УДК 517.5

В. П. Моторный, О. В. Моторная (Днепропетр. ун-т)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

We present a review of results obtained during the last decade on the approximation of certain functions and classes of functions by algebraic polynomials in the spaces C and L_1 and on the approximation with regard for the location of point on an interval.

Наведено огляд результатів, отриманих за останнє десятиріччя, про наближення алгебраїчними многочленами деяких функцій і класів функцій у просторах C та L_1, а також про наближення з урахуванням положення точки на відрізку.

1. Введение. Одной из основных и трудных задач теории аппроксимации функций является задача об определении величины наилучшего приближения данного класса функций элементами некоторого подпространства конечной размерности. Конкретно постановка задачи состоит в следующем. Задан класс функций H, содержащийся в нормированном пространстве X. Обозначим через $E_n(f)_X$ наилучшее приближение функции $f(x)$ элементами некоторого подпространства $E_n \subset X$ и пусть

$$E_n(H)_X = \sup_{f \in H} E_n(f)_X$$

— наилучшее приближение класса H элементами подпространства E_n. Требуется найти значение величины $E_n(H)_X$.

В периодическом случае, т. е. когда H — класс 2π-периодических функций, а X_n — подпространство тригонометрических полиномов степени не выше n, эта задача решена в ряде важных случаев (см. [1 – 12]).

Если H — класс непериодических функций, а X_n — подпространство алгебраических многочленов степени не выше n, то точное решение этой задачи сопряжено с большими трудностями и удается получить только результаты, характеризующие асимптотическое поведение величин $E_n(H)_X$. Причем если класс H определяется ограничениями на r-ю производную в метрике пространства $C_{[a,b]}$ и приближение рассматривается в этом же пространстве, то задача (об асимптотическом поведении величин $E_n(H)_X$) сводится к периодическому случаю [13; 14, с. 310 – 314; 15]. В случае же пространства L_1 (и тем более L_p) по известным причинам решение задачи непосредственно не редуцируется к периодическому случаю и необходимо создавать иные (новые) методы приближения.

В п. 2 рассмотрены задачи о наилучшем L_1-приближении классов гладких функций алгебраическими многочленами. Их решение связано с изучением точной асимптотики наилучшего L_1-приближения усеченных степеней $(x-t)_+^{r-1}$, $r > 0$, алгебраическими многочленами и применением теории Σ-перестановок Корнейчука для непериодических функций.

П. 3 посвящен вопросу о возможности получения асимптотически точных на классах W_∞^r (r — нецелое положительное число) оценок приближения алгебраическими многочленами, учитывающих положение точки на отрезке $[-1, 1]$. Следует отметить, что для этого случая не была известна точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими многочленами в пространстве C.

В п. 4 приведены решения задач, аналогичных рассмотренным в пп. 2, 3, для классов функций, представимых некоторыми сингулярными интегралами.

2. Приближение усеченных степеней и классов функций в интегральной метрике. Пусть W_p^r, $p \geq 1$, $r > 0$, — класс функций f_r, представимых на отрезке $[-1, 1]$ в виде

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{1} (x-t)_+^{r-1} f(t)\,dt + P(x), \tag{1}$$

где $\Gamma(r)$ — гамма-функция Эйлера, x_+^{r-1} — усеченная степень, функция $f(t)$ измерима и $\|f(t)\|_p \leq 1$, а $P(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше $[r-1]$ ($[a]$ — целая часть a). В случае целых r это класс функций f, $(r-1)$-я производная которых абсолютно непрерывна, а $\|f^{(r)}\|_p \leq 1$. Обозначим через $\tilde{W}_p^r$ (r — любое положительное число) класс 2π-периодических функций f, представимых в виде

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_r(x-t)\phi(t)\,dt,$$

где

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - r\pi/2)}{k^r},$$

$\|\phi(t)\|_p \leq 1$ и $\phi(t)$ в среднем равна нулю.

Для $p = 1$ и $r = 1, 2, \ldots$ С. М. Никольским [16] установлено равенство

$$E_n(W_1^r)_1 = \sup_{a \in [-1,1]} \frac{1}{\Gamma(r)} E_n((x-a)_+^{r-1})_1, \tag{2}$$

и доказано, что точная верхняя грань величины $E_n((x-a)_+^{r-1})_1$ на отрезке $[-1, 1]$ достигается асимптотически при $a = 0$, а затем была получена [17] асимптотически точная оценка величин $E_n((x-a)_+^{r-1})_1$ в окрестности точки 0.

Для любого $\eta \in (0, 1)$ равномерно относительно $a \in (-\eta, \eta)$ выполняется асимптотическое равенство

$$E_n\left(\frac{1}{\Gamma(r)}(x-a)_+^{r-1}\right)_1 = \frac{K_r\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r} + O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right), \tag{3}$$

где K_r — константы Фавара.

Из соотношений (2), (3) следует асимптотически точная оценка для наилучших приближений классов W_1^r (r — натуральное):

$$E_n(W_1^r)_1 = \frac{K_r}{n^r} + o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Кроме того, из соотношений (2), (3) следует, что для $p = 1$ решение задачи о наилучшем приближении алгебраическими многочленами класса W_1^r в пространстве L_1 связано с задачей об определении поведения наилучших приближений алгебраическими многочленами ядер, определяющих класс W_p^r, т. е. усеченных степеней $(x-t)_+^{r-1}$ в пространстве L_1.

Используя многочлены наилучшего приближения усеченных степеней, С. М. Никольский [16] построил линейный метод приближения классов W_1^r,

$r = 1, 2, \ldots$, в пространстве L_1, реализующий наилучшее приближение этих классов. Заметим, что этот метод приближения удалось применить и для дробных r в работах [18 – 21].

При оценке наилучшего приближения непериодических функций алгебраическими многочленами в пространстве L_1 существенную роль играют подмножества $W^r_{\infty,n}$ функций f из класса W^r_∞ таких, что $f^{(r)}(-1) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, r-1$, и

$$\int_{-1}^{1} f^{(r)}(t) t^k \, dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

так как в силу соотношений двойственности (см. [9, с. 42]) для функции $f \in$ $\in W^r_p$ имеет место равенство

$$E_n(f)_1 = \sup_{\phi \in W^r_{\infty,n}} \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t) \phi(t) \, dt .$$

В частности, для нахождения величины наилучшего приближения некоторых классов функций алгебраическими многочленами в пространстве L_1 необходимо использовать точную мажоранту значений функций $f \in W^r_{\infty,n}$ в фиксированной точке $a \in (-1, 1)$, т. е. величину $\sup_{f \in W^r_{\infty,n}} f(a)$, которую можно представить в виде [22]

$$\sup_{f \in W^r_{\infty,n}} f(a) = E_n\left(\frac{1}{\Gamma(r)} (x-a)_+^{r-1}\right)_1, \quad r = 1, 2, \ldots, \quad n \geq r-1. \tag{4}$$

Поэтому возникла задача об уточнении равенства (3) — необходимо было получить равномерную оценку величины $E_n((x-a)_+^{r-1})_1$ на всем промежутке $[-1, 1]$ изменения параметра a с более точным остаточным членом. Такая оценка для целых r получена в работах [23 – 25] и имеет вид

$$\frac{K_r\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r}\left(1 - \frac{C_r}{n\sqrt{1-a^2}}\right) \leq$$

$$\leq E_n\left(\frac{1}{(r-1)!}(x-a)_+^{r-1}\right)_1 \leq \frac{K_r\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r}\left(1 + \frac{C_r}{n\sqrt{1-a^2}}\right), \tag{5}$$

где величина C_r зависит только от r.

Равенство (4) и оценка (5) позволили доказать следующую теорему [23 – 25].

Теорема 1. *Для любых* $r = 1, 2, \ldots$ *выполняется асимптотическое равенство*

$$E_n(W^r_\infty)_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{r/2} \, dt \, \frac{K_{r+1}}{(n+1)^r} + o\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad r = 1, 2, \ldots .$$

Нам будут необходимы еще следующие классы функций: $W^r H^\omega$, $r = 0,$ $1, \ldots$, — класс функций f, заданных на отрезке $[-1, 1]$, r-я производная $(f^{(0)} = f)$ которых удовлетворяет условию

$$| f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2) | \leq \omega(|x_1 - x_2|),$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности. Если $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, будем использовать обозначение $W^r H^\alpha$; класс B_p^r, $r = 1, 2, \ldots$; $1 \le p \le \infty$, состоит из функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$, r-я производная которых абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$ и $\|(1-x^2)^{r/2} f^{(r)}(x)\|_p \le 1$, если $1 \le p < \infty$, и $|(1-x^2)^{r/2} f^{(r)}(x)| \le 1$ почти всюду, если $p = \infty$.

Чтобы получить асимптотически точные оценки наилучших приближений классов W_p^r ($p > 1$, r — натуральное) и $W^r H^\alpha$ ($r = 0, 1, \ldots$, B_p^r, $p > 1$, r — натуральное) в работе [26] был получен локальный аналог теоремы сравнения Колмогорова для функций из класса $W_{\infty,n}^r$.

Введем определение локальной функции сравнения: пусть $f \in W_{\infty,n}^r$ и $[\alpha, \beta] \subset (-1, 1)$; локальной функцией сравнения для $f(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ будем называть любую функцию $\nu(t)$, заданную и дифференцируемую на действительной оси R_1, такую, что если в некоторых точках $x \in [\alpha, \beta]$ и $y \in R_1$: $f(x) = \nu(y)$, то $|f'(x)| \le |\nu'(y)|$.

Считая r фиксированным, обозначим через C_r^* $\max_{1 \le k \le r+2} C_k$ и положим

$$C_{r,a} = 1 + \frac{2C_r^*}{n\sqrt{1-a^2}}, \qquad (6)$$

где C_k — (наименьшие) значения констант, для которых справедливы неравенства (5).

Через $\phi_{n,r}(t)$ (n и r — натуральные числа) будем обозначать r-й периодический интеграл, со средним значением на периоде равным нулю, функции $\operatorname{sign}\sin nt$.

В работе [26] доказана теорема о существовании локальных функций сравнения для функций из класса $W_{\infty,n}^r$ (впрочем, она справедлива и в более общем случае).

Теорема 2. *Пусть $[a, b] \subset (-1 + \pi/2n, -\pi/2n)$. Для любой функции $f \in W_{\infty,n}^r$ локальной функцией сравнения на отрезке $[a, b]$ является функция*

$$\nu(t) = C_{r,a} \psi_{r,b_*}(t),$$

где $C_{r,a}$ определяется равенством (6), b_* — *равенством* $b_* = b + (\pi/2n)\sqrt{1-b_*^2}$, *а*

$$\psi_{r,b_*}(t) = \left(\sqrt{1-b_*^2}\right)^r \phi_{n,r}\left(\frac{t}{\sqrt{1-b_*^2}} + \frac{\pi r}{2n}\right).$$

Если $(a, b) \cap (-\pi/2n, \pi/2n) \ne \varnothing$, то функцией сравнения на интервале (a, b) для любой функции $f \in W_{\infty,n}^r$ будет функция $\omega(t) = C_{r,0}\phi_{n,r}(t)$.

Замечание. Так как класс $W_{\infty,n}^r$ инвариантен относительно преобразования переменной $t = -z$, то теорема 4 справедлива и для любого интервала $(a, b) \subset (\pi/2n, 1 - \pi/2n)$. В этом случае функцией сравнения будет функция

$$\nu(t) = C_{r,b} \psi_{r,a_*}(t),$$

где $a_* = a - (\pi/2n)\sqrt{1-a_*^2}$.

Неравенства (5) и теорема 1 позволили применить метод Σ-перестановок Н. П. Корнейчука [9, 10] для доказательства следующих утверждений, полученных в работах [26–28].

Теорема 3. *Для любых $r = 1, 2, \ldots$ и $p > 1$ имеет место асимптотическое равенство*

$$E_n(W_p^r)_1 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{rq/2}\,dt\right\}^{1/q} \|\phi_{n,r}\|_q + o\left(\frac{1}{n^r}\right), \tag{7}$$

где $1/p + 1/q = 1$, *а норма функции* $\phi_{n,r}(t)$ *вычисляется в пространстве* $\tilde{L}_q$ 2π*-периодических функций.*

Отметим, что в периодическом случае величины $\tilde{E}_n(\tilde{W}_p^r)_1$, $1 < p \le \infty$, были вычислены Л. В Тайковым [11] и одновременно величины $\tilde{E}_n(\tilde{W}_\infty^r)_1$ — С. П. Туровец [12].

Теорема 4. *Для любых* $r = 1, 2, \ldots$ *и* $p > 1$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$E_n(B_p^r)_1 = \left\{\frac{1}{2\pi}\right\}^{1/q} \|\phi_{n,r}\|_q (1 + o(1)),$$

где $1/p + 1/q = 1$.

Теорема 5. *Для любых* $r = 0, 1, \ldots$ *и* $\alpha \in (0, 1]$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$E_n(W^r H^\alpha)_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{(r+\alpha)/2}\,dt\,\|f_{n,r,\alpha}\|_1 + o\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \tag{8}$$

где $f_{n,r,\alpha}$ — r*-й периодический интеграл, со средним значением на периоде равным нулю, от* $2\pi/n$*-периодической нечетной функции* $f_{n,0,\alpha}$, *определенной на отрезке* $[0, \pi/2n]$ *равенством*

$$f_{n,0,\alpha}(x) = \begin{cases} 2^{\alpha-1}x^\alpha, & 0 \le x \le \pi/2n; \\ 2^{\alpha-1}(\pi/n - x)^\alpha, & \pi/2n \le x \le \pi/n; \end{cases}$$

норма этой функции берется в пространстве $\tilde{L}_1$.

В случае $\alpha = 1$ равенство (8) получено в работах [23, 24]. Обобщение теоремы 5 на случай классов $W^r H^\omega$ получено в работе [29].

Теорема 6. *Пусть* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности. Тогда*

$$E_n(W^r H^\omega)_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^1 \phi_{n,r}\left(\frac{\pi t}{2n} + \frac{\pi}{2n}r\right)\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\,t\right)dt\right]dx + o\left(\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Кроме того, если функция

$$\phi(u) = \frac{u\omega'(u)}{\omega(u)}$$

имеет конечный предел при $u \to 0$, *то*

$$E_n(W^r H^\omega)_1 = \frac{\|f_{n,r,\omega}\|}{2\pi\omega(\pi/n)}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^r \omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-t^2}\right)dt + o\left(\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $f_{n,r,\omega}$ — r*-й периодический интеграл, со средним значением на периоде равным нулю, от* $2\pi/n$*-периодической нечетной функции* $f_{n,0,\omega}$, *определенной на отрезке* $[0, \pi/2n]$ *равенством*

$$f_{n,0,\omega}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2x), & 0 \le x \le \pi/2n; \\ \frac{1}{2}\omega(2\pi/n - 2x), & \pi/2n \le x \le \pi/n; \end{cases}$$

нормы этих функций берутся в пространстве $\tilde{L}_1$.

В периодическом случае для класса $W^r H^\omega$ функций с заданной выпуклой мажорантой модуля непрерывности r-й производной задача об определении величины $\tilde{E}_n(\tilde{W}^r H^\omega)_1$ решена Н. П. Корнейчуком [10].

Во всех приведенных выше теоремах индекс r — целое число. Для нецелых $r > 0$ также рассматривалась (см. работы [18–21]) задача об определении асимптотического поведения наилучших L_1-приближений алгебраическими многочленами усеченных степеней. Заметим, что в периодическом случае задача о наилучшем $\tilde{L}_1$-приближении ядер $D_r(t)$ тригонометрическими полиномами для дробных r решена в работах [6, 7].

Приведем основные результаты работ [18–21].

Теорема 7 [18]. *Для любого* $r \in (0, 1)$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$E_n\left(\frac{1}{\Gamma(r)}(x-a)_+^{r-1}\right)_1 = \frac{K_r\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r} + O\left(\min\left(\frac{1}{n^{2r}}, \frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}}\right)\right), \quad (9)$$

где константа K_r *определяется равенством*

$$K_r = \frac{4\sin(r\pi/2)}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}, \quad \textit{если} \quad 0 < r < 1, \quad (10)$$

а константа, определяющая остаточный член в (9), *не зависит от* r *и* a.

Теорема 8. *Для любого дробного* $r > 1$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$E_n\left(\frac{1}{\Gamma(r)}(x-a)_+^{r-1}\right)_1 = \frac{K_r\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r} + O\left(\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}} + \frac{1}{n^{2r}}\right), \quad (11)$$

где константа K_r *определяется равенством*

$$K_r = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\{(2m+1)\gamma_r - r\pi/2\}}{(2m+1)^{r+1}}\right|, \quad \textit{если} \quad r > 1, \quad (12)$$

$\gamma_r \in [0, \pi)$ *является корнем уравнения*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\{(2m+1)\gamma_r - r\pi/2\}}{(2m+1)^r} = 0,$$

а константа, определяющая остаточный член в (11), *зависит только от* r.

Случай $r \in (1, 2)$ рассмотрен в работе [19], общий случай — в работе [21]. При этом следует отметить (и этим в работе мы пользовались), что отношение K_r/n^r — величина наилучшего приближения ядра $D_r(t)$ тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ в интегральной метрике. Этот важный результат получен в работах В. К. Дзядыка [6, 7] (см. также работу [8], в которой получены существенные обобщения).

Применяя равенства (2), (9) и (11) и используя многочлены наилучшего L_1-приближения усеченных степеней алгебраическими многочленами, для нецелых r получаем следующий результат.

Теорема 9 [18–21]. *Для любого дробного $r > 0$ имеет место асимптотическое равенство*

$$E_n(W_1^r)_1 = \frac{K_r}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right), \tag{13}$$

где константа, определяющая остаточный член в (13), *зависит от* r. *Кроме того, существует линейный метод приближения, который реализует наилучшее приближение класса* W_1^r.

В работах В. А. Кофанова [22, 30] точное значение величин $E_n(W_1^r)_1$ представлено для всех $r \geq 1$ с помощью совершенных сплайнов $S_{n,r}(t)$ в виде

$$E_n(W_1^r)_1 = \| S_{n,r} \|_\infty,$$

где $n \geq [r] - 1$, а

$$S_{n,r}(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{1} (x-t)_+^{r-1} \operatorname{sign} \sin(n+2) \arccos x \, dx .$$

Однако поведение при $n \to \infty$ величин $\| S_{n,r} \|_\infty$ для нецелых r оставалось неизвестным. Поэтому определение асимптотики величин $E_n(W_1^r)_1$ также решает задачу об асимптотическом поведении норм в равномерной метрике сплайнов $S_{n,r}$. Кроме того, отметим, что в работах В. А. Кофанова (см., например, [22]) случай $0 < r < 1$ предложенными им методами исследованию не поддавался.

Представляет интерес поведение остаточных членов во всех приведенных равенствах. Частично ответ на этот вопрос содержится в работах [31, 32]. Синвел [31] доказал, что для любого $r = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$E_n(W_\infty^r)_\infty < \frac{K_r (n+1-r)!}{(n+1)!}.$$

С использованием метода промежуточного приближения в работе [32] получена неулучшаемая на всем классе оценка наилучшего приближения класса $W^r H^\omega$:

$$E_n(W^r H^\omega)_\infty < \frac{K_r (n-r)!}{2n!} \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

В этой же работе рассмотрен случай приближения классов W_1^r алгебраическими многочленами в интегральной метрике:

$$E_n(W_1^r)_1 < \frac{K_r (n+1-r)!}{(n+1)!}. \tag{14}$$

Позже неравенство [14] было установлено также в работе [33].

3. Поточечное приближение классов функций, представимых интегралом дробного порядка. Возникновение и исследование этой проблемы обусловлено работой С. М. Никольского [34], в которой построен линейный метод $L_n(f; x)$ приближения функций из класса W_∞^1 такой, что

$$|f(x) - L_n(f; x)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + O\left(\frac{|x| \ln n}{n^2}\right), \tag{15}$$

и было показано, что константу $\pi/2$ в неравенстве (15) уменьшить нельзя.

После получения этого результата стало понятно каким должно быть уточнение теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций, заданных на конечном отрезке, алгебраическими многочленами, допускающее (в ряде основных случаев) полное обращение. Первая из таких теорем для класса $W^r H^\omega$ была доказана А. Ф. Тиманом [14, с. 276]. Дальнейшее развитие этой теоремы получено в работах Х. Уитни [35], В. К. Дзядыка [36], Г. Фрейда [37], Р. М. Тригуба [38], Ю. А. Брудного [39].

Кроме того, результат С. М. Никольского открыл возможность получать точную асимптотику поточечного приближения непериодических функций алгебраическими многочленами. Так, А. Ф. Тиман [14, с. 310 – 314] доказал, что для любого натурального числа $r > 1$ существует линейный метод $U_n(f; x)$ приближения класса W_∞^r такой, что для любой функции $f \in W_\infty^r$ выполняется неравенство

$$|f(x) - U_n(f; x)| \leq \frac{K_r}{n^r}\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + o(1)\right] \tag{16}$$

и константу K_r (K_r — константа Фавара) на классе W_∞^r уменьшить нельзя. При этом константа, определяющая остаточный член, зависит от функции f.

Таким образом, для каждого натурального числа r был указан линейный метод приближения, осуществляющий асимптотически наилучшее приближение класса W_∞^r алгебраическими многочленами в равномерной метрике и в то же время каждую функцию из класса W_∞^r у концов отрезка $[-1, 1]$ приближающий существенно лучше. В работах Н. П. Корнейчука и А. И.Половины [40 – 42] было установлено, что аналогичный эффект, но уже реализуемый нелинейным методом, имеет место и для некоторых классов функций гладкости не выше двух. Приведем один из основных результатов этих работ [42]:

Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности. Тогда для любой функции $f \in H^\omega$ существует последовательность алгебраических многочленов $\{P_n(f; x)\}$ степени $n = 1, 2, \ldots$ такая, что равномерно относительно всех $x \in [-1, 1]$ при $n \to \infty$ выполняется неравенство

$$|f(x) - P_n(f; x)| \leq \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right) + o\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{17}$$

Затем в работе А. А. Лигуна [43] для любого нечетного числа r был построен линейный метод приближения $Q_{n,r}(f; x)$ такой, что для любой функции $f(x)$, имеющей производную порядка r, выполняется неравенство

$$|f(x) - Q_{n,r}(f; x)| \leq \frac{K_r}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \omega\left(f^{(r)}; \pi\sqrt{1-x^2}/n\right) + o\left(\frac{\omega\left(f^{(r)}; 1/n\right)}{n^r}\right), \tag{18}$$

где $\omega(f^{(r)}; t)$ — модуль непрерывности r-й производной функции $f(x)$.

Отметим, что в указанных работах обобщение теоремы С. М. Никольского сопровождалось огрублением остаточного члена. Поэтому следующий шаг, связанный с развитием указанных исследований С. М. Никольского, состоял в уточнении остаточного члена в неравенствах (15) – (18). Первым осуществил его В. Н. Темляков [44]: он усилил неравенство (15), убрав $\ln n$ в остаточном члене.

Результат В. Н. Темлякова привел к следующей гипотезе: *для любой функции $f \in W_\infty^r$ (r — любое положительное число) существует последовательность алгебраических многочленов $p_n(x)$, $n = r - 1, r, \ldots$, удовлетворяющих неравенству*

$$|f(x)-p_n(x)| \le \frac{K_r\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r}{n^r} + C_r\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+1/n\right)^{r-1}}{n^{r+1}}, \tag{19}$$

где величина C_r зависит только от r.

Подтверждение этого предположения для любого натурального числа $r \ge 2$ было дано Р. М. Тригубом [45]:

для любой функции $f \in W_\infty^r$ (r – натуральное число, большее либо равное 2) существует последовательность алгебраических многочленов $p_n(x)$, $n = r-1$, $r, \ldots$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)-p_n(x)| \le K_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r + c_r\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}}, \tag{20}$$

где константа c_r зависит от r.

Другая, более сильная гипотеза была высказана Ю. А. Брудным [46], предположившим, что в (19) при натуральном r остаточный член можно представить в виде $O(1/n^{2r})$.

Приведем простое доказательство неравенства (19) для функций из класса W_∞^r (r — натуральное число).

Для любой суммируемой 2π-периодической функции f положим

$$I_r\phi(x) = \int_0^{2\pi}\phi(t)D_r(x-t)\,dt.$$

Если f в среднем равна нулю, то $f(x) = (d/dx)^r I_r f(x)$. В общем случае

$$\frac{d}{dx}I_r f(x) = I_{r-1}f(x), \quad r\ge 2, \qquad \text{и} \qquad \frac{d}{dx}I_1 f(x) = f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

Обозначим через $\tilde{E}_n(f)_\infty$ наилучшее приближение функции f тригонометрическими многочленами степени не выше $n-1$ в пространстве C. Имеет место неравенство

$$\tilde{E}_n(I_r f)_\infty \le \frac{K_r}{n^r}\tilde{E}_n(f)_\infty. \tag{21}$$

В случае, когда $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$, доказательство неравенства (21) см., например, в [14, с. 316]. В противном случае его доказательство аналогично. Пусть $f(t)$ — произвольная измеримая на отрезке $[-1, 1]$ функция, модуль которой ограничен единицей. Для любого натурального числа k определим $f_k(x)$ равенством (1) и положим

$$f_k(\cos t) = (-\sin t)^k I_k(f(\cos u))(t) + R_k(t), \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{22}$$

Из неравенства (21) следует существование последовательности $\{Q_n^k(t)\}$ четных тригонометрических полиномов степени не выше n таких, что

$$|(-\sin t)^k I_k(f(\cos u))(t) - Q_n^k(t)| \le \frac{K_k\sin^k t}{n^k} + \frac{C_k}{n^{k+1}}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)^{k-1}, \tag{23}$$

где C_k зависит только от k.

Далее проверяем, что для любого $k = 2, 3, \ldots$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dx}R_k(t) = -\sin t\,R_{k-1}(t) + k(-\sin t)^{k-1}\cos t\,I_k(f(\cos u))(t), \tag{24}$$

а

$$\frac{d}{dx}R_1(t) = \cos t I_1(f(\cos u))(t) - \frac{\sin t}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos t)\,dt. \tag{25}$$

Из неравенства (21) и равенства (25) получаем оценку

$$\tilde{E}_n(R_1)_\infty \le \frac{C_1}{n^2}.$$

Используя теперь рекуррентную зависимость (24) и известный прием доказательства (см., например, [47], лемма 2), методом математической индукции устанавливаем существование последовательности $\{T_n^k(t)\}$ четных тригонометрических полиномов степени не выше n таких, что

$$|R_k(t) - T_n^k(t)| \le \frac{d_k}{n^{k+1}}\left(\sin t + \frac{1}{n}\right)^{k-1}, \tag{26}$$

где d_k зависит только от k. Из (23) и (26) следует (19).

Случай нецелого r рассмотрен в работах [48, 49]. Приведем основной результат.

Теорема 10. *Для любого дробного числа $r > 0$ и любой функции $f \in W_\infty^r$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$ такая, что*

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2} + 1/n\right)^{r-1}\right),$$

где константа K_r определяется равенством (10) *или* (12), *а постоянная, определяющая остаточный член, зависит только от r.*

Отметим также, что порядковая оценка для поточечного приближения функций, имеющих дробную производную, получена в работе [50].

Приведем схему доказательства теоремы 10. Пусть $\rho \in (0,1)$, $i = 0, 1, \ldots$ и $r = \rho + m$. Не теряя общности, будем считать, что в (1) $P(x) = 0$. При этом функцию $f_r(x)$, представимую равенством (1), записываем в виде $f_{m+\rho}(x)$. Обозначим через $S_m(x)$ функцию

$$\int_0^\pi \left[D_r(u-x) + (-1)^m D_r(u+x)\right]\sin^\rho u\, f(\cos u)\,du,$$

а через $R_m(x)$ разность $f_{m+\rho}(\cos x) - \sin^m x S_m(x)$. Тогда

$$R_m'(x) = -\sin x R_{m-1}(x) - m\cos x \sin^{m-1} x S_m(x). \tag{27}$$

Индуцированную функцию $f_{\rho+m}(\cos x)$ представим в виде

$$f_{\rho+m}(\cos x) = \sin^m x S_m(x) + R_m(x)$$

и аппроксимируем каждое слагаемое четным тригонометрическим полиномом. Функцию $\sin^m x S_m(x)$ будем приближать тригонометрическим полиномом $\sin^m x Q_n^m(x)$, где

$$Q_n^m(x) = \int_0^\pi \left[P_n(u-x) + (-1)^m P_n(u+x)\right]\sin^\rho u\, \phi(\cos u)\,du,$$

а $P_n(x) = P_n^r(x)$ — тригонометрический полином степени не выше $n-1$ наилучшего L_1-приближения ядра $D_r(x)$, т. е.

$$\| D_r(x) - P_n^r(x) \|_1 = \frac{K_r}{n^r}.$$

Утверждение теоремы 10 вытекает из следующих вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для любого* $r = m + \rho$ *и* $x \in (0, \pi)$ *имеет место неравенство*

$$| S_m(x) - Q_n^m(x) | \le \frac{K_r \sin^\rho x}{n^r} + \frac{C \ln n}{n^{r+1}} (\sin x + 1/n)^{\rho - 1}, \tag{28}$$

где C — *некоторая константа.*

Из неравенства (28) следует оценка приближения функции $\sin^m x S_m(x)$ в каждой точке интервала $(0, \pi)$:

$$| \sin^m x S_m(x) - \sin^m x Q_n^m(x) | \le \frac{K_r \sin^r x}{n^r} + \frac{C \ln n}{n^{r+1}} (\sin x + 1/n)^{r-1}. \tag{29}$$

Равенство (27) позволяет провести индуктивное рассуждение, чтобы доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Для любого* $r > 0$ *существует последовательность* $T_n^m(x)$ *четных тригонометрических полиномов степени не выше* n *таких, что*

$$| R_m(x) - T_n^m(x) | \le C_r \frac{\ln n}{n^{r+1}} (\sin x + 1/n)^{r-1}, \quad x \in (0, \pi), \tag{30}$$

где константа C_r *зависит от* r.

Для $m = 0$ утверждение леммы 2 следует из разностных свойств функции $R_0(x)$, указанных в лемме 3, доказательство которой приведено в работе [48].

Лемма 3. *Вторая разность функции* $R_0(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\Delta_h^2 R_0(x)| \le C \begin{cases} h^{1+r} \sin^{r-1} x, & \textit{если} \ \sin x \ge h; \\ h^{2r}, & \textit{если} \ \sin x < h, \end{cases}$$

где C — *абсолютная константа.*

Из неравенств (29), (30) следует оценка сверху для поточечного приближения функции $f_r(x)$. Оценку снизу получаем [49], используя результаты С. Н. Бернштейна (см. [13, с. 374]).

4. Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами. Пусть $\rho(x)$ — неотрицательная, интегрируемая на отрезке $[-1, 1]$ функция и H — некоторый класс функций f, заданных на этом же отрезке, для которых существует в смысле главного значения интеграл

$$S_\rho(f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t - x} \rho(t)\, dt, \quad x \in (-1, 1). \tag{31}$$

Для некоторых весовых функций $\rho(x)$ и классов H задачи об аппроксимации сингулярных интегралов (31) исследовались, например, в работах [51 – 54]. Преобразование $S_\rho(f)$ можно рассматривать как один из вариантов определения сопряженной функции к функции f, заданной на отрезке $[-1, 1]$. При этом суперпозиция $S_\rho(f)(\cos x)$ определенным образом выражается через функцию, тригонометрически сопряженную к индуцированной функции $f(\cos x)$ или к функции, которая определяется последней. Мы не касаемся задачи об описании множества пар $(\rho(x), H)$, для которых существует (всюду или почти всюду) интеграл (31) и какие он имеет свойства.

Рассмотрим конкретные весовые функции $\rho_{-1}(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, $\rho_1(x) =$

$= (1-x^2)^{1/2}$, $\rho_0(x) = 1$, и классы W_p^r, $r > 0$, $p = \infty$ или $p = 1$, функций $f_r(x)$, определяемых на отрезке $[-1, 1]$ равенством (1).

Обозначим через $\hat{W}_p^r$, $\breve{W}_p^r$ и $\tilde{W}_p^r$ классы функций $S_\rho(f)$, $f \in W_p^r$, представимых сингулярным интегралом (31) с весом соответственно $\rho_{-1}(t)$, $\rho_1(t)$ и $\rho_0(t)$.

Основными результатами являются асимптотически точные оценки приближения функций классов $\hat{W}_\infty^r$, $\breve{W}_\infty^r$ и $\tilde{W}_\infty^r$ с учетом положения точки на интервале $(-1, 1)$ алгебраическими многочленами.

Теорема 11. *Для любого числа $r > 0$ и любой функции $f \in \hat{W}_\infty^r$ существует последовательность алгебраических многочленов $\{P_n(x)\}$, $n = [r] - 1$, $[r], \ldots$, такая, что*

$$|f(x) - P_n(x)| \sqrt{1-x^2} \le \frac{\tilde{K}_r \left(\sqrt{1-x^2}\right)^r}{n^r} + C_r \left(\frac{\ln n}{n^{r+1}} \left(\sqrt{1-x^2} + 1/n\right)^{r-1}\right), \quad (32)$$

где

$$\tilde{K}_r = \frac{4\cos(r\pi/2)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{r+1}}, \quad \text{если} \quad 0 < r \le 1/2,$$

и

$$\tilde{K}_r = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\{(2m+1)\gamma_r - r\pi/2\}}{(2m+1)^{r+1}} \right|, \quad \text{если} \quad r > 1/2,$$

а $\gamma_r \in (0, \pi]$ является корнем уравнения

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\{(2m+1)\gamma_r - r\pi/2\}}{(2m+1)^r} = 0.$$

Величина C_r зависит только от r.

Следует отметить, что отношение $\tilde{K}_r / n^r$ — величина наилучшего приближения ядра

$$\tilde{D}_r(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt - r\pi/2)}{k^r}$$

тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ в интегральной метрике. Этот результат был получен в работах Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна [4] при натуральных r, С. Б. Стечкина [55] при $0 < r \le 1/2$, Сунь-Юншеня [56] при нецелых $r > 1$ и В. К. Дзядыка [8] при $1/2 < r < 1$.

Теорема 12. *Для любого числа $r > 0$ и любой функции $f \in \breve{W}_\infty^r$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$, $n = [r] + 1$, $[r] + 2, \ldots$, такая, что*

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{\tilde{K}_r}{n^r} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + C_r \left(\frac{\ln n}{n^{r+1}} (\sqrt{1-x^2} + 1/n)^r\right), \quad (33)$$

где константа C_r зависит от r.

Более сложная ситуация имеет место для классов $\tilde{W}_\infty^r$. Дело в том, что для функции $f(x) = 1 \quad \forall x \in [-1, 1]$:

$$\bar{1}(x) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1-x}{1+x},$$

а для любой функции $f(x) \in W^r$:

$$\tilde{f}(\cos t) = \overline{f(\cos t) \operatorname{sign} \sin t} = \frac{1}{\sin t} \overline{f(\cos t) |\sin t|},$$

где через $\tilde{f}(t)$ обозначена тригонометрически сопряженная функция к 2π-периодической функции $f(x)$. В этом случае необходимо либо приближать функцию $\tilde{f}(x)$ на отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$, либо требовать, чтобы $f(x)$ обращалась в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$ вместе со своими производными. Во втором случае можно обеспечить необходимую гладкость функции $\overline{f(\cos t) \operatorname{sign} \sin t}$. Эта идея реализована в следующей теореме.

Теорема 13. *Пусть* $\tilde{f} \in \tilde{W}_\infty^r$, $r = 1, 2, \ldots$, *и на концах отрезка* $[-1, 1]$ *функция* $f(x)$ *и все ее производные до* $r-1$ *порядка обращаются в нуль. Тогда существует последовательность алгебраических многочленов* $P_n(x)$, $n \geq r-1$, *такая, что*

$$|\tilde{f}(x) - P_n(x)| \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r\left(\frac{(\sqrt{1-x^2} + 1/n)^{r-1}}{n^{r+1}}\right), \tag{34}$$

где константа C_r *зависит от* r.

В случае целых r константу $\tilde{K}_r$ в неравенствах (32)–(34) уменьшить нельзя, а множитель $\ln n$ в правых частях неравенств (32), (33) можно опустить.

Равномерная оценка взвешенного приближения функций $f \in \hat{W}_\infty^r$ алгебраическими многочленами и оценка приближения в метрике пространства L_1 функций класса $\hat{W}_1^r$ получены в работе [54].

Теорема 14. *Для любого числа* $r \in N$ *и любой функции* $f \in \hat{W}_\infty^r$ *существует алгебраический многочлен* $P_n(x)$ *степени не выше* $n \geq r-2$ *такой, что*

$$\|(f(x) - P_n(x))\sqrt{1-x^2}\| \leq \frac{\tilde{K}_r (n-r+2)!}{(n+2)!}, \tag{35}$$

где для натуральных чисел r

$$\tilde{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{kr}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Теорема 15. *Для любого числа* $r \in N$ *и любой функции* $f \in \hat{W}_1^r$ *существует алгебраический многочлен* $P_n(x)$ *степени не выше* $n \geq r-2$ *такой, что*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\tilde{K}_r (n-r+1)!}{(n+1)!}. \tag{36}$$

При этом константу $\tilde{K}_r$ в неравенствах (35), (36) одновременно для всех n уменьшить нельзя.

1. *Favard J.* Sur l'approximation des fonctions heriodiques par des polynomes trigonometriques // C. r. Acad. Sci. – 1936. – **203**. – P. 1122 – 1124.
2. *Favard J.* Application des formule sommatoire d'Euler a la demonstration de quelques proprietes extremales des integrales des fonctions periodiques // Math. Tidskrift. – 1936. – **4**. – P. 81 – 84.
3. *Favard J.* Sur les meilleurs procedes d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonometriques // Bull. Sci. Math. Ser. – 1937. – **60**. – P. 209 – 224, 243 – 256.
4. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // Докл. АН СССР. – 1937. – **15**. – С. 107 – 112.

5. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**. – С. 1 – 76.
6. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**. – С. 135 – 162.
7. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций // Там же. – 1959. – **23**. – С. 933 – 950.
8. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691 – 701.
9. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
10. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**. – С. 93 – 124.
11. *Тайков Л. В.* О приближении в среднем некоторых классов периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 61 – 70.
12 *Туровец С. П.* О наилучшем приближении в среднем классов дифференцируемых функций // Докл. АН УССР. – 1968. – № 5. – С. 417 – 421.
13. *Бернштейн С. Н.* О предельных зависимостях между константами теории наилучшего приближения: Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – Т. 2. – С. 413 – 415.
14. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
15. *Кофанов В. А.* О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1980. – **37**, № 3. – С. 381 – 390.
16. *Никольский С. М.* О наилучшем линейном методе приближения многочленами в среднем дифференцируемых функций // Докл. АН СССР.– 1947.– **58**, № 2. – С. 185 – 188.
17. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами в среднем функций $|a-x|^s$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1947. – **11**, № 3. – С. 139 – 180.
18. *Motornyi V. P., Nitiema P. C.* On the best L-approximation by polinomials of the functions which are fractional integrals of summable functions // E. J. Approxim. – 1996. – **2**, № 4. – P. 409 – 425.
19. *Нитиема П. К.* О наилучшем L_1-приближении алгебраическими многочленами усеченных степеней // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 4. – С. 593 – 598.
20. *Моторная О. В., Моторный В. П., Нитиема П. К.* О наилучшем L_1-приближении многочленами функций, являющихся дробными интегралами от суммируемых функций // Докл. НАН Украины. – 1998. – № 2. – С. 48 – 51.
21. *Моторный В. П., Моторная О. В.* О наилучшем L_1-приближении алгебраическими многочленами усеченных степеней и классов функций с ограниченной в L_1 производной // Изв. РАН. Сер. мат. – 1999. – № 3. – С. 147 – 168.
22. *Кофанов В. А.* Приближение классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1983. – **47**, № 5. – С. 1078 – 1090.
23. *Моторная О. В.* О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в пространстве L_1. – Киев, 1993. – 30 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; № 93 – 20).
24. *Моторная О. В.* Об асимптотических оценках наилучших приближений дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в пространстве L_1 // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 6. – С. 859 – 862.
25. *Моторная О. В.* Уточнение одного асимптотического результата С. М. Никольского // Оптимизация методов приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 63 – 69.
26. *Моторный В. П., Моторная О. В.* Наилучшее приближение классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1995. – **210**. – С. 171 – 188.
27. *Motornyi V. P., Motornaya O. V.* On the best approximation of the classes $W^r H^\alpha$ by algebraic polynomials in L_1 // E. J. Approxim. – 1995. – **1**, № 3. – P. 309 – 339.
28. *Моторный В. П., Моторная О. В.* Об асимптотическом поведении наилучших приближений классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем // Докл. РАН. – 1995. – **345**, № 3. – С. 306 – 307.
29. *Коган А. М.* Наилучшее приближение классов $W^r H^\omega$ алгебраическими полиномами в пространстве L_1 // Междунар. конф. „Теория приближений и гармонический анализ". – 1998. – С. 130 – 131.

30. *Кофанов В. А.* Приближение алгебраическими многочленами классов функций, являющихся дробными интегралами от суммируемых функций // Anal. math. – 1987. – **13**, № 3. – P. 214 – 229.
31. *Sinvel H.* Uniform approximation of differentiable function by algebraic polynomials // J. Approxim. Theory. – 1981. – **32**. – P. 1 – 8.
32. *Моторная О. В.* О наилучшем приближении классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в L_1 // Приближение функций и суммирование рядов. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1991. – С. 40 – 51.
33. *Brass H.* On the degree of approximation by polynomials in the L_1-norm // Open Problem in Approxim. Theory. – Singapore: SCT Publ., 1993. – P. 53 – 63.
34. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 295 – 322.
35. *Whitney H.* On functions with bounded n-th differences // J. Math. Pures et Appl. – 1957. – **36**, № 1. – P. 67 – 95.
36. *Дзядык В. К.* О приближении функций обыкновенными многочленами на конечном отрезке вещественной оси // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. –**22**, № 3. – С. 337 – 354.
37. *Freud G.* Uber die Approximation reeller stetigen Funktionen durch gewohnliche Polynome // Math. Ann. – 1959. – **137**, № 1. – S. 17 – 25.
38. *Тригуб Р. М.* Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1962. – **26**, № 2. – С. 261 – 280.
39. *Брудный Ю. А.* Обобщение одной теоремы А. Ф. Тимана //Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 6. – С. 1237 – 1240.
40. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении непрерывных и дифференцируемых функций алгебраическими многочленами на отрезке // Там же. – 1966. – **166**, № 2. – С. 281 – 283.
41. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1971. – **9**, № 4. – С. 441 – 447.
42. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 3. – С. 328 – 340.
43. *Лигун А. А.* О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 4. – С. 53 – 60.
44. *Темляков В. Н.* Приближение функций из класса W_∞^1 алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 4. – С. 597 – 602.
45. *Тригуб Р. М.* Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке // Там же. – 1993. – **54**, № 6. – С. 113 – 121.
46. *Брудный Ю. А.* Работы А. Ф. Тимана по полиномиальной аппроксимации функций // Материалы всесоюз. конф. по теории приближения функций. – 1991. – С. 13 – 17.
47. *Devore R. A.* Pointwise approximation by polynomials and splines // Теория приближения функций. – М.: Наука, 1977. – С. 132 – 141.
48. *Моторный В. П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 603 – 613.
49. *Моторный В. П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами //Там же. – № 7. – С. 940 – 951.
50. *Шалашова Л. Я.* Аппроксимационная теорема А. Ф. Тимана для функций, имеющих непрерывную производную дробного порядка // Докл. АН СССР. – 1969. – **188**, № 6. – С. 1248 – 1249.
51. *Бокша А. Н., Русак В. Н.* Рациональная аппроксимация сингулярных интегралов // Int. Conf. Approxim. Theory (Kaluga, 1996): Abstrs. – 1996. – **1**. – P. 38 – 39.
52. *Пекарский А. А.* Соотношения между наилучшими рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями в равномерной метрике // Ibid. – **2** – P. 168 – 169.
53. *Бокша А. Н.* Рациональная аппроксимация сингулярных интегралов с выпуклой плотностью // 2-а школа „Ряди Фур'є. Теорія і застосування": Тез. доп. – Київ, 1997. – С. 24 – 25.
54. *Моторная О. В.* О наилучшем приближении многочленами некоторых классов функций // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 1998. – Вип. 3. – С. 91 – 100.
55. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – **20**. – С. 197 – 206.
56. *Сунь-Юншень.* О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Там же. – 1961. – **25**. – С. 143 – 153.

Получено 07.09.99