$ на s и перенесем контур интегрирования на прямую $\mathrm{Re}\, s=\dfrac{1}{2}$. На основании леммы 3 вклад горизонтальных участков этого контура оценивается как

$$\frac{1}{T}\max_{\substack{1/2\le\sigma\le c-1\\ |\mathrm{Im}(s)|=T}}\left|\sum_{\alpha_3\in R_\gamma^*} g_0(s+1;\alpha_3)\,F^*(s;\alpha_3^{-1}\alpha_0)\,x^\sigma\right| \ll \frac{1}{T}\max_{\substack{1/2\le\sigma\le c-1\\ |\mathrm{Im}(s)|=T}}\left|F^*(s-1;\alpha)\,x^\sigma\right| \ll$$

$$\ll \frac{x^{3/2}}{4}N^{-1/4+2\varepsilon}(\gamma)+\frac{x^2\log^2 x}{TN(\gamma)}. \qquad (32)$$

Внутри контура интегрирования находится единственная особенность подынтегральной функции, а именно: двойной полюс в точке $s=1$ с вычетом, который определен равенством (28).

Осталось оценить интеграл

$$I \;:=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}\sum_{\alpha_3\in R_\gamma^*} g_0(s+1;\alpha_3)\,F^*(s;\alpha_3^{-1}\alpha_0)\,\frac{x^{s+1}}{s+1}\,ds. \qquad (33)$$

Имеем

$$F^*(s;\alpha_3^{-1}\alpha_0) \;=\; \sum_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\equiv\alpha_0\ (\mathrm{mod}\ \gamma)}\left\{\left(f(s;\alpha_1)-\sum_{\beta_1\in B_1}\frac{1}{N^s(\beta_1)}\right)\left(f(s;\alpha_2)-\sum_{\beta_2\in B_2}\frac{1}{N^s(\beta_2)}\right)+\right.$$

$$+\left(f(s;\alpha_1)-\sum_{\beta_1\in B_1}\frac{1}{N^s(\beta_1)}\right)\sum_{\beta_2\in B_2}\frac{1}{N^s(\beta_2)}+\left(f(s;\alpha_2)-\sum_{\beta_2\in B_2}\frac{1}{N^s(\beta_2)}\right)\sum_{\beta_1\in B_1}\frac{1}{N^s(\beta_1)}+$$

$$\left.+\left(\sum_{\beta\in B}\frac{\tau(\beta)}{N^s(\beta)}-\sum_{\beta_1\in B_1}\frac{1}{N^s(\beta_1)}\sum_{\beta_2\in B_2}\frac{1}{N^s(\beta_2)}\right)\right\} := \sum_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\equiv\alpha_0\ (\mathrm{mod}\ \gamma)}\big(S(s)+S_1(s)+S_2(s)+S_3(s)\big),$$

где $B := \{\alpha_3^{-1}\alpha_0,\alpha_3^{-1}\alpha_0\pm1,\alpha_3^{-1}\alpha_0\pm i\}$, $B_1:=\{\alpha_1,\alpha_1\pm1,\alpha_1\pm i\}$, $B_2:=\{\alpha_2,\alpha_2\pm1,\alpha_2\pm i\}$.

Слагаемое $S_3(s)$ дает вклад в интеграл в (33), равный $O\left(x^{3/2}\log T\log N(\gamma)\right)$. Вклад $S_1(s)$ и $S_2(s)$ в интеграл I оценивается одинаково. В силу леммы 4 имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1/2-iT}^{1/2+iT}\sum_{\alpha_3\in R_\gamma^*} g_0(s+1;\alpha_3)\,S_1(s)\frac{x^s}{s}\,ds \ll \int\limits_{\substack{1\\ \operatorname{Re}s=1/2}}^{T} |g_0(s+1)| \times$$

$$\times \max_{\alpha\in R_\gamma^*}\left|\sum_{\substack{\alpha_1,\,\alpha_2\\ \alpha_1\alpha_2\equiv\alpha^{-1}\alpha_0\,(\gamma)}}\sum_{\beta_1}|N(\beta_1)|^{-1/2}\left|f(s;\alpha_2)-\sum_{\beta_2}\frac{1}{N(\beta_2)}\right|\right|\frac{x^{3/2}}{|s|}\,dt \ll$$

$$\ll x^{3/2}T^{\varepsilon}\max_{\alpha\in R_\gamma^*}\sum_{\substack{\alpha_1,\,\alpha_2\\ \alpha_1\alpha_2\equiv\alpha^{-1}\alpha_0\,(\gamma)}}\int\limits_1^T\left|f(s;\alpha_2)-\sum_{\beta_2}\frac{1}{N^s(\beta_2)}\right|^2\frac{dt}{t} \ll_\varepsilon x^{3/2+\varepsilon}N^{\varepsilon}(\gamma). \qquad (34)$$

Наконец, вклад интеграла, содержащего $S(s)$, можно оценить, использовав неравенство Коши – Шварца и лемму 4. Тогда получим

$$\int\limits_{\substack{1\\ \operatorname{Re}s=1/2}}^{T}\sum_{\alpha_3\in R_\gamma^*} g_0(s+1;\alpha_3)\,S(s)\frac{x^{s+1}}{s+1}\,ds \ll$$

$$\ll x^{3/2}\max_{\alpha\in R_\gamma^*}\sum_{\substack{\alpha_1,\,\alpha_2\\ \alpha_1\alpha_2\equiv\alpha^{-1}\alpha_0(\gamma)}}\left(\int\limits_1^T\left|f(s;\alpha_1)-\sum_{\beta_1}\frac{1}{N^s(\beta_1)}\right|^2\frac{dt}{t}\int\limits_1^T\left|f(s;\alpha_2)-\sum_{\beta_2}\frac{1}{N^s(\beta_2)}\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2} \ll$$

$$\ll x^{3/2}T^{\varepsilon}N^{\varepsilon}(\gamma). \qquad (35)$$

Теперь из (31) – (35) следует утверждение теоремы, если положить $T=\dfrac{x^{1/2}}{N(\gamma)}$.

В заключение заметим, что в основной теореме полученная оценка нетривиальна для всех $N(\gamma)=o\left(x^{1/2-\varepsilon}\right)$, а остаточный член может быть улучшен, если при оценке интеграла I использовать укороченные уравнения для $f(s;\alpha)$ и применить метод стационарной фазы. Кроме того, доказанная теорема легко распространяется и на случай $(\alpha_0,\gamma)>1$.

1. *Pillai S. S.* On an arithmetic functions // J. Annamalai Univ. – 1937. – **2**. – P. 243 – 248.
2. *Bordelles O.* A note on the average order of the gcd-sum function // J. Integer Sequences. – 2007. – **10**. – Article 07.3.3.
3. *Broughan K. A.* The gcd-sum function // J. Integer Sequences. – 2001. – **4**. – Article 01.2.2.
4. *Дадаян З. Ю.* Обобщенная функция Пиллаи // Вестн. Одес. нац. ун-та. – 2011. – **16**, вып. 16.
5. *Лаврик А. Ф.* О приближенных уравнениях для функций Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 1. – С. 134 – 185.

Получено 28.05.12