УДК 517.5

Н. П. Корнейчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов (Днепропетр. ун-т)

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ВЕРХНИХ ГРАНЕЙ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КЛАССАХ W^rH^ω И НЕКОТОРЫХ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

We show that the well-known results on estimates of upper bounds of functionals on the classes W^rH^ω of periodic functions may be considered as a special case of Kolmogorov type inequalities for support functions of convex sets. This enables us to prove a number of new statements concerning the approximation of classes W^rH^ω, to establish the equivalence of these statements, and to obtain new Bernstein–Nikol'skii type exact inequalities which estimate values of a support function of the class H^ω on derivatives of trigonometric polynomials or polynomial splines in terms of L_p-norms of polynomials or splines themselves.

Показано, що відомі результати про оцінки верхніх граней функціоналів на класах W^rH^ω періодичних функцій можна розглядати як спеціальний випадок нерівностей типу Колмогорова для опорних функцій опуклих множин. Це дозволило одержати ряд нових тверджень, пов'язаних з апроксимацією класів W^rH^ω, та встановити їх еквівалентність, а також одержати нові точні нерівності типу Бернштейна–Нікольського, які оцінюють значення опорної функції класу H^ω на похідних тригонометричних поліномів або поліноміальних сплайнів через L_p-норми самих поліномів або сплайнів.

1. Введение. Пусть C и L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространства 2π-периодических функций $x\colon R \to R$ с соответствующими нормами $\|x\|_p = \|x\|_{L_p}$, где

$$\|x\|_C := \max_{t \in R} |x(t)|,$$

$$\|x\|_{L_p} := \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}, \quad \text{если} \quad 1 \le p < \infty,$$

и

$$\|x\|_{L_\infty} := \sup_{t \in R} \operatorname{vrai} |x(t)|.$$

Для заданных $s \in [1, \infty]$ и $r \in N$ обозначим через L_s^r множество функций $x \in C$ таких, что $x^{(r-1)}$ $(x^{(0)} := x)$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_s$; $W_s^r = \{x \in L_s^r\colon \|x^{(r)}\|_s \le 1\}$. Пусть далее L_V^r — множество функций $x \in C$ таких, что $x^{(r-1)}$ $(x^{(0)} := x)$ локально абсолютно непрерывна, а $x^{(r)}$ является функцией ограниченной вариации на периоде; $W_V^r = \left\{x \in L_V^r\colon \bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)}) \le 1\right\}$. Через H^ω будем обозначать множество непрерывных 2π-периодических функций $x(\cdot)$ таких, что $\omega(x, t) \le \omega(t)$, $t > 0$, где $\omega(x, t)$ — модуль непрерывности функции x, т. е. $\omega(x, t) := \sup\{|x(t_1) - x(t_2)|\colon |t_1 - t_2| \le t\}$, а $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности. В случае, когда $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, вместо H^ω будем писать H^α. Через W^rH^ω обозначим множество r раз непрерывно дифференцируемых функций $x \in C$ таких, что $x^{(r)} \in H^\omega$.

© Н. П. КОРНЕЙЧУК, В. Ф. БАБЕНКО, В. А. КОФАНОВ, С. А. ПИЧУГОВ, 2000

Во многих вопросах анализа и его приложений используются неравенства для норм промежуточных производных функций $x \in L_s^r$ вида

$$\|x^{(k)}\|_{L_q} \leq \Phi(\|x\|_{L_p}, \|x^{(r)}\|_{L_s}) \tag{1}$$

с некоторой не зависящей от x функцией Φ и их аналоги для непериодических функций. Впервые неравенства такого типа возникли в работе Г. Харди и Дж. Литтлвуда [1] в случае $p = q = s = \infty$. Традиционными являются аддитивная форма записи таких неравенств

$$\|x^{(k)}\|_{L_q} \leq A\|x\|_{L_p} + B\|x^{(r)}\|_{L_s}, \tag{2}$$

или мультипликативная форма

$$\|x^{(k)}\|_{L_q} \leq K\|x\|_{L_p}^{\alpha} \|x^{(r)}\|_{L_s}^{\beta}. \tag{3}$$

Особый интерес представляют неравенства типа (2) или (3) с неулучшаемыми константами, и исследования многих математиков были направлены на получение именно таких (точных) неравенств. Один из первых полных результатов, связанных с точными неравенствами вида (3), получен А. Н. Колмогоровым [2]. После этого такие неравенства стали называть неравенствами типа Колмогорова. Обзор многих результатов для непериодических функций и библиографию можно найти в работах [3, 4]. Изложение ряда результатов, полученных в периодическом случае, см. в [5–8].

При решении многих экстремальных задач теории приближений выяснилось, что они тесно связаны с точными неравенствами вида (1)–(3). Важную роль в этом плане сыграли работы [9, 10], в которых метод промежуточного приближения был успешно применен для точного решения задачи наилучшего приближения классов $W^r H^{\omega}$ тригонометрическими полиномами, и работы [11, 12] о приближении неограниченных операторов ограниченными. Исследованию этих связей посвящены работы [13, 14] (для функций, заданных на R или R_+) и [15, 16] (для периодических функций).

Заметим, что норму $\|x\|_{L_p}$ в пространстве L_p можно трактовать как значение на элементе x опорной функции (см. определение в п. 4) единичного шара сопряженного пространства. Поэтому неравенства типа (1) являются представителями более общих неравенств для опорных функций выпуклых множеств.

В работе [17] доказана весьма общая теорема (теорема эквивалентности), дающая описание связей с другими задачами неравенств типа (1) для опорных функций выпуклых множеств и включающая в себя многие из упомянутых выше результатов такого рода.

С другой стороны, в работах [18, 15] были получены оценки верхних граней функционалов на классах $W^r H^{\omega}$, которые послужили основой решения многих принципиально важных экстремальных задач теории приближений.

Цель данной статьи — показать, что упомянутые оценки верхних граней функционалов на классах $W^r H^{\omega}$ можно трактовать как неравенства типа Колмогорова для опорных функций выпуклых множеств и с помощью теоремы эквивалентности включить их в ряд эквивалентных утверждений, часть из которых известна, а часть является новой.

Кроме того, в статье приведены некоторые новые неравенства для верхних граней функционалов и даны приложения таких неравенств к исследованию экстремальных свойств полиномов и сплайнов.

В п. 2 приведены некоторые известные точные неравенства типа Колмогорова для периодических функций, которые уже нашли важные приложения в теории аппроксимации и будут использованы в статье. Здесь же приведены некоторые точные неравенства типа Бернштейна для тригонометрических полиномов и периодических полиномиальных сплайнов.

В п. 3 известные результаты [18, 15] (см. также [5] (гл. 7), [19] (гл. 7)) об оценках верхних граней функционалов на классах $W^r H^\omega$ записаны как неравенства типа Колмогорова. Здесь же приведены некоторые новые неравенства такого типа.

В п. 4 приведена общая теорема эквивалентности [17] (теорема 9), сопоставление которой с неравенствами из п. 3 позволило включить эти неравенства в серию эквивалентных утверждений (теорема 10).

Наконец, в п. 5 с помощью неравенств из п. 3 получены некоторые новые неравенства типа Бернштейна – Никольского для тригонометрических полиномов и полиномиальных сплайнов.

Некоторые результаты данной статьи были анонсированы в [20].

2. Некоторые точные неравенства для производных периодических функций. Приведем некоторые известные неравенства типа Колмогорова для периодических функций, которые будут использоваться в дальнейшем.

Для данного $r \in N$ через $\varphi_r(t)$, $t \in R$, обозначим r-й периодический интеграл, имеющий нулевое среднее значение на периоде, от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sign} \sin t$. Пусть также $g_r(t) := \dfrac{1}{4}\varphi_{r-1}(t)$. Для $\lambda \in R$, $\lambda > 0$, положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

Теорема 1. *Для любой функции* $x \in L^r_\infty$, *любого* $k \in N$, $k < r$, *и любого* $q \in [1, \infty]$ *справедливо следующее точное неравенство*:

$$\|x^{(k)}\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{k/r}. \tag{4}$$

Неравенство (4) *обращается в равенство для любой функции вида* $x(t) = a\varphi_{n,r}(t+b)$, $n \in N$, $a, b \in R$.

Для $q = \infty$ неравенство (4) является частным случаем неравенства Колмогорова [2]. Для $q < \infty$ это неравенство доказано в [15].

Следующее неравенство является периодическим вариантом результатов Стейна [21]: для любой функции $x \in L^r_1$ и для любого $k \in N$, $k < r$, справедливо точное неравенство

$$\|x^{(k)}\|_1 \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_1^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_1^{k/r}. \tag{5}$$

Из (5), очевидно, следует неулучшаемое неравенство

$$E_0(x^{(k)})_1 \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} E_0(x)_1^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_1^{k/r}, \tag{6}$$

где $E_0(x)_p$ — наилучшее приближение константой функции x в пространстве L_p.

Для функций $x \in L^r_V$ и для всех $k = 0, 1, \ldots, r-1$ имеет место также следующий вариант неравенства (5) (см., например, [6], § 1.7):

$$\bigvee_0^{2\pi}(x^{(k)}) \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \bigvee_0^{2\pi}(x)^{1-k/r} \bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})^{k/r}. \tag{7}$$

Для $x \in L_1^r$, $r, k \in N$, $k < p$, $p \in [1, \infty]$ в [22] приведено следующее обобщение неравенства Стейна:

$$\|x^{(k)}\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\|g_{r-k}\|_1}{\|g_r\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \|x^{(r)}\|_1^{1-\alpha}, \tag{8}$$

где $\alpha = \dfrac{r-k}{r-1+1/p}$, а $\nu(x)$ — число перемен знака функции x на периоде.

При $p = 1$ неравенство (8) превращается в неравенство Стейна (5).

Теперь приведем некоторые известные неравенства типа Бернштейна для производных тригонометрических полиномов и периодических полиномиальных сплайнов. Через $\mathcal{T}_{2n+1}$, $n \in N$, будем обозначать множество тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Пусть $k, n \in N$, $1 \le p \le \infty$. Тогда для любого $\tau \in \mathcal{T}_{2n+1}$ справедливы следующие неулучшаемые неравенства:

$$\|\tau^{(k)}\|_p \le n^k \|\tau\|_p, \tag{9}$$

$$\|\tau^{(k)}\|_p \le n^k \|\cos(\cdot)\|_p \|\tau\|_\infty, \tag{10}$$

$$\|\tau^{(k)}\|_1 \le \frac{4n^k}{\|\cos(\cdot)\|_p} \|\tau\|_p. \tag{11}$$

Неравенство (9) при $p = \infty$ принадлежит Бернштейну, а при остальных p — Зигмунду (см., например, [23, с. 21]). Неравенство (10) доказано Л. В. Тайковым [24], а неравенство (11) — А. А. Лигуном [22].

Через $S_{2n,r}$, $n, r \in N$, обозначим множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами в точках $k\pi/n$, $n \in N$, $k \in Z$.

Пусть $k, r, n \in N$, $k \le r$, $1 \le p \le \infty$. Тогда для любого $s \in S_{2n,r}$ справедливы следующие неулучшаемые неравенства:

$$\|s^{(k)}\|_p \le n^k \frac{\|\varphi_{r-k}\|_p}{\|\varphi_r\|_\infty} \|s\|_\infty, \tag{12}$$

$$\|s^{(k)}\|_1 \le n^k \frac{\|\varphi_{r-k}\|_1}{\|\varphi_r\|_p} \|s\|_p, \tag{13}$$

$$\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}) \le 4n^{r+1} \frac{E_0(s)_1}{\|\varphi_r\|_1}. \tag{14}$$

Неравенство (12) при $p = \infty$ получено В. М. Тихомировым [25], а при остальных p — А. А. Лигуном [26]. Неравенство (13) при $p = 1$ и неравенство (14) получены Ю. Н. Субботиным [27]. Неравенство (13) при $p \in (1, \infty]$ доказано А. А. Лигуном [22]. Подробное изложение известных неравенств типа (9)–(14) можно найти в [6].

3. Неравенства для верхних граней функционалов как неравенства типа Колмогорова. Для имеющей нулевое среднее значение функции y через $I_r y$ обозначим r-й периодический интеграл от y, также имеющий нулевое среднее значение на периоде.

Для $a > 0$ положим [19, с. 297]

$$R_{a,0}(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad 0 \le t < a; \\ 0, & \text{если} \quad t \ge a, \end{cases}$$

и

$$R_{a,k}(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2} \int\limits_0^{a-t} R_{a,k-1}(u)\, du, & \text{если} \quad 0 \le t < a; \\ 0, & \text{если} \quad t \ge a, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Через $R(f, \cdot)$ обозначим Σ-перестановку функции f [19, с. 294]. Отметим, что

$$R(\varphi_r, t) = 4R_{\pi,r}(t), \qquad r \in N. \tag{15}$$

Мы будем использовать следующие свойства функции $R_{a,k}(t)$ (см., например, [19], § 7.1.4):

$$R_{a,k}(\lambda t) = \lambda^k R_{a/\lambda,k}(t), \qquad \lambda > 0, \quad k \in N; \tag{16}$$

$$\int\limits_0^{\pi} R_{\pi,r-1}(t)\, dt = \| \varphi_r \|_{\infty}. \tag{17}$$

Пусть $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности, $p = 1$ или $p = \infty$, $r \in R$, $r > 0$, $k \in N$. Для $\lambda > 0$ положим

$$\Psi^p_{r,k}(\lambda) := 2^{1/p' - 1/p} \lambda^{k/r} \int\limits_0^{\pi} R_{\pi,k-1/p}(\pi - t)\, \omega(t\lambda^{1/r})\, dt, \tag{18}$$

где $p' = p/(p-1)$, и отметим, что

$$\Psi^p_{1,k}(\lambda^{1/r}) = \Psi^p_{r,k}(\lambda). \tag{19}$$

Положим также (здесь $r \in N$)

$$\Phi^p_{r,k}(\lambda) := \Psi^p_{r,k}\left(\frac{\lambda}{\|\varphi_r\|_{\infty}} \right). \tag{20}$$

Приведем некоторые свойства этих функций.

Лемма. *Пусть* $p = 1$ *или* $p = \infty$, $r \ge k + 1$ *и* ω *— выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда* $\Psi^p_{r,k}(\lambda)$ *является выпуклым вверх модулем непрерывности.*

Доказательство. Из (18) получаем

$$\Psi^p_{r,k}(\lambda) := 2^{1/p' - 1/p} \int\limits_0^{\pi} R_{\pi,k-1/p}(\pi - t) [\lambda^{k/r}\, \omega(t\lambda^{1/r})]\, dt.$$

Положим $U(\lambda) = \lambda^{\alpha}\omega(\lambda^{\beta})$. Достаточно показать, что $U(\lambda)$ является выпуклым вверх модулем непрерывности, если $\alpha+\beta \le 1$, $\alpha, \beta \ge 0$.

Для любых $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ в силу выпуклости $\omega(t)$ имеем

$$\frac{1}{2}[U(\lambda_1)+U(\lambda_2)] = \frac{\lambda_1^{\alpha}}{2}\omega(\lambda_1^{\beta}) + \frac{\lambda_2^{\alpha}}{2}\omega(\lambda_2^{\beta}) =$$

$$= \frac{\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha}}{2}\left[\frac{\lambda_1^{\alpha}}{\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha}}\omega(\lambda_1^{\beta}) + \frac{\lambda_2^{\alpha}}{\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha}}\omega(\lambda_2^{\beta})\right] \le$$

$$\le \frac{\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha}}{2}\omega\left[\frac{\lambda_1^{\alpha+\beta}}{\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha}} + \frac{\lambda_2^{\alpha+\beta}}{\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha}}\right].$$

Используя неравенство $\omega(t) \le \gamma\omega\left(\frac{t}{\gamma}\right)$, $\gamma > 1$, вытекающее из выпуклости вверх $\omega(t)$, и полагая в нем

$$\gamma = \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha}}{2}\right)^{-1},$$

получаем

$$\frac{1}{2}[U(\lambda_1)+U(\lambda_2)] \le \frac{\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha}}{2}\gamma\omega\left[\frac{\lambda_1^{\alpha+\beta}}{\gamma(\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha})} + \frac{\lambda_2^{\alpha+\beta}}{\gamma(\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha})}\right] =$$

$$= \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^{\alpha}\omega\left[\lambda_1^{\alpha+\beta}\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^{-\alpha} + \lambda_2^{\alpha+\beta}\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^{-\alpha}\right].$$

Используя выпуклость вверх функции $t^{\alpha+\beta}$, имеем

$$\frac{1}{2}[U(\lambda_1)+U(\lambda_2)] \le$$

$$\le \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^{\alpha}\omega\left[\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^{\alpha+\beta}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^{-\alpha}\right] =$$

$$= \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^{\alpha}\omega\left[\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^{\beta}\right] = U\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right).$$

Лемма доказана.

Если функция $f(t)$ выпукла вверх, то функция $f(t)/t$ монотонно не возрастает. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие. *При* $p=1$ *или* $p=\infty$ *функция* $t\Psi_{r,k}^{p}\left(\frac{1}{t}\right)$ *монотонно не убывает.*

Для $x \in L_1$, $x \perp 1$, положим

$$S_{H^{\omega}}(x) := \sup_{f \in H^{\omega}} \int_0^{2\pi} f(t)\,x(t)\,dt.$$

Известны следующие оценки для $S_{H^{\omega}}(x^{(k)})$, $x \in L_V^r$ или $x \in L_1^r$.

Теорема 2 (см., например, [19], теорема 7.1.10). *Пусть* ω — *выпуклый вверх модуль непрерывности. Если* $x \in W_V^r$, $r \in N$, $x \neq \text{const}$ *и* $a > 0$ *выбрано из условия*

$$E_0(x)_1 = \|R_{a,r}\|_1, \tag{21}$$

то

$$S_{H^\omega}(x') \le \frac{1}{2}\int_0^a R_{a,r-1}(a-t)\,\omega(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^r \int_0^\pi R_{\pi,r-1}(\pi-t)\,\omega\left(\frac{at}{\pi}\right)dt. \tag{22}$$

Если $x \in W_1^r$, $r \in N$, $r \ge 2$, $x \neq \text{const}$ *и* $a > 0$ *выбрано из условия*.

$$E_0(x)_1 = \|R_{a,r-1}\|_1, \tag{23}$$

то

$$S_{H^\omega}(x') \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^{r-1} \int_0^\pi R_{\pi,r-2}(\pi-t)\,\omega\left(\frac{at}{\pi}\right)dt. \tag{24}$$

При $a = \pi/n$, $n = 1, 2, \ldots$, оценки (22) и (24) точны на классах W_V^r и W_1^r (см., например, [19], теорема 7.1.10). Знак равенства в (22) реализуется на функции $x(t) = g_{n,r+1}(t)$. Точность оценки (24) следует из того факта, что функция $x(t) = g_{n,r}(t)$ является пределом в соответствующей топологии последовательности функций из W_1^r. При доказательстве точности существенно используется нечетная $2\pi/n$-периодическая функция, определяемая на $[0, \pi/n]$ соотношениями

$$f_n(\omega, t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\omega(2t), & \text{если} \quad t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right]; \\ \dfrac{1}{2}\,\omega\left(2\left(\dfrac{\pi}{n} - t\right)\right), & \text{если} \quad t \in \left[\dfrac{\pi}{2n}, \dfrac{\pi}{n}\right]. \end{cases} \tag{25}$$

Известно (см., например, [5, с. 159]), что если ω — выпуклый вверх модуль непрерывности, то $f_n(\omega, t) \in H^\omega$.

Теорему 2 можно переформулировать в виде неравенства типа Колмогорова следующим образом.

Теорема 3. *Пусть* $r \in N$, ω — *выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любой функции* $x \in W_V^r$

$$S_{H^\omega}(x') \le \Phi^1_{r+1,r}(E_0(x)_1), \tag{26}$$

и для любой функции $x \in L_V^r$

$$S_{H^\omega}(x') \le \bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})\,\Phi^1_{r+1,r}\left(\frac{E_0(x)_1}{\bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})}\right). \tag{27}$$

Если $r \geq 2$, *то для любой функции* $x \in W_1^r$.

$$S_{H^\omega}(x') \leq \Phi^1_{r,r-1}(E_0(x)_1), \tag{28}$$

и для любой функции $x \in L_1^r$, $r \geq 2$,

$$S_{H^\omega}(x') \leq \|x^{(r)}\|_1 \, \Phi^1_{r,r-1}\left(\frac{E_0(x)_1}{\|x^{(r)}\|_1}\right). \tag{29}$$

***Доказательство теоремы* 3.** Пусть $x \in W_V^r$. Если $x = \text{const}$, то соотношения (26) и (28) очевидны. Пусть $x \neq \text{const}$. Выберем a из условия (21). Используя (16) и (17), представим $\| R_{a,r} \|_1$ в виде

$$\| R_{a,r} \|_1 = \int_0^a R_{a,r}(t)\, dt = \int_0^a R_{a,r}\left(\frac{a}{\pi}\frac{\pi t}{a}\right) dt = \left(\frac{a}{\pi}\right)^r \int_0^a R_{\pi,r}\left(\frac{\pi t}{a}\right) dt =$$

$$= \left(\frac{a}{\pi}\right)^{r+1} \int_0^\pi R_{\pi,r}(t)\, dt = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{r+1} \|\varphi_{r+1}\|_\infty .$$

Тогда согласно условию (21) имеем

$$\frac{a}{\pi} = \left(\frac{E_0(x)_1}{\|\varphi_{r+1}\|_\infty}\right)^{1/(r+1)}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (22), получаем

$$S_{H^\omega}(x') \leq \frac{1}{2}\left(\frac{E_0(x)_1}{\|\varphi_{r+1}\|_\infty}\right)^{r/(r+1)} \int_0^\pi R_{\pi,r-1}(\pi - t)\, \omega\left(t\left(\frac{E_0(x)_1}{\|\varphi_{r+1}\|_\infty}\right)^{1/(r+1)}\right) dt .$$

Принимая во внимание соотношения (18) и (20), находим

$$S_{H^\omega}(x') \leq \Psi^1_{r+1,r}\left(\frac{E_0(x)_1}{\|\varphi_{r+1}\|_\infty}\right) = \Phi^1_{r+1,r}(E_0(x)_1). \tag{31}$$

Неравенство (26) доказано.

Если $x \in L_V^r$, то

$$\frac{x}{\bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})} \in W_V^r$$

и из (26) имеем

$$S_{H^\omega}\left(\frac{x'}{\bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})}\right) \leq \Phi^1_{r+1,r}\left(\frac{E_0(x)_1}{\bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})}\right)$$

или

$$S_{H^\omega}(x') \leq \bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})\, \Phi^1_{r+1,r}\left(\frac{E_0(x)_1}{\bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})}\right).$$

Соотношения (26) и (27) доказаны. Соотношения (28) и (29) выводятся из (24) аналогично.

Используя неравенства Стейна, (27) и (29), докажем следующее обобщение теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть* $r, k \in N$, $k \le r$, ω — *выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любой функции* $x \in L_V^r$

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})\, \Phi^1_{r+1,r+1-k}\left(\frac{E_0(x)_1}{\bigvee_0^{2\pi}(x^{(r)})}\right), \tag{32}$$

а для любой функции $x \in L_1^r$

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \|x^{(r)}\|_1\, \Phi^1_{r,r-k}\left(\frac{E_0(x)_1}{\|x^{(r)}\|_1}\right). \tag{33}$$

Приведем доказательство только соотношения (33).

Заметим, что $x^{(k-1)} \in L_1^{r-k+1}$. Чтобы оценить $S_{H^\omega}(x^{(k)})$, применим неравенство (29):

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \|x^{(r)}\|_1\, \Phi^1_{r-k+1,r-k}\left(\frac{E_0(x^{(k-1)})_1}{\|x^{(r)}\|_1}\right). \tag{34}$$

Если $k > 1$, то применим неравенство Стейна (6) для оценки $E_0(x^{(k-1)})_1$. Учитывая, что функция $\Phi^1_{r-k+1,r-k}$ монотонно неубывающая согласно доказанной лемме, получаем

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \|x^{(r)}\|_1\, \Phi^1_{r-k+1,r-k}\left(\frac{\|\varphi_{r-k+1}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{(r-k+1)/r}}\left(\frac{E_0(x)_1}{\|x^{(r)}\|_1}\right)^{(r-k+1)/r}\right). \tag{35}$$

При $k = 1$ соотношение (35) совпадает с (34). Применяя определения (20) и (19), для любого $\lambda > 0$ имеем

$$\Phi^1_{r-k+1,r-k}\left(\frac{\|\varphi_{r-k+1}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{(r-k+1)/r}}\lambda^{(r-k+1)/r}\right) =$$

$$= \Psi^1_{r-k+1,r-k}\left(\frac{\|\varphi_{r-k+1}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{(r-k+1)/r}}\frac{\lambda^{(r-k+1)/r}}{\|\varphi_{r-k+1}\|_\infty}\right) =$$

$$= \Psi^1_{r-k+1,r-k}\left(\left(\frac{\lambda}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{(r-k+1)/r}\right) = \Psi^1_{1,r-k}\left(\left(\frac{\lambda}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{1/r}\right) =$$

$$= \Psi^1_{r,r-k}\left(\frac{\lambda}{\|\varphi_r\|_\infty}\right) = \Phi^1_{r,r-k}(\lambda). \tag{36}$$

Неравенство (33) теперь следует из (35) и (36).

Соотношение (32) можно доказать аналогично, используя неравенство (27) вместо неравенства (29) и неравенство (7) вместо (6).

Запишем теперь в виде неравенства типа Колмогорова оценку для $S_{H^\omega}(x^{(k)})$, $x \in L^r_\infty$.

Теорема 5 [5] (теорема 7.3.2). *Пусть* $x \in W^r_\infty$, $r, k \in N$, $2 \le k \le r$, ω — *выпуклый вверх модуль непрерывности и число* $b > 0$ *выбрано из условия*

$$E_0(x)_\infty = b^r \|\varphi_r\|_\infty. \tag{37}$$

Тогда

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \int_0^\pi R(x^{(k-1)}, t)\,\omega'(t)\,dt \le b^{r-k}\int_0^{\pi b} R\left(\varphi_{r-k+1}, \frac{t}{b}\right)\omega'(t)\,dt. \tag{38}$$

Неравенство (38) *при* $b = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, *неулучшаемо и обращается в равенство при* $x(t) = \varphi_{n,r}(t)$.

Из теоремы 5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $r, k \in N$, $2 \le k \le r$, ω — *выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любой функции* $x \in W^r_\infty$

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \Phi^\infty_{r,r-k}(E_0(x)_\infty), \tag{39}$$

и для любой функции $x \in L^r_\infty$

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \|x^{(r)}\|_\infty\, \Phi^\infty_{r,r-k}\left(\frac{E_0(x)_\infty}{\|x^{(r)}\|_\infty}\right). \tag{40}$$

Доказательство. Зафиксируем любую функцию $x \in W^r_\infty$. Выберем b из условия (37), т. е.

$$b = \left(\frac{E_0(x)_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{1/r}.$$

Из (38) следует, что

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le b^{r-k}\int_0^{\pi b} R\left(\varphi_{r-k+1}, \frac{t}{b}\right)\omega'(t)\,dt.$$

Используя равенство (15), производя замену переменных в последнем интеграле и интегрируя по частям, перепишем это соотношение следующим образом:

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le 4b^{r-k}\int_0^{\pi b} R_{\pi,r-k+1}\left(\frac{t}{b}\right)\omega'(t)\,dt =$$

$$= 4b^{r-k+1}\int_0^{\pi} R_{\pi,r-k+1}(t)\,\omega'(tb)\,dt = 2b^{r-k}\int_0^{\pi} R_{\pi,r-k}(\pi - t)\,\omega(tb)\,dt.$$

Таким образом,

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le 2\left(\frac{E_0(x)_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{(r-k)/r}\int_0^{\pi} R_{\pi,r-k}(\pi - t)\,\omega\left(t\left(\frac{E_0(x)_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{1/r}\right)dt \tag{41}$$

для любой функции $x \in W^r_\infty$.

Неравенство (39) вытекает из (41), (18) и (20). Неравенство (40) следует из (39).

Комбинируя теоремы 4 и 6, получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* $p=1$ *или* $p=\infty$, $r,l\in N$, $1+1/p'\le l\le r$, ω — *выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любой функции* $x\in L_p^r$

$$S_{H^\omega}(x^{(l)}) \le \|x^{(r)}\|_\infty \, \Phi^p_{r,r-l}\left(\frac{E_0(x)_p}{\|x^{(r)}\|_p}\right). \tag{42}$$

Для любой функции $x\in L_p$, $x\neq\theta_{L_p}$, *с нулевым средним значением на периоде и всех* $k=0,1,\ldots,r-1-1/p'$

$$S_{W^kH^\omega}(x) := \sup_{f\in W^kH^\omega}\int_0^\pi f(t)\,x(t)\,dt \le \|x\|_p \, \Phi^p_{r,k}\left(\frac{E_0(I_r x)_p}{\|x\|_p}\right). \tag{43}$$

В случае, когда $\omega(t)=t^\alpha$ для $t\in[0,\pi]$, $\alpha\in(0,1]$, неравенство (42) имеет вид

$$S_{H^\alpha}(x^{(l)}) \le E_0(x)_p^{1-(l-\alpha)/r}\,\|x^{(r)}\|_p^{(l-\alpha)/r}\,\frac{2^{1/p'-1/p}}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-(l-\alpha)/r}}\int_0^\pi R_{\pi,r-l-1/p}(\pi-t)\,t^\alpha\,dt .$$

Напомним, что через $\nu(x)$ мы обозначаем число перемен знака функции x на периоде. Имеет место следующее обобщение неравенства (33).

Теорема 8. *Пусть* $r,k\in N$, $1<k\le r$, ω — *выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любой функции* $x\in L_1^r$ *и любого* $p\ge 1$

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \|x^{(r)}\|_1 \, \Phi^{1,p}_{r-k+1/p,r-k}\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p}\frac{E_0(x)_p}{\|x^{(r)}\|_1}\right), \tag{44}$$

где

$$\Phi^{1,p}_{r-1+1/p,r-k}(\lambda) := \Psi^1_{r-1+1/p,r-k}\left(\frac{\lambda}{\|g_r\|_p}\right).$$

Доказательство. Для функций $x\in L_1^r$ справедливо неравенство (34). Используя неравенство (8) для оценки $E_0(x^{(k-1)})_1$ и учитывая монотонность функции $\Phi^1_{r-k+1,r-k}$, для любого $p\in[1,\infty)$ имеем $\left(\text{здесь } \alpha=\dfrac{r-k+1}{r-1+1/p}\right)$

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le$$

$$\le \|x^{(r)}\|_1\,\Phi^1_{r-k+1,r-k}\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha}\frac{\|g_{r-k+1}\|_1}{\|g_r\|_p^\alpha}E_0(x)_p^\alpha\,\|x^{(r)}\|_p^{1-\alpha}\,\frac{1}{\|x^{(r)}\|_1}\right)=$$

$$= \|x^{(r)}\|_1\,\Phi^1_{r-k+1,r-k}\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha}\frac{\|g_{r-k+1}\|_1}{\|g_r\|_p^\alpha}\left(\frac{E_0(x)_p}{\|x^{(r)}\|_1}\right)^\alpha\right).$$

Применяя (20), равенство $g_r=\dfrac{1}{4\varphi_{r-1}}$ и соотношение (19), получаем

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le$$

$$\le \|x^{(r)}\|_1 \Psi^1_{r-k+1,r-k}\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\|g_{r-k+1}\|_1}{\|\varphi_{r-k+1}\|_\infty}\left(\frac{E_0(x)_p}{\|g_r\|_p\|x^{(r)}\|_1}\right)^\alpha\right) =$$

$$= \|x^{(r)}\|_1 \Psi^1_{r-k+1,r-k}\left(\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p} \frac{E_0(x)_p}{\|g_r\|_p\|x^{(r)}\|_1}\right)^\alpha\right) =$$

$$= \|x^{(r)}\|_1 \Psi^1_{1,r-k}\left(\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p} \frac{E_0(x)_p}{\|g_r\|_p\|x^{(r)}\|_1}\right)^{\alpha/(r-k+1)}\right).$$

Учитывая значение α, соотношение (19) и определение функции $\Phi^{1,p}_{r-1+1/p,r-k}(\lambda)$, имеем

$$\|x^{(r)}\|_1 \Psi^1_{1,r-k}\left(\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p} \frac{E_0(x)_p}{\|g_r\|_p\|x^{(r)}\|_1}\right)^{1/(r-1+1/p)}\right) =$$

$$= \|x^{(r)}\|_1 \Psi^1_{r-1+1/p,r-k}\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p} \frac{E_0(x)_p}{\|g_r\|_p\|x^{(r)}\|_1}\right) =$$

$$= \|x^{(r)}\|_1 \Phi^{1,p}_{r-1+1/p,r-k}\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p} \frac{E_0(x)_p}{\|x^{(r)}\|_1}\right).$$

Теорема 8 доказана.

С помощью определений (18) и (20) можно записать неравенство (44) в следующем виде:

$$S_{H^\omega}(x^{(k)}) \le \|x^{(r)}\|_1 \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p} \frac{E_0(x)_p}{\|x^{(r)}\|_1\|g_r\|_p}\right]^{(r-k)/(r-1+1/p)} \times$$

$$\times \int_0^\pi R_{\pi,r-k-1}(\pi-t)\,\omega\left(t\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p}\left(\frac{E_0(x)_p}{\|x^{(r)}\|_1\|g_r\|_p}\right)^{1/(r-1+1/p)}\right)dt.$$

В случае, когда $\omega(t) = t^\alpha$ для $t \in [0,\pi]$, $\alpha \in (0,1]$, последнее неравенство принимает вид

$$S_{H^\alpha}(x^{(k)}) \le E_0(x)_p^{(r-k+\alpha)/(r-1+1/p)}\|x^{(r)}\|_1^{(k-1-\alpha+1/p)/(r-1+1/p)} \times$$

$$\times \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{1-1/p} \frac{1}{\|g_r\|_p}\right]^{(r-k+\alpha)/(r-1+1/p)} \int_0^\pi R_{\pi,k-1/p}(\pi-t)\,t^\alpha\,dt.$$

4. Теорема эквивалентности и приложения неравенств для верхних граней функционалов. Пусть X — вещественное линейное пространство, θ_X — нуль в X, $p(x)$ — некоторая (вообще говоря, несимметричная) норма на X (см., например, [19, с. 19]), $H_{X,p} := \{x \in X : p(x) \le 1\}$, $X'(p)$ — пространство линейных ограниченных (относительно p) функционалов на X, $\langle x, y\rangle$ — значение функционала $y \in X'(p)$ на элементе $x \in X$, $p^*(y) := \sup\{\langle x, y\rangle: x \in \in H_{X,p}\}$ — (несимметричная) норма в $X'(p)$. Отметим, что если X — нормированное пространство и $p(x) = \|x\|_X$, то $X'(p) = X^*$, где X^* — пространство всех линейных ограниченных функционалов на X.

Пусть для $M, M_1 \subset X$, $x \in X$, $y \in X'(p)$ и произвольного сублинейного функционала ψ на X

$$S_M(y) := \sup\{\langle x, y\rangle: x \in M\}$$

— опорная функция множества M,

$$M^0 := \{y \in X'(p): S_M(y) \le 1\},$$

$$E_0(x, M_1)_{X,p} := \inf\{p(x-u): u \in M_1\}$$

— наилучшее приближение элемента $x \in X$ множеством M_1 в пространстве X относительно нормы $p(\cdot)$,

$$E(M, M_1)_{X,p} := \sup\{E(x, M_1)_{X,p}: x \in M\}$$

— наилучшее приближение множества M множеством M_1 в пространстве X относительно нормы $p(\cdot)$, и, наконец,

$$\psi(M) := \sup\{\psi(x): x \in M\}.$$

Если $H_1, \ldots, H_m \subset X$, то для $x \in X$ и любого $t = (t_1, \ldots, t_m) \in R_+^m$ положим

$$K_p(X; H_1, \ldots, H_m; x; t) := \inf_{\substack{x_j \in \operatorname{cone} H_j \\ j=1,\ldots,m}} \left\{ p\left(x - \sum_{j=1}^m x_j\right) + \sum_{j=1}^m t_j S_{H_j^0}(x_j) \right\}.$$

Через $\mathcal{F}_m$ будем обозначать множество полунепрерывных снизу, выпуклых вверх функций $\Phi: R_+^m \to R_+$. Для $\Phi \in \mathcal{F}_m$ положим $\overline{\Phi}(z) = -\Phi(z)$, если $z \in R_+^m$, и $\overline{\Phi}(z) = +\infty$, если $z \notin R_+^m$. Пусть также $\overline{\Phi}^*$ — преобразование Лежандра функции $\overline{\Phi}$, т. е. $\overline{\Phi}^*(y) := \sup\{\langle x, y\rangle - \overline{\Phi}(x);\ x \in R^m\}$, $y \in R^m$, а $\sum_{j=1}^m N_j H_j$ — алгебраическая сумма множеств $N_j H_j$.

Теорема 9. *Пусть $H, H_1, \ldots, H_m$ — произвольные выпуклые множества в X, содержащие θ_X; $\Phi \in \mathcal{F}_m$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) *для любого $x \in X'(p)$ такого, что $p^*(x) \ne 0$,*

$$S_H(x) \le p^*(x)\, \Phi\left(\frac{S_{H_1}(x)}{p^*(x)}, \ldots, \frac{S_{H_m}(x)}{p^*(x)}\right);$$

2) *для любых $x \in X'(p)$ и $N = (N_1, \ldots, N_m) \in R_+^m$*

$$S_H(x) \le \overline{\Phi}^*(-N)\, p^*(x) + \sum_{j=1}^m N_j S_{H_j}(x);$$

3) *для любого* $N = (N_1, \ldots, N_m) \in R_+^m$

$$E\left(H; \sum_{j=1}^{m} N_j H_j\right)_{X,p} \leq \overline{\Phi}^*(-N);$$

4) *для любого сублинейного функционала* ψ *на* X, *для которого величины* $\psi(H_{X,p})$, $\psi(H_j)$, $j = 1, \ldots, m$, *конечны, и для любого* $N \in R_+^m$

$$\psi(H) \leq \overline{\Phi}^*(-N)\, \psi(H_{X,p}) + \sum_{j=1}^{m} N_j\, \psi(H_j);$$

5) *для любого функционала* ψ, $\psi \neq 0$, *из п.* 4

$$\psi(H) \leq \psi(H_{X,p})\, \Phi\left(\frac{\psi(H_1)}{\psi(H_{X,p})}, \ldots, \frac{\psi(H_m)}{\psi(H_{X,p})}\right);$$

6) *для любых* $z \in H$ *и* $t \in R_+^m$

$$K(X; H_1, \ldots, H_m; z; t) \leq \Phi(t).$$

Утверждения 1 и 2 теоремы 9 — это абстрактные версии неравенств типа Колмогорова в мультипликативной форме (3) и в аддитивной форме (2) соответственно; утверждение 3 — абстрактная версия приближения одного функционального класса другим; утверждения 4 и 5 — это абстрактные версии неравенств для верхних граней полунорм на различных функциональных классах. В качестве таких полунорм можно рассматривать такие важные для теории приближений характеристики как наилучшее приближение фиксированным подпространством, приближение с помощью конкретного линейного метода и т. д. (см., например, [5], гл. 6). Наконец, утверждение 6 — это оценка на классе H характеристики типа K-функционала m-ки пространств.

Доказательство теоремы 9 приведено в [17]. То обстоятельство, что теорема 9 справедлива для неравенств типа Колмогорова для опорных функций выпуклых множеств, дает единый подход как к традиционным приложениям неравенств типа Колмогорова, так и к некоторым результатам, которые не рассматривались как такого рода приложения.

В дальнейшем вместо $E(M_1, M_2)_{L_p, \|\cdot\|_p}$ пишем $E(M_1, M_2)_p$, а вместо $H_{L_p, \|\cdot\|_p}$ — H_{L_p}.

Выше (см. теорему 7) было показано, что если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, $p = 1$ или $p = \infty$, $k = 0, 1, \ldots$, $r \in N$, $r \geq k + 1 + 1/p'$, то для любой функции $y \in L_p$, $y \neq \theta_{L_p}$, $y \perp 1$,

$$S_{W^k H^\omega}(y) \leq \|y\|_p\, \Phi_{r,k}^p\left(\frac{E_0(I_r y)_p}{\|y\|_p}\right). \tag{45}$$

Так как функция $\Phi_{r,k}^p(\lambda)$ выпукла вверх в силу доказанной леммы, из этого неравенства и теоремы 9 вытекает следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть* p, k *и* ω *таковы, как в неравенстве* (45), $r \in N$, $r \geq k + 1 + 1/p'$. *Тогда справедливо каждое из следующих эквивалентных утверждений:*

1) *для любой функции* $y \in L_{p'}$, $y \neq \theta_{L_{p'}}$, $y \perp 1$,

$$S_{W^kH^\omega}(y) \le \|y\|_{p'}\,\Phi^{p'}_{r,k}\left(\frac{E_0(I_r y)_{p'}}{\|y\|_{p'}}\right);$$

2) *для любой функции* $y \in L_{p'}$, $y \perp 1$, *и любого* $N > 0$

$$S_{W^kH^\omega}(y) \le \|y\|_{p'} \max_{\lambda>0}\,[\Phi^{p'}_{r,k}(\lambda) - N\lambda] + NE_0(I_r y)_{p'};$$

3) *для любого* $N > 0$

$$E(W^kH^\omega, NW^r_p)_p \le \max_{\lambda>0}\,[\Phi^{p'}_{r,k}(\lambda) - N\lambda];$$

4) *если* ψ — *сублинейный функционал на* L_p, *то для любого* $N > 0$

$$\psi(W^kH^\omega) \le \psi(H_{L_p}) \max_{\lambda>0}\,[\Phi^{p'}_{r,k}(\lambda) - N\lambda] + N\psi(W^r_p);$$

5) *если* ψ — *сублинейный функционал на* $L_{p'}$, $\psi \ne 0$, *то*

$$\psi(W^kH^\omega) \le \psi(H_{L_p})\,\Phi^{p'}_{r,k}\left(\frac{\psi(W^r_p)}{\psi(H_{L_p})}\right);$$

6) *для любой функции* $x \in W^kH^\omega$ *и для любого* $t > 0$

$$\inf_{x_1 \in L^r_p} \{\|x - x_1\|_p + t\|x_1^{(r)}\|_p\} \le \Phi^{p'}_{r,k}(t).$$

Заметим, что некоторые из утверждений 1 – 6 при определенных значениях параметров известны (см. [5] (гл. 7) и [19] (гл. 7)). Все утверждения в том или ином смысле неулучшаемые. Важность теоремы 10 состоит не только в содержащихся в ней новых неравенствах, но и в доказательстве того факта, что утверждения 1 – 6 эквивалентны.

5. Неравенства типа Бернштейна – Никольского для тригонометрических полиномов и сплайнов. Напомним, что $\mathcal{T}_{2n+1}$ — множество тригонометрических полиномов порядка не выше n, а $S_{2n,r}$ — множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами в точках $k\pi/n$, $n \in N$, $k \in Z$.

Приведем новые неравенства типа Бернштейна – Никольского для тригонометрических полиномов и сплайнов, которые выводятся с помощью неравенства (42).

Теорема 11. *Пусть* $p \in [1, \infty]$, $n, k \in N$ *и если* $p > 1$, *то* $k \ge 2$; ω — *выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для полиномов* $\tau \in \mathcal{T}_{2n+1}$ *справедливо неулучшаемое неравенство*

$$S_{H^\omega}(\tau^{(k)}) \le \frac{n^k E_0(\tau)_p}{\|\cos(\cdot)\|_p} \int_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt. \tag{46}$$

В частности, при $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, *для* $t \in [0, \pi]$ *имеем*

$$S_{H^\alpha}(\tau^{(k)}) \le \frac{n^{k-\alpha}}{\|\cos(\cdot)\|_p} \int_0^\pi t^\alpha \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt\,E_0(\tau)_p. \tag{47}$$

Доказательство. Докажем сначала (46) при $p=1$, т. е. докажем, что

$$S_{H^\omega}(\tau^{(k)}) \le \frac{n^k}{4} E_0(\tau)_1 \int_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt. \tag{48}$$

Зафиксируем $\tau \in \mathcal{T}_{2n+1}$. Согласно (42) при $p=1$

$$S_{H^\omega}(\tau^{(k)}) \le \|\tau^{(r)}\|_1 \, \Phi^1_{r,r-k}\left(\frac{E_0(\tau)_1}{\|\tau^{(r)}\|_1}\right)$$

для любого $r \in N$, $r \ge k$. Оценивая $\|\tau^{(r)}\|_1$ с помощью неравенства Зигмунда—Бернштейна (см. (9) при $p = 1$), учитывая выпуклость вверх функции $\Phi^1_{r,r-k}(\lambda)$ и применяя (20) и (18), получаем

$$S_{H^\omega}(\tau^{(k)}) \le n^k E_0(\tau)_1 \, \Phi^1_{r,r-k}\left(\frac{1}{n^r}\right) =$$

$$= n^r E_0(\tau)_1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^r\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{(r-k)/r} \int_0^\pi R_{\pi,r-k-1}(\pi-t)\,\omega\left(\frac{t}{n\|\varphi_r\|_\infty^{1/r}}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} n^k E_0(\tau)_1 \frac{1}{\|\varphi_r\|_\infty^{(r-k)/r}} \int_0^\pi R_{\pi,r-k-1}(\pi-t)\,\omega\left(\frac{t}{n\|\varphi_r\|_\infty^{1/r}}\right) dt.$$

Устремляя $r \to \infty$ и учитывая, что при этом

$$\|\varphi_r\|_\infty \to \frac{4}{\pi}$$

и

$$R_{\pi,r-k-1}(\pi-t) \to \frac{2}{\pi}\sin\frac{t}{2},$$

получаем

$$S_{H^\omega}(\tau^{(k)}) \le \frac{n^k}{4}\int_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt\, E_0(\tau)_1.$$

Пусть теперь p — произвольное. Используя (48), имеем

$$S_{H^\omega}(\tau^{(k)}) \le \frac{1}{4} n \int_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt\, E_0(\tau^{(k-1)})_1.$$

Чтобы оценить правую часть, используем следующий вариант неравенства Лигуна (см. (11)): для любого $\tau \in \mathcal{T}_{2n+1}$

$$E_0(\tau^{(k-1)})_1 \le n^{k-1}\frac{4}{\|\cos(\cdot)\|_p} E_0(\tau)_p.$$

Тогда

$$S_{H^\omega}(\tau^{(k)}) \le \frac{1}{4} n n^{k-1} \frac{4}{\|\cos(\cdot)\|_p} \int_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt\, E_0(\tau)_p =$$

$$= \frac{n^k}{\|\cos(\cdot)\|_p} \int_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt\, E_0(\tau)_p .$$

Для доказательства точности оценки (46) рассмотрим полином $\tau(t) = \sin\left(nt - \frac{k\pi}{2}\right)$ и функцию $f_n(\omega, t)$, определенную в (25). Имеем

$$S_{H^\omega}(\tau^{(k)}) \ge n^k \int_0^{2\pi} f_n(\omega, t) \sin nt\, dt = n^k \int_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right) \sin\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{n^k E_0(\tau)_p}{\|\cos(\cdot)\|_p} \int_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt .$$

Теорема 11 доказана.

В случае, когда $\omega(t) = t$ для $t \in [0, \pi]$,

$$E_0(\tau^{(k-1)})_1 = \sup_{f \in W^1_\infty} \int_0^{2\pi} f(\tau)\, \tau^{(k)}(t)\, dt = S_{W^1_\infty}(\tau^{(k)}) \le$$

$$\le \frac{n^{k-1}}{\|\cos(\cdot)\|_p} \int_0^\pi t \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt\, E_0(\tau)_p = \frac{4n^{k-1}}{\|\cos(\cdot)\|_p} E_0(\tau)_p .$$

Таким образом,

$$E_0(\tau^{(k-1)})_1 \le \frac{4n^{k-1}}{\|\cos(\cdot)\|_p} E_0(\tau)_p ,$$

и, следовательно, мы получаем вариант неравенства (11).

Теорема 12. *Пусть* $p \in [1, \infty]$, $n, r, k \in N$, $k \le r$, *и если* $p > 1$, *то* $k \ge 2$; ω *— выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для сплайнов* $s \in S_{2n,r}$ *справедливо неулучшаемое неравенство*

$$S_{H^\omega}(s^{(k)}) \le \frac{2n^k E_0(s)_p}{\|\varphi_r\|_p} \int_0^\pi R_{\pi, r-k}(\pi - t)\, \omega\left(\frac{t}{n}\right) dt . \tag{49}$$

В частности, при $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, *для* $t \in [0, \pi]$ *имеем*

$$S_{H^\alpha}(s^{(k)}) \le 2n^{k-\alpha} \frac{E_0(s)_p}{\|\varphi_r\|_p} \int_0^\pi t^\alpha R_{\pi, r-k}(\pi - t)\, dt . \tag{50}$$

Доказательство. Докажем сначала (49) при $p = 1$, т. е. докажем, что

$$S_{H^\omega}(s^{(k)}) \le 2n^k \frac{E_0(s)_1}{\|\varphi_r\|_1} \int_0^\pi R_{\pi, r-k}(\pi - t)\, \omega\left(\frac{t}{n}\right) dt . \tag{51}$$

Используя (32), неравенство типа Бернштейна для сплайнов (см. (14)):

$$\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}) \le 4n^{r+1}\frac{E_0(s)_1}{\|\varphi_r\|_1},$$

учитывая монотонность функции $t\,\Phi^1_{r+1,r+1-k}\left(\frac{E_0(s)_1}{t}\right)$ и применяя (18), для $s \in S_{2n,r}$ получаем

$$S_{H^\omega}(s^{(k)}) \le \bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)})\,\Phi^1_{r+1,r+1-k}\left(\frac{E_0(s)_1}{\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)})}\right) \le$$

$$\le 4n^{r+1}\frac{E_0(s)_1}{\|\varphi_r\|_1}\Phi^1_{r+1,r+1-k}\left(\frac{E_0(s)_1}{4n^{r+1}}\left(\frac{E_0(s)_1}{\|\varphi_r\|_1}\right)^{-1}\right) \le$$

$$\le 4n^{r+1}\frac{E_0(s)_1}{\|\varphi_r\|_1}\Psi^1_{r+1,r+1-k}\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right) =$$

$$= 2n^{r+1}\frac{E_0(s)_1}{\|\varphi_r\|_1}\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)^{(r+1-k)/(r+1)}\int_0^\pi R_{\pi,r-k}(\pi-t)\,\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt =$$

$$= 2n^k\frac{E_0(s)_1}{\|\varphi_r\|_1}\int_0^\pi R_{\pi,r-k}(\pi-t)\,\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt.$$

Пусть теперь p — любое. Перепишем (51) в следующем виде:

$$S_{H^\omega}(s^{(k)}) \le 2n^{k-1}\frac{E_0(s')_1}{\|\varphi_{r-1}\|_1}\int_0^\pi R_{\pi,r-k}(\pi-t)\,\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt. \qquad (52)$$

Чтобы оценить правую часть неравенства (52), применим неравенство Лигуна (см. (13)):

$$\|s'\|_1 \le n\frac{\|\varphi_{r-1}\|_1}{\|\varphi_r\|_p}E_0(s)_p, \qquad s \in S_{2n,r}.$$

Получим

$$S_{H^\omega}(s^{(k)}) \le 2n^{k-1}\frac{1}{\|\varphi_{r-1}\|_1}n\frac{\|\varphi_{r-1}\|_1}{\|\varphi_r\|_p}E_0(s)_p\int_0^\pi R_{\pi,r-k}(\pi-t)\,\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt =$$

$$= \frac{2n^k E_0(s)_p}{\|\varphi_r\|_p}\int_0^\pi R_{\pi,r-k}(\pi-t)\,\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt.$$

Осталось заметить, что для $s(t) = \varphi_{n,r}(t)$ неравенство (49) обращается в равенство.

Теорема доказана.

В случае, когда $\omega(t) = t$ для $t \in [0, \pi]$, неравенство (50) является вариантом неравенства (13).

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Contribution to the arithmetic theory of series // Proc. London Math. Soc. – 1912. – **2**, № 11. – P. 411–478.

2. *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – 470 с.
3. *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных // Комментарии к избранным трудам А. Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1985. – С. 387 – 390.
4. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 44 – 66.
5. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.
6. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
7. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and their applications // E. J. Approxim. – 1997. – **3**, № 3. – P. 351 – 376.
8. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and some their applications in approximation theory // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. II. – 1998. – **52**. – P. 223 – 237.
9. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций // Докл. АН СССР. – 1961. – **140**, № 4. – С. 748 – 751.
10. *Корнейчук Н. П.* Неравенства для дифференцируемых периодических функций и наилучшее приближение одного класса функций другим // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1972. – **36**. – С. 423 – 434.
11. *Стечкин С. Б.* Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta sci. math. – 1965. – **26**. – P. 225 – 230.
12. *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 137 – 148.
13. *Тайков Л. В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Там же. – С. 155 – 162.
14. *Арестов В. В.* О некоторых экстремальных задачах для дифференцируемых функций одной переменной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **138**. – С. 3 – 26.
15. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Analysis Math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11 – 40.
16. *Клоц Б. Е.* Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 1. – С. 21 – 32.
17. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications // Proc. Mannheim Conf. "Multivariate Approximation and Splines, 1996" / G. Nurnberger, J. V. Schmidt and G. Walz (eds). – 1997. – P. 1 – 12.
18. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 1. – С. 93 – 124.
19. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
20. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для верхних граней функционалов и некоторые их применения в теории аппроксимации // Допов. НАН України. – 1999. – № 1. – С. 24 – 29.
21. *Stein E. M.* Functions of exponential type // Ann. Math. – 1957. – **65**, № 3. – P. 582 – 592.
22. *Лигун А. А.* О неравенствах между нормами производных периодических функций // Мат. заметки. – 1983. – **33**, № 3. – С. 385 – 391.
23. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 616 с.
24. *Тайков Л. В.* Одно обобщение неравенства С. Н. Бернштейна // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **78**. – С. 43 – 47.
25. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
26. *Лигун А. А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 6. – С. 913 – 926.
27. *Субботин Ю. Н.* О кусочно-полиномиальной интерполяции // Там же. – 1967. – **1**, № 1. – С. 24 – 29.

Получено 27.05.99