УДК 519.65

Н. П. Корнейчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ*

We establish exact estimates of the variation of derivative $s^{(r)}(t)$ on a period of periodic polynomial spline $s(t)$ of order r and defect 1 with respect to a fixed partition of $[0, 2\pi)$ under the condition $\|s^{(r)}\|_X = 1$, $X = C$ or L_1.

Знайдено точні оцінки варіації похідної $s^{(r)}(t)$ на періоді періодичного поліноміального сплайна $s(t)$ порядку r дефекту 1 за фіксованим розбиттям $[0, 2\pi)$ та при умові $\|s^{(r)}\|_X = 1$, $X = C$ або L_1.

1. Специальная структура полиномиальных сплайнов существенным образом сказывается на их экстремальных свойствах, описываемых неравенствами для норм. В частности, при фиксированном равномерном разбиении точная верхняя грань для нормы $\| s^{(r)}\|$ r-й производной периодического сплайна $s(t)$ определяется только нормой $\| s\|$ самого сплайна [1] (§ 2.6). Если S_{nr} — множество 2π-периодических сплайнов $s(t)$ порядка r дефекта 1 по разбиению $\{k\pi/n\}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, то

$$\| s\|_C \geq K_r n^{-r} \| s^{(r)}\|_\infty \tag{1}$$

(K_r — константа Фавара [2, с. 105]), причем знак равенства имеет место для сплайна вида $s(t) = c\,\varphi_{nr}(t)$, где $\varphi_{nr}(t)$ — идеальный сплайн Эйлера, т. е. r-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_{n0}(t) = \operatorname{sgn} \sin nt$.

Заметим, что равенство в (1) достигается за счет максимальной вариации r-й производной сплайна $\varphi_{nr}(t)$, т. е. функции $\varphi_{n0}(t)$, которая принимает значения ± 1, попеременно меняя знак в точках $k\pi/n$. Для любого же сплайна $s(t) \in S_{nr}$ оценка (1) может оказаться очень грубой.

Возникает задача: если о сплайне $s(t)$ кроме информации о значении нормы $\| s^{(r)}\|_\infty$ известна еще и вариация $\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)})$, то что можно сказать о норме $\| s\|_C$ самого сплайна? Эту задачу мы рассмотрим при любом, необязательно равномерном, разбиении:

$$\Delta_{2n}:\ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{2n} = 2\pi. \tag{2}$$

Множество 2π-периодических сплайнов порядка r по разбиению (2) будем обозначать $S_r(\Delta_{2n})$, $r = 0, 1, 2, \ldots$. При этом нам будет удобно пользоваться величиной

$$\gamma_\infty(f) = \frac{\bigvee_0^{2\pi}(f)}{\|f\|_\infty} = \left\{ \bigvee_0^{2\pi}(f) : \|f\|_\infty = 1 \right\}.$$

Если $s(t) \in S_r(\Delta_{2n})$, то производная $s^{(r)}(t)$ есть кусочно-постоянная функция по разбиению (2) и очевидно, что

* Выполнена при финансовой поддержке International Science Foundation.

$$\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}) \le 4n\|s^{(r)}\|_\infty,$$

т. е. $\gamma_\infty(s^{(r)}) \le 4n$, причем знак равенства реализует, например, сплайн $s(t) = \varphi_{nr}(t)$. Оценку снизу для $\gamma_\infty(s^{(r)})$ при условии, что $s^{(r)}(t) \perp 1$, т. е. $\int_0^{2\pi} s^{(r)}(t)\,dt = 0$, дает следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\inf\left\{\bigvee_0^{2\pi}(s) : s(t) \in S_0(\Delta_{2n}),\ \|s\|_\infty = 1,\ s \perp 1\right\} = \frac{4\pi}{2\pi - \beta}, \tag{3}$$

где

$$\beta = \min_{1 \le k \le 2n}(t_k - t_{k-1}). \tag{4}$$

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что для некоторого сплайна $s(t) \in S_0(\Delta_{2n})$ такого, что $\|s\|_\infty = 1$ и $s(t) \perp 1$, выполняется неравенство

$$\bigvee_0^{2\pi}(s) < \frac{4\pi}{2\pi - \beta}. \tag{5}$$

Представим вариацию в виде

$$\bigvee_0^{2\pi}(s) = \bigvee_0^{2\pi}(s_+) + \bigvee_0^{2\pi}(s_-), \tag{6}$$

где $s_+(t)$ и $s_-(t)$ — положительная и отрицательная части функции $s(t)$.

Поскольку $\|s\|_\infty = 1$, то хотя бы одно из чисел $\|s_+\|_\infty$ и $\|s_-\|_\infty$ равно 1. Если, например, $\|s_+\|_\infty = 1$, то $\bigvee_0^{2\pi}(s_+) \ge 2$ и

$$\int_0^{2\pi} s_+(t)(t)\,dt \ge \beta.$$

Но тогда в силу (5) и (6)

$$\bigvee_0^{2\pi}(s_-) < \frac{4\pi}{2\pi - \beta} - 2 = \frac{2\beta}{2\pi - \beta},$$

откуда следует, что $\|s_-\|_\infty < \beta/(2\pi - \beta)$ и

$$\left|\int_0^{2\pi} s_-(t)\,dt\right| \le \|s_-\|_\infty(2\pi - \beta) < \beta,$$

т. е. $\int_0^{2\pi} s(t)\,dt \ne 0$, что противоречит условию. Нижняя грань в (3) достигается, в частности, на сплайне $s(t) \in S_0(\Delta_{2n})$, который принимает следующие значения:

$$s(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \beta]; \\ -\beta/(2\pi - \beta), & t \in (\beta, 2\pi]. \end{cases}$$

Таким образом, при фиксированном разбиении (2) минимальная вариация r-й производной сплайна $s(t) \in S_r(\Delta_{2n})$ определяется длиной β минимального промежутка разбиения (2). При любом фиксированном β, $0 < \beta < \pi$, обозначим через Δ_{2n}^{β} разбиение (2), в котором длина минимального промежутка равна β, т. е. выполняется (4), а через $S_r(\Delta_{2n}^{\beta})$ — множество сплайнов порядка r по разбиению Δ_{2n}^{β}.

Пусть $s_*(t)$ — сплайн из $S_r(\Delta_{2n}^{\beta})$ с минимальной вариацией r-й производной при условии $\| s_*^{(r)} \|_\infty = 1$, т. е.

$$s_*^{(r)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (t_{k-1}, t_k], \ t_k - t_{k-1} = \beta; \\ -\beta / (2\pi - \beta), & x \in (0, 2\pi] \setminus (t_{k-1}, t_k]. \end{cases}$$

Оценим норму $\| s_* \|_C$, считая, что $s_*(x) \perp 1$. Тогда

$$s_*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_{r+1}(x-t) s_*^{(r+1)}(t)\, dt ,$$

где $B_m(t)$ — функция Бернулли [2, с. 36],

$$s_*^{(r+1)}(t) = h\left[\delta(t - t_{k-1}) - \delta(t - t_k) \right], \qquad h = \frac{2\pi}{2\pi - \beta},$$

а $\delta(t)$ — δ-функция Дирака. Учитывая определение δ-функции, будем иметь

$$s_*(x) = \frac{h}{\pi}\left[B_{r+1}(x - t_{k-1}) - B_{r+1}(x - t_k) \right],$$

и, следовательно,

$$\| s_* \|_C = \frac{h}{\pi} \max_x \left| B_{r+1}(x) - B_{r+1}(x - \beta) \right|. \tag{7}$$

Так как

$$\left| B_{r+1}(x) - B_{r+1}(x-\beta) \right| = \begin{cases} 2 \left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos k(x - \beta/2) \sin (k\beta/2)}{k^{r+1}} \right|, & r = 0, 2, 4, \ldots ; \\ 2 \left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin k(x - \beta/2) \sin (k\beta/2)}{k^{r+1}} \right|, & r = 1, 3, 5, \ldots , \end{cases} \tag{8}$$

то при $r = 0, 2, 4, \ldots$ максимум в (7) достигается при $x = \beta/2$ и

$$\| s_* \|_C = \frac{2h}{\pi} \left| B_{r+1}(\beta/2) \right|, \qquad r = 0, 2, 4, 6, \ldots ;$$

при нечетном r максимум в (7) достигается в точках x_r, зависящих от r, причем $0 = x_1 < x_2 < \ldots < \pi/2$. Заметим, что при $r = 1$

$$\| s_* \|_C = \frac{h}{\pi} | B_2(0) - B_2(\beta) | = \frac{\beta}{2}.$$

Предыдущими рассуждениями доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого сплайна* $s(t) \in S_r(\Delta_{2n}^{\beta})$

$$\frac{4\pi}{2\pi-\beta} \le \gamma_\infty(s^{(r)}) \le 4n, \tag{9}$$

причем на множестве всех разбиений Δ_{2n}^{β} *неравенства точные. Если* $s_*(t) \in \in S_r(\Delta_{2n}^{\beta})$ *и* $\gamma_\infty(s^{(r)}) = 4\pi/(2\pi-\beta)$, *то при четном* r

$$\| s_* \|_C = \frac{4}{2\pi-\beta} \left| B_{r+1}(\beta/2) \right|,$$

а при нечетном r

$$\| s_* \|_C = \frac{4}{2\pi-\beta} \max_x \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(x-\beta/2) \sin(k\beta/2)}{k^{r+1}} \right|. \tag{10}$$

В частности, при $r=1$ $\| s_* \|_C = \beta/2$.

Следствие. *В случае равномерного разбиения, т. е. для* $s(t) \in S_{nr}$, *справедливы неравенства*

$$\frac{4n}{2n-1} \le \gamma_\infty(s^{(r)}) \le 4n.$$

Оба неравенства точные.

Заметим, что, как видно из (10), при нечетном $r \ge 3$ для нормы в C сплайна $s_*(t)$ нет явного выражения. Однако в этом случае, т. е. при всех $r = 1, 3, 5, \dots$, можно явно выразить норму $\|s_*\|_1$ этого сплайна в L_1. Действительно, при нечетном r

$$\| s_* \|_1 = \frac{h}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| B_{r+1}(x-\beta/2) - B_{r+1}(x+\beta/2) \right| dx =$$

$$= \frac{2h}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx \sin(k\beta/2)}{k^{r+1}} \right| dx, \quad h = \frac{2\pi}{2\pi-\beta}.$$

Дело в том, что сумма ряда, стоящего под знаком модуля, обращается в нуль с переменой знака ровно два раза на периоде в точках $x=0$ и $x=\pi$. Поэтому

$$\| s_* \|_1 = \frac{2h}{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\beta/2)}{k^{r+1}} \left(\int_0^{\pi} \sin kx\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin kx\, dx \right) \right|.$$

Окончательно

$$\| s_* \|_1 = \frac{8h}{\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin((2\nu-1)\beta/2)}{(2\nu-1)^{r+2}} \right|, \quad 0 < \beta \le \pi/n.$$

В частности, при $r=1$ $\| s_* \|_1 = \pi\beta/2$.

2. Наряду с (1) для $s(t) \in S_{nr}$ хорошо известно [2, с. 134] неравенство

$$\| s^{(r)} \|_1 \ge K_{r+1} n^{-r-1} \bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}),$$

знак равенства в котором также реализуют сплайны $s(t) = c\,\varphi_{nr}(t)$. Если рассматривать для $s(t) \in S_r(\Delta_{2n})$ отношение

$$\gamma_1(s^{(r)}) = \frac{\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)})}{\|s^{(r)}\|_1},$$

то, в отличие от $\gamma_\infty(s^{(r)})$, здесь оценка снизу не зависит от разбиения, зато зависит от разбиения оценка для $\gamma_1(s^{(r)})$ сверху.

Лемма 2. *Для любого сплайна $s(t) \in S_0(\Delta_{2n})$ при условии $s(t) \perp 1$ справедливы точные на всех разбиениях* (2) *неравенства*

$$\frac{2}{\pi} \le \frac{\bigvee_0^{2\pi}(s)}{\|s\|_1} \le \frac{2\pi}{\beta(2\pi - n\beta)}, \tag{11}$$

где $\beta = \min_k (t_k - t_{k-1})$. В случае равномерного разбиения, т. е. для $s(t) \in S_{n0}$, $s(t) \perp 1$,

$$\frac{2}{\pi} \le \frac{\bigvee_0^{2\pi}(s)}{\|s\|_1} \le \frac{2n}{\pi}.$$

Доказательство. В условиях леммы 2, если $s(t) = c_k$ на $(t_{k-1}, t_k]$, то

$$\bigvee_0^{2\pi}(s) \le 2\sum_{k=1}^{2n} |c_k|, \qquad \sum_{k=1}^{2n} c_k(t_k - t_{k-1}) = 0,$$

$$\| s \|_1 = \sum_{k=1}^{2n} |c_k|\,(t_k - t_{k-1}),$$

и ясно, что оценку сверху в (11) достаточно установить для сплайнов, имеющих на периоде максимальное число $2n$ перемен знака. Без ограничения общности можно полагать $\| s \|_1 = 1$. Если $n = 1$, то доказательство сводится к элементарному исследованию на экстремум функции $\bigvee_0^{2\pi}(s(a))$ для сплайна $s(a, t)$, постоянного на промежутках $(0, a]$ и $(a, 2\pi]$, $\beta \le a \le \pi$, удовлетворяющего условию $s(a, t) \perp 1$. Рассматривая последовательно случаи $n = 2, 3, \ldots$, убеждаемся, что среди сплайнов $s(t) \in S_0(\Delta_{2n})$, $s(t) \perp 1$, при фиксированном $\beta = \min_k (t_k - t_{k-1})$ и $\| s \|_1 = 1$ наибольшую вариацию на периоде имеет сплайн $s(t)$ периода $2\pi/n$, заданный на промежутке $(0, 2\pi/n]$ равенствами

$$s(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n\beta}, & 0 < t \le \beta; \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi - 2n\beta}, & \beta < t \le 2\pi/n. \end{cases} \tag{12}$$

Так как для этого сплайна $s(t)$

$$\bigvee_0^{2\pi}(s) = \frac{2\pi}{\beta(2\pi - n\beta)},$$

то правое неравенство в (11) и его точность доказаны.

Далее, если $s(t) \in S_0(\Delta_{2n})$ и $s(t) \perp 1$, то

$$\max_t s(t) - \min_t s(t) \le \frac{1}{2}\bigvee_0^{2\pi}(s),$$

а с другой стороны, при тех же условиях

$$\| s(t) \|_1 \le \pi\left[\max_t s(t) - \min_t s(t)\right],$$

т. е. левое неравенство в (11) также доказано. Оно превращается в равенство, если $s(t) = (1/2\pi)\operatorname{sgn}\sin t$.

Следствие. *Для любого сплайна* $s(t) \in S_r(\Delta_{2n})$, $r = 1, 2, \ldots$

$$\frac{2}{\pi} \le \gamma_1(s^{(r)}) \le \frac{2\pi}{\beta(2\pi - n\beta)}, \qquad \beta = \min_k (t_k - t_{k-1}). \tag{13}$$

Если $s(t) \in S_{nr}$, *то*

$$\frac{2}{\pi} \le \gamma_1(s^{(r)}) \le \frac{2n}{\pi}.$$

Все неравенства точные.

Пусть $s_*(t)$ — сплайн из $S_r(\Delta_{2n})$ периода $2\pi/n$, у которого $s_*^{(r)}(t)$ определяется правой частью равенств (12), причем $s_*(t) \perp 1$. Тогда

$$s_*(x) = \frac{1}{\pi n^r}\int_0^{2\pi} B_{r+1}(n(x-t))s^{(r+1)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{h}{\pi n^r}\int_0^{2\pi} B_{r+1}(n(x-t))[\delta(t) - \delta(t-\beta)]\,dt, \qquad h = \frac{\pi}{n\beta(2\pi - n\beta)}.$$

Таким образом,

$$s_*(x) = \frac{1}{n^{r+1}\beta(2\pi - n\beta)}\left[B_{r+1}(nx) - B_{r+1}(nx - n\beta)\right].$$

Рассматривая разложения (8), находим, что при четном r

$$\| s_* \|_C = \frac{2B_{r+1}(n\beta/2)}{n^{r+1}\beta(2\pi - n\beta)};$$

если же r нечетно, то $\| s_* \|_C$ выражается через сумму второго в (8) ряда в некоторой, зависящей от r, точке. Норму $\| s_* \|_1$ в случае нечетных r можно, как и при оценке $\gamma_\infty(s^{(r)})$, точно выразить через сумму числового ряда. При $r = 1$ $\| s_* \|_1 = \pi/4n$, т. е. не зависит от β.

Неравенства (9) и (13) для $s(t) \in S_r(\Delta_{2n})$ можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{4n}\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}) \le \|s^{(r)}\|_\infty \le \frac{2\pi-\beta}{4\pi}\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}),$$

$$\frac{\beta(2\pi-n\beta)}{2\pi}\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}) \le \|s^{(r)}\|_1 \le \frac{\pi}{2}\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}),$$

где $\beta = \min_k (t_k - t_{k-1})$. Из этих неравенств вытекают некоторые оценки (вообще говоря, неточные) для норм в C и L_p самого сплайна $s(x)$. Записав $s(x) \in \in S_r(\Delta_{2n})$ в виде свертки

$$s(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_r(x-t)s^{(r)}(t)\,dt,$$

будем иметь

$$\|s\|_C \le \frac{1}{\pi}\|B_r\|_1\,\|s^{(r)}\|_\infty \le \frac{2\pi-\beta}{4\pi^2}\|B_r\|_1\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}),$$

$$\|s\|_p := \|s\|_{L_p} \le \frac{1}{\pi}\|B_r\|_p\,\|s^{(r)}\|_1 \le \frac{1}{2}\|B_r\|_p\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}), \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|s\|_p \le \frac{1}{\pi}\|B_{r+1}\|_p\,\|s^{(r+1)}\|_1 = \frac{1}{\pi}\|B_{r+1}\|_p\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}) \le$$

$$\le \frac{2}{\beta(2\pi-n\beta)}\|B_{r+1}\|_p\,\|s^{(r)}\|_1.$$

3. Рассмотрим еще один аспект, связанный с неравенствами для норм полиномиальных сплайнов, учитывающими разбиение Δ_{2n}. Назовем разбиение (2) r-нормальным [2, с. 88], если в множестве $S_r(\Delta_{2n})$ существует идеальный сплайн $\varphi_r(\Delta_{2n}, t)$, имеющий на периоде $2n$ простых нулей $z_1 < z_2 < \ldots < z_{2n} < < z_1 + 2\pi$. Не всякое разбиение (2) является r-нормальным, но идеальный сплайн $\varphi_r(t)$ определяется r-нормальным разбиением с точностью до знака единственным образом.

С r-нормальным разбиением Δ_{2n} будем связывать не только идеальный сплайн $\varphi_r(\Delta_{2n}, t)$, но и число

$$A_r(\Delta_{2n}) = \min_k |\varphi_r(\Delta_{2n}, x_k)|,$$

где x_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, — точки экстремума сплайна $\varphi_r(\Delta_{2n}, t)$ на периоде:

$$z_1 < x_1 < z_2 < x_2 < z_3 < \ldots < z_{2n} < x_{2n} < z_1 + 2\pi.$$

Теорема 2. *Если разбиение* (2) r*-нормально, то справедливо неравенство*

$$A_r(\Delta_{2n}) \le \|\varphi_{nr}\|_C = K_r n^{-r}. \tag{14}$$

Доказательство. Рассуждаем от противного. Пусть разбиение (2) r-нормально, но

$$A_r(\Delta_{2n}) > K_r n^{-r},$$

т. е.

$$\varphi_r(\Delta_{2n}, x_k) > \|\varphi_{nr}\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Тогда разность $\delta(t) = \varphi_r(\Delta_{2n}, t) - \varphi_{nr}(t+\alpha)$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}^1$ меняет знак на периоде не менее $2n$ раз.

Выберем α таким образом, чтобы какой-нибудь узел равномерного разбиения $\tau_k = k\pi/n + \alpha$ совпадал с узлом t_ν разбиения (2) и в окрестности точки t_ν выполнялось равенство

$$\operatorname{sgn} \varphi_r^{(r)}(\Delta_{2n}, t) = \operatorname{sgn} \varphi_{nr}^{(r)}(t+\alpha). \tag{15}$$

Производная $\delta^{(r)}(t)$ есть кусочно-постоянная функция, принимающая значения 0 и ± 2. Но так как в точке t_ν меняют знак обе функции $\varphi_r^{(r)}(\Delta_{2n}, t)$ и $\varphi_{nr}^{(r)}(t+\alpha)$, причем выполняется равенство (15) вблизи t_ν, то множество

$$\{ t : t \in (t_\nu, t_\nu + 2\pi), \ |\delta^{(r)}(t)| > 0 \}$$

состоит не более чем из $2n-1$ интервала, а потому функция $\delta^{(r)}(t)$, а значит и $\delta(t)$, может поменять знак только $2n-2$ раза. Противоречие доказывает неравенство (14).

Из теоремы 2, с учетом (1), вытекает такое следствие.

Следствие. *Если разбиение* (2) r*-нормально, то для любого сплайна* $s(t) \in S_r(\Delta_{2n})$

$$\frac{\|s\|_C}{\|s^{(r)}\|_\infty} \geq A_r(\Delta_{2n}).$$

Неравенство точное.

1. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Получено 23.02.99