УДК 517.576

О. Б. Скасків, канд. фіз.-мат. наук,
М. Р. Луцишин, асп. (Львів. ун-т)

Про мінімум модуля кратного ряду Діріхле

Встановлюються умови, при виконанні яких для цілої функції $F(z)$ багатьох комплексних змінних $z \in \mathbb{C}^p$, $p \geqslant 2$, зображеної рядом Діріхле, виконується співвідношення

$$M(x) = (1 + o(1))\, m(x) = (1 + o(1))\, \mu(x)$$

при $|x| \to +\infty$ поза досить малою множиною, де $M(x) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}^p\}$, $m(x) = \inf\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}^p\}$, $\mu(x)$ — максимальний член ряду Діріхле, $x \in \mathbb{R}^p$.

Устанавливаются условия, при выполнении которых для целой функции $F(z)$ многих комплексных переменных $z \in \mathbb{C}^p$, $p \geqslant 2$, представленной рядом Дирихле, выполняется соотношение

$$M(x) = (1 + o(1))\, m(x) = (1 + o(1))\, \mu(x)$$

при $|x| \to +\infty$ вне достаточно малого множества, где $M(x) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}^p\}$, $m(x) = \inf\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}^p\}$, $\mu(x)$ — максимальный член ряда Дирихле, $x \in \mathbb{R}^p$.

Нехай $F(z)$ — ціла в $\mathbb{C}^p$, $p \geqslant 1$, функція, задана абсолютно збіжним в $\mathbb{C}^p$ рядом Діріхле

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_n e^{(z, \lambda_n)}, \tag{1}$$

де $n \in \mathbb{Z}_+^p$ (мультиіндекс при $p \geqslant 2$), $\lambda_n \in \mathbb{R}_+^p$ такі, що $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{n_p}^{(p)})$ та $\lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$, $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_p b_p$ для $a, b \in \mathbb{C}^p$, $\|n\| = n_1 + \ldots + n_p$ — висота вектора $n = (n_1, \ldots, n_p)$. Нехай далі для $z = (z_1, \ldots, z_p)$ $|z| = (|z_1| + \ldots + |z_p|)^{1/2}$. Позначимо $M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}^p\}$, $m(x, F) = \inf\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}^p\}$, $\mu(x, F) = \max\{|a_n| e^{(x, \lambda_n)} : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$ для $x \in \mathbb{R}^p$. Через $A_p(\Lambda)$ (тут $\Lambda = (\lambda_n)$ — послідовність, означена вище) позначимо клас всіх цілих функцій виду (1). У випадку $p = 1$ (цілих рядів Діріхле від однієї змінної) справедливий такий результат.

Теорема А [1]. *Для того щоб для кожної функції $F \in A_1(\Lambda)$ виконувались співвідношення*

$$M(x, F) = (1 + o(1))\, \mu(x, F), \quad M(x, F) = (1 + o(1))\, m(x, F) \tag{2}$$

при $x \to +\infty$ $(x \in [0, +\infty) \setminus E,\ \mu_1 E < \infty)$, необхідно і досить, щоб

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty, \tag{3}$$

$\mu_1 E$ — міра Лебега на прямій.

Мета даної статті — одержати аналог теореми А для класу $A_p(\Lambda)$, $p \geqslant 2$. Введемо деякі необхідні поняття. Конусом зростання максимального члена $\mu(x, F)$ ряду (1) називаємо конус

$$\gamma = \gamma(F) = \left\{ x \in \mathbb{R}^p : \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \mu(tx, F) = +\infty \right\}$$

(див., наприклад, [2, 3]). Легко бачити, що для кожного замкненого конуса $K \subset \mathbb{R}^p \setminus \gamma$ з вершиною в точці $O = (0, \ldots, 0)$

$$\ln \mu (x, F) = O(|x|) \, (|x| \to +\infty, \ x \in \overline{K}).$$

Нехай H — множина таких точок $x \in \gamma$, що послідовність $(\langle \lambda_n, x \rangle)_{n \in I}$ допускає впорядкування за неспаданням, де $I = I(F) = \{n : a_n \neq 0\}$. Через $\{\alpha_j\}$ позначимо впорядковану за неспаданням множину $\{\langle \lambda_n, x \rangle : n \in I\}$, тобто $\alpha_j = \alpha_j(x) = \langle \lambda_n, x \rangle$ при деякому n і $\alpha_j \leqslant \alpha_{j+1}$, $j \geqslant 0$. Наведемо без доведення декілька елементарних лем, в яких міститься інформація про поведінку $\mu(x, F)$.

Лема 1. *Якщо $F \in A_p(\Lambda)$, $p \geqslant 1$, а K — довільний конус з вершиною в точці O такий, що $\overline{K} \setminus \{0\} \subset \gamma(F)$, то*

$$\lim_{|x| \to \infty, \, x \in \overline{K}} \frac{1}{|x|} \ln \mu (x; F) = +\infty.$$

Лема 2. *Якщо $F \in A_p(\Lambda)$, $p \geqslant 1$, а K — довільний конус з вершиною в точці O такий, що $\overline{K} \setminus \{0\} \subset \gamma(F)$, то $\|\nu(x)\| \to +\infty$ $(|x| \to +\infty, \ x \in \overline{K})$, де $\nu(x) \in \mathbb{Z}_+^p$ — будь-який з мультиіндексів таких, що*

$$|a_{\nu(x)}| \exp \{\langle x, \lambda_{\nu(x)} \rangle\} = \mu(x, F).$$

Лема 3. *Якщо $F \in A_p(\Lambda)$, $p \geqslant 1$, то $\ln \mu(x, F)$ — опукла на $\mathbb{R}^p$ функція.*

Лема 4. *Якщо $F \in A_p(\Lambda)$, $p \geqslant 1$, то*

$$(x \in \gamma(F)) \Leftrightarrow \sup \{\langle x, \lambda_n \rangle : n \in \mathbb{Z}_+^p\} = +\infty.$$

Теорема. *Нехай $F \in A_p(\Lambda)$, $p \geqslant 1$. Якщо*

$$H_1 = \left\{ x \in H : \sum_{j=j_0}^{\infty} (\alpha_{j+1} - \alpha_j)^{-1} < +\infty \right\},$$

то справедливі співвідношення (2) при $|x| \to +\infty$ $(x \in \overline{K} \setminus E)$, E — деяка множина з $\mathbb{R}^p$ така, що міра Лебега перетину з кулею радіуса r має оцінку $\mu_p(E \cap \{x : |x| \leqslant r\}) = O(r^{p-1})$, $r \to +\infty$, а K — довільний конус з вершиною в точці O такий, що $\overline{K} \setminus \{O\} \subset (\gamma(F) \cap H_2)$, H_2 — така підмножина H_1, що $\sum_{j=j_1}^{\infty} 1/r_j < +\infty$, де $r_j = \inf \{(\alpha_{j+1}(x) - \alpha_j(x)) : x \in H_2, |x| = 1\}$.

Зауваження 1. Легко перевірити, що $H_1 \subset \gamma$ (див. леми 1 і 4). Тому включення $\overline{K} \setminus \{O\} \subset (\gamma \cap H_1)$ рівносильне до $\overline{K} \setminus \{O\} \subset H_1$.

Зауваження 2. Можна побудувати функцію $F \in A_p(\Lambda)$ таку, що $H_1 \neq \varnothing$, $H_2 \neq \varnothing$. Згідно з теоремою A легко бачити, що умова $\sum_j 1/r_j < +\infty$, взагалі кажучи, істотна.

При доведенні теореми використовуємо метод доведення теореми А. Нехай

$$\delta_k = \max \left\{ (s - l + 1)^{-3/2} \sum_{m=l}^{s} 1/r_m : 0 \leqslant l \leqslant k - 1 \leqslant s < +\infty \right\}.$$

Безпосередньо перевіряємо, що

$$\sum_s 1/r_s < +\infty \Rightarrow \sum_k \delta_k < +\infty.$$

Нехай $c_k \uparrow +\infty$, $k \to +\infty$ така, що $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \delta_k < +\infty$ і $\varepsilon_k = c_k \delta_k$. Для (див., наприклад, [2, 3]). Легко бачити, що для кожного замкненого конуса $K \subset \mathbb{R}^p \setminus \gamma$ з вершиною в точці $O = (0, \ldots, 0)$

$$\ln \mu(x, F) = O(|x|)\,(|x| \to +\infty,\ x \in \overline{K}).$$

$u \in \overline{K} \setminus \{O\} \subset H_2$ розглянемо допоміжну функцію

$$f(t) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_n e^{(u,\lambda_n)t} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j e^{t\alpha_j(u)}.$$

Оскільки $u \in H_2$, то $\sup\{\alpha_j(u): j \geqslant 0\} = +\infty$. Звідси центральний індекс функції f $\nu(t, f) \to +\infty$, $t \to +\infty$, тому рівність $\nu(t \pm \varepsilon_{\nu(t,f)}, f) = \nu(t, f)$ виконується для всіх $t \in \mathbb{R} \setminus E_1$ і, крім того,

$$\mu_1(E_1) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta_k < +\infty. \tag{4}$$

Щоб у цьому переконатись, досить повторити, наприклад, міркування з [4] (лема 1). Безпосередньо з останньої рівності для $t \notin E_1$ випливає справедливість для всіх $j \geqslant 0$ нерівності

$$|b_j| e^{t\alpha_j(u)} \leqslant |b_{\nu(t,f)}| e^{t\alpha_{\nu(t,f)}(u) - \varepsilon_{\nu(t,f)} |\alpha_j^{(u)} - \alpha_{\nu(t,f)}^{(u)}|}.$$

Звідси

$$|a_n| e^{(x,\lambda_n)} \leqslant \mu(x, F) \exp\{-\varepsilon_{\nu(t,f)} |\alpha_j(u) - \alpha_{\nu(t,f)}(u)|\}, \tag{5}$$

де $u \in H_2$, $|u| = 1$, $t \notin E_1$, $x = tu$.

Нехай тепер $E_2(u) = \{x = tu : t \in E_1\}$, $|u| = 1$, $E = \bigcup_{|u|=1} E_2(u)$. Тоді $\mu_p(E \cap \{x : |x| \leqslant r\}) = \int_{E \cap \{x:|x| \leqslant r\}} d\mu_p$ і, переходячи до сферичних координат, завдяки (4) маємо $\sup\{\mu_1(E_2(u)) : |u| = 1\} < +\infty$ і, отже, $\mu_p(E \cap \cap \{x : |x| \leqslant r\}) = O(r^{p-1})$, $r \to +\infty$. Завершується доведення теореми на основі (5). Нехай $\nu = \nu(t, f)$, тоді (в означенні δ_k досить взяти $l = j$, $s = \nu - 1$) при $j \leqslant \nu - 1$ маємо

$$\delta_\nu > (\nu - j)^{-3/2} \sum_{m=j}^{\nu-1} 1/r_m \geqslant (\nu - j)^{-3/2} \sum_{m=j}^{\nu-1} (\alpha_{m+1} - \alpha_m)^{-1} \geqslant (\nu - j)^{1/2}/(\alpha_\nu - \alpha_j).$$

Аналогічно при $j \geqslant \nu + 1$ $\delta_\nu \geqslant (j - \nu)^{1/2}/(\alpha_j - \alpha_\nu)$. Тому з (5) при $x \notin E$ маємо

$$\sum_{j \neq \nu(t,f)} |b_j| e^{t\alpha_j(u)} \leqslant 2\mu(x, F) \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{c_\nu}{3}\sqrt{j}\right\}.$$

Оскільки $c_\nu \to +\infty$, $\nu \to +\infty$, то з останньої нерівності випливають співвідношення (2). Залишилось зауважити, що при $|x| \to +\infty$, $x \in \in \overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F)$, $\nu(|x|, f) \to +\infty$. Це випливає із зауваження, зробленого вище. Теорема доведена.

1. *Скасків О. Б.* Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1984.— № 11.— С. 22—24.
2. *Маергойз Л. С.* Об одном результате Валирона // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1978.— Вып. 29.— С. 89—98.
3. *Гречанюк Н. И.* О поведении максимального члена кратного ряда Дирихле, задающего целую функцию // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 8.— С. 1047—1053.
4. *Скаскив О. Б., Шеремета М. Н.* Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле // Мат. сб.— 1986.— 131, № 11.— С. 385—402.

Одержано 23.03.92

Нехай $c_k \uparrow +\infty$, $k \to +\infty$ така, що $\sum_{k=0} c_k \delta_k < +\infty$ і $\varepsilon_k = c_k \delta_k$. Для