УДК 517.946

М. М. Притула, канд. фіз.-мат. наук (Львів. ун-т),
В. С. Куйбіда, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Структура інтегровних суперсиметричних нелінійних динамічних систем на редукованих інваріантних підмноговидах

На основі аналізу суперсиметричного розширення алгебри псевдодиференціальних операторів на $\mathbb{R}^1$ побудована методом $\mathcal{R}$-рівняння Янга—Бакстера нескінченна ієрархія суперсиметричних інтегровних за Лаксом нелінійних динамічних систем. Досліджена структура цих систем на редукованих інваріантних підмноговидах, що задаються природним інваріантом спектральної задачі типу Лакса.

На основания анализа суперсимметричного расширения алгебры псевдодифференциальных операторов на $\mathbb{R}^1$ построена методом $\mathcal{R}$-уравнения Янга—Бакстера бесконечная иерархия суперсимметричных интегрируемых по Лаксу нелинейных динамических систем. Исследована структура этих систем на редуцируемых инвариантных подмногообразиях, которые задаются естественным инвариантом спектральной задачи типа Лакса.

1. Нехай задана супералгебра Лі $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \oplus \mathfrak{E}_-$ над комутативною супералгеброю $\mathbb{R}^{1|1}$ псевдодиференціальних операторів вигляду

$$\mathfrak{E}_+ = \bigcup_{\{u\}} \Big\{ \sum_{0 \leqslant j < \infty} u_j \xi^j : u_j \in \mathcal{G}^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1|1}; \mathbb{R}^{1|1}) \Big\},$$

$$\mathfrak{E}_- = \bigcup_{\{a\}} \Big\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_j \xi^{-(j+1)} : a_j \in \mathcal{G}^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1|1}; \mathbb{R}^{1|1}) \Big\}, \tag{1}$$

де $\mathfrak{E}_\pm \subset \mathfrak{E}$ — суперпідалгебри. Операція Лі $[\cdot, \cdot]$ в $\mathfrak{E}$ означається таким чином [1—5]:

$$[a, b] = a \circ b - (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}\, b \circ a, \quad (\xi c)(x, \theta) = (\partial/\partial\theta + \partial/\partial x)\, c(x, \theta)$$

для всіх однорідних елементів $a, b \in \mathfrak{E}$ і $c(x, \theta) \in \mathbb{R}^{1|1}$, причому «$\sim$» — операція означення парності елемента, «$\circ$» — стандартна композиція операторів. Супералгебру $\mathfrak{E}$ (1) можна перетворити в метризовну за допомогою наступного аналога білінійної симетричної форми Кіллінга на $\mathfrak{E}$: для всіх $a, b \in \mathfrak{E}$

$$(a, b) = \mathrm{Tr}\,(a \circ b),$$

де $\mathrm{Tr}\,(a) = \int_{R^{1|1}} dx d\theta \operatorname*{res}_{\xi=0} a(\xi)$. На супералгебрі $\mathfrak{E}$ можна ввести [6] ще одну структуру супералгебри Лі за допомогою введення $\mathcal{R}$-структури:

$$[a, b]_{\mathcal{R}} = [a, \mathcal{R}b] + [\mathcal{R}a, b],$$

де $\mathcal{R}: \overline{\mathfrak{E}} \to \overline{\mathfrak{E}}$ — гомоморфізм модуля $\overline{\mathfrak{E}}$ в себе, що задовольняє умову $a, b \in \mathfrak{E}$,

$$\mathcal{R}\,[a, b]_{\mathcal{R}} - [\mathcal{R}a, \mathcal{R}b] = -[a, b]. \tag{2}$$

Розв'язком (2), згідно з розкладом (1), є такий оператор:

$$\mathcal{R} = P_+ - P_-, \tag{3}$$

де $P_\pm : \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_\pm$ — відповідні проектори на суперпідалгебри, причому $\mathcal{R}$-структура (3) «унітарна», тобто $(a, \mathcal{R}b) + (\mathcal{R}a, b) = 0$ для всіх $a, b \in \mathfrak{E}$.

2. Нехай $\gamma \in \mathcal{D}(\mathfrak{E}^*)$ — функціонал Казіміра [3] на $\mathfrak{E}^*$, тобто $ad^*_{\nabla\gamma(l)} l = 0$ для всіх $l \in \mathfrak{E}$. Внаслідок ізоморфізму $\mathfrak{E}^* \simeq \mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}^*_\pm \simeq \mathfrak{E}_\mp$, ця умова еквівалентна комутаторній рівності в $\mathfrak{E}: [\nabla\gamma(l), l] = 0$ для всіх $l \in \mathfrak{E}$. Тоді справедлива така теорема.

Теорема. *Динамічна система на* $\mathfrak{E}_+^* \cong \mathfrak{E}_-$

$$da/dt = ad^*_{\nabla\gamma_\omega(a)}a, \quad \omega = \xi \in \mathfrak{E}_+,$$

де $\nabla\gamma_\omega(a) = \nabla\gamma(a+\omega)$, $a \in \mathfrak{E}_+^*$, $t \in \mathbb{R}^{1|1}$ — *однорідний еволюційний параметр, є цілком інтегровним за Лаксом — Ліувіллем* [1] *супергамільтоновим потоком на* $\mathfrak{E}_+^*$ *і має таке зображення типу Лакса:*

$$da/dt = [a+\omega, \nabla\gamma_\omega(a)_+] + 2\tilde{l}\nabla\gamma_\omega(a).$$

Доведення проводиться аналогічно схемі, наведеній в [6].

Наслідок. *Нехай* $\gamma_j = \frac{1}{(j+1)}\operatorname{Tr} l^{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, *де*

$$\begin{gathered} l(\xi) = \xi + \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} a_j\xi^{-j}, \quad (\xi a_{-1})(x,\theta) := a_{-1}^{[1]}(x,\theta) = -2a_0(x,\theta), \\ \xi^j c(x,\theta) := c^{[j]}(x,\theta), \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad c(x,\theta) \in \mathbb{R}^{1|1}. \end{gathered} \tag{4}$$

Тоді всі динамічні системи вигляду

$$\begin{gathered} dl/dt_{2j} = [l, (l^{2j})_+], \\ dl/dt_{2j+1} = [l, (l^{2j+1})_+] + 2l^{2j+2}, \end{gathered} \tag{5}$$

де $t_{2j} \in \mathbb{R}^{1|0}$, $t_{2j+1} \in \mathbb{R}^{0|1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$ — *інтегровні за Лаксом суперкомутативні векторні потоки, причому*

$$\begin{gathered} [d/dt_{2i}, d/dt_{2j}] = 0, \ [d/dt_{2j}, d/dt_{2j+1}] = 0, \\ [d/dt_{2i+1}, d/dt_{2j+1}] = 2d/dt_{2i+2j+2}. \end{gathered} \tag{6}$$

Зауваження. Супералгебра Лі (6), як легко переконатися, допускає наступне зображення в $\mathfrak{E}$:

$$d/dt_j = \xi^j : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}, \quad t_j \in \mathbb{R}^{1|1}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

3. Нехай $\psi \in L_2(\mathbb{R}^{1|1}; \mathbb{C}^{1|1})$ власні функції l-оператора Лакса (4), тобто

$$l\psi = \lambda\psi, \quad l^*\psi^* = -\lambda\psi^*, \quad \lambda \in \mathbb{C}^{0|1}, \quad \tilde{\lambda} = 1. \tag{7}$$

Згідно з зображенням (5) маємо

$$\begin{gathered} d\psi/dt_{2j} = -(l^{2j})_+\psi, \quad d\psi^*/dt_{2j} = (l^{*2j})_+\psi, \\ d\psi/dt_{2j+1} = (l^{2j+1})_+\psi + 2l^{2j+2}\psi, \\ d\psi^*/dt_{2j+1} = -l^{*(2j+1)}\psi + 2l^{*(2j+2)}\psi \end{gathered} \tag{8}$$

для всіх $t_j \in \mathbb{R}^{1|1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Тоді з (8) витікає $d\lambda/dt_{2j} = 0$, $d\lambda/dt_{2j+1} = 2\lambda^{2j+2}$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Справедливі також наступні формули:

$$l^2 = \xi^2 + a_0^{[1]}\xi^{-1} + (2a_2 + a_1^{[1]} - a_0^2)\xi^{-2} + (a_2^{[1]} - a_0a_0^{[1]}]\xi^{-3} + \ldots,$$

$$l^3 = \xi^3 + a_{-1}\xi^2 + a_0\xi + (a_1 + a_0^{[1]}) + (3a_2 + a_1^{[1]} + a_0^{[2]} - a_0^2 + \\ + a_1a_0^{[1]})\xi^{-1} + \ldots,$$

$$l^4 = \xi^4 + 2a_0^{[1]}\xi + 2(2a_2 + a_1^{[1]} - a_0^2) + (2a_2^{[1]} + a_0^{[3]} - 2a_0a_0^{[1]})\xi^{-1} + \ldots,$$

$$l^6 = \xi^6 + 3a_0^{[1]}\xi^3 + 3(2a_2 + a_1^{[1]} - a_0^2)\xi^2 + 3(a_2^{[1]} + a_0^{[3]} - a_0a_0^{[1]})\xi + \\ + 3(2a_4 + a_3^{[1]} + 2a_2^{[2]} + a_1^{[3]} + a_0a_1^{[1]} - 2a_0^{[1]}a_1 - a_0a_0^{[2]}) + (3a_4^{[1]} + 3a_2^{[3]} + \\ + 3a_0^{[1]}a_2 + 3a_0a_2^{[1]} + 3a_0a_1^{[2]} + 6a_0^{[1]}a_1^{[1]} - 3a_0^{[2]}a_1 + a_0^{[5]} - 6a_0^2a_0^{[1]})\xi^{-1} + \ldots .$$

Враховуючи, що векторні поля d/dt_{2j} повинні бути диференціюваннями, а d/dt_{2j+1} — антидиференціюваннями для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$, можна знайти [4, 3], що коли

$$d/dt_{2j+1} = \partial/\partial t_{2j+1} + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} t_{2k+1} \partial/\partial t_{2k+2j+2},$$

то структура супералгебри Лі (6) задовольняється тотожно. З рівняння (5) послідовно можна знайти

$$da_0/dt_1 = a_0^{[1]} + \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} t_{2j+1} a_{0,2j+1},$$

$$da_1/dt_1 = 2a_2 + a_1^{[1]} + \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} t_{2j+1} a_{1,2j+1},$$

$$da_0/dt_3 = 3a_2^{[1]} + a_1^{[2]} - 4a_0 a_0^{[1]} - a_{-1} a_0^{[2]} + \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} t_{2j+1} a_{0,2j+4}, \tag{9}$$

$$da_0/dt_4 = -2a_2^{[1]} - a_0^{[4]} + 2a_0 a_0^{[2]}, \ldots, \partial a_j/\partial t_k := a_{j,k},$$

і т. д. для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$ і елементів $a_j \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^{1|1}; \mathbb{R}^{1|1})$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Зображуючи в (9) елементи a_0 і $a_1 \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^{1|1}; \mathbb{R}^{1|1})$ у вигляді рядів

$$\partial^{-1} a_0 = u_0 - t_1 \theta u_2 - t_3 \theta u_4 + t_1 t_3 v_4 + \ldots,$$

$$a_1 = \theta g_4 - t q_4 - t_3 g_6 + t_1 t_3 g_8 + \ldots,$$

де $u_0, u_2, u_4, v_4, g_4, q_4, g_6, g_8 \in \mathbb{C}[x, t_{2j} : j \in \mathbb{Z}_+]$, знаходимо

$$u_2 = -u_{0,x}, \quad v_4 = u_2 - u_{0,x}, \quad g_4 = 3/2 u_{0,4} + 1/2 u_{0,xx} - 1/2 (u_{0,x})^2 - u_4,$$

$$q_4 = 1/2 u_{0,4} + 1/2 u_{0,xx} - 1/2 (u_{0,x})^2 + u_4$$

і т. д., а також наступне характеристичне рівняння типу Кадомцева—Петвіашвілі:

$$u_{0,3x} u_{4,x} - u_{0,xx} u_{4,xx} + u_{0,xx} u_{4,4} - u_{0,x;4} u_{4,x} = 0,$$

$$4u_{0,x;6} - 3u_{0,4;4} + 6u_{0,xx} u_{0,4} - u_{0,4x} + 6 (u_{0,x})^2 u_{0,xx} + 12 u_{0,xx} u_4 = 0.$$

Враховуючи тепер, що для власного значення $\lambda \in \mathbb{C}^{1|1}$ в (7) величина

$$\operatorname{grad} \lambda [a_0] = (\psi^* \psi^{[1]})^{[1]} + \ldots,$$

можемо редукувати [7] динамічні системи (8) на апріорі інваріантний підмноговид $M^{2n} \hookrightarrow M$, $n \in \mathbb{Z}_+$, що задається умовою

$$\operatorname{grad} \lambda [a_0] = \operatorname{grad} \gamma_{2n} [a_0] + \sum_{j=0}^{n-1} c_{2n,j} \operatorname{grad} \gamma_{2j} [a_0].$$

Тим самим, на кожному підмноговиді $M_\lambda^{2n} \hookrightarrow M$, $n \in \mathbb{Z}$, будемо мати редуковану нелінійну суперсиметричну гамільтонову динамічну систему, пуассонова структура якої знаходиться методом Дірака [1].

1. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях.— Киев : Наук. думка, 1991.— 288 с.
2. *Хренников А. Ю.* Функциональный суперанализ // Успехи мат. наук.— 1988.— **43**, № 2.— С. 87—114.
3. *Mulase M.* Solvability of the Super *KP* equation and a generalization of the Birkhoff decomposition // Invent. math.— 1988.— **92**, N 1.— P. 1—46.
4. *Manin Yu., Radul A. O.* A supersymmetric extension of the *KP*-hierarchy // Communs Math. Phys.— 1985.— **98**, N 1.— P. 65—77.
5. *Mathieu P.* Supersymmetric extension of Korteweg-de Vries equation // J. Math. Phys.— 1988.— **29**, N 1.— P. 2499—2506.

6. *Oewel N.* *R*-structures, Yano-Baxter equations and related involution theorems // Ibid.— 1989.— **30**, N 5.— P. 1140—1149.
7. *Sydorenko Yu.*, *Stramp W.* Symmetry constraint os the *KP*-hierarchy // Inverse Problem.— 1992.— **8**, N 7.— P. 210—215.

Одержано 06.03.92