

УДК 517.948

Я. В. Микитюк, канд. фіз.-мат. наук,
М. Аль-Тунджі, асп. (Львів. ун-т)

Про оператор множення на матричний многочлен

Показано, як можна звести вивчення збуреного оператора множення на матричний многочлен у просторі $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ до вивчення збуреного оператора множення на незалежну змінну в просторі $L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N)$ з вагою ω , що задовольняє умову Макенхаупта.

Показано, як можна звести вивчення возмущеного оператора умноження на матричний многочлен в просторі $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^1)$ к изучению возмущеного оператора умножения на независимую переменную в просторі $L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N)$ с весом ω , удовлетворяющим условию Макенхаупта.

Нехай $H = L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Позначимо через $L: H \rightarrow H$ оператор множення на матричний многочлен $G(x) = (G_{ij}(x))$, $1 \leq i, j \leq n$ (G_{ij} — многочлени з комплексними коефіцієнтами), тобто

$$Lf(x) = G(x) f(x), \quad f \in D(L) = \{f \in H : Gf \in H\}.$$

Будемо припускати, що виконані наступні умови:

- i) для всіх $x \in \mathbb{R}$ $G(x) = G(x)^*$;
- ii) при великих $|x|$ матриця $G(x)$ має обернену і

$$\|G(x)^{-1}\| = o(x^{-1}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (1)$$

При виконанні умов i), ii) оператор L є самоспряженим, а його спектр співпадає або з \mathbb{R} , або з деякою півпрямною.

Означення 1. Нехай $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$, $N \in \mathbb{N}$, де $\omega_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$, — вимірні, майже всюди додатні функції і

$$L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N) = \bigoplus_{j=1}^N L_2(\mathbb{R}, \omega_j).$$

Простір $L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N)$, як звичайно, наділяємо нормою

$$\|f\| = \left(\sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}} |f_j(x)|^2 \omega_j(x) dx \right)^{1/2}.$$

Будемо говорити, що вага ω задовольняє умову Макенхаупта (див., наприклад, [1, с. 253]), якщо

$$\sup_{\Delta} \left(\frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \omega_j dx \right) \left(\frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \frac{1}{\omega_j} dx \right) < \infty, \quad j = 1, \dots, N,$$

де верхня грань береться по всіх скінченних інтервалах $\Delta \subset \mathbb{R}$, $|\Delta|$ — довжина інтервалу Δ .

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема 1. Нехай виконані умови i), ii). Тоді існують простір $L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N)$ і ізометричний оператор $V: H \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N)$ такі, що

1) вага ω задовольняє умову Макенхаупта;

2) $VLV^* = SVV^* = VV^*S$, $Sf(x) = x f(x)$;

3) $\|Vf\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty}$, $f \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

Доведення. З результатів роботи [2] випливає, що справедлива така лема.

Лема 1. Існує набір дійсних функцій $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ і функція $u \in C^\infty(\mathbb{R}, B(\mathbb{C}^n))$ такі, що:

1) для всіх $x \in \mathbb{R}$ $u(x)$ — унітарний оператор в \mathbb{C}^n ;

2) функції $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ є звуженнями на \mathbb{R} галузок деяких алгебраїчних функцій;

3) для всіх $x \in \mathbb{R}$ $u(x)G(x)u(x)^* = \text{diag}(\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$.

Введемо оператор $U: H \rightarrow H$, покладаючи $Uf(x) = u(x)f(x)$, $f \in H$, де u — функція з леми 1. Очевидно, що оператор U є унітарним і, крім того,

$$ULU^* = \bigoplus_{j=1}^n \Lambda_j,$$

$$\|Uf\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n),$$

де $\Lambda_j: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ — оператор множення на функцію λ_j ($j = 1, \dots, n$).

Оскільки функції $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ є звуженнями на \mathbb{R} галузок деяких алгебраїчних функцій, то їх похідні можуть мати не більше, ніж скінченну кількість нулів. Тому для кожного j , $j = 1, \dots, n$, існує набір точок $\{a_{j,k}\}_{k=1}^{2m_j-1}$, $m_j \in \mathbb{N}$, такий, що:

1) $a_{j,1} < \dots < a_{j,2m_j-1}$;

2) $\{x \in \mathbb{R} : \lambda_j'(x) = 0\} = \{a_{j,2k} : k = 1, \dots, m_j - 1\}$. Нехай $\Delta_{jk} =]a_{j,k-1}, a_{j,k}[$, $k = 1, \dots, 2m_j$, де $a_{j,0} = -\infty$, $a_{j,2m_j} = +\infty$. Позначимо через λ_{jk} звуження на Δ_{jk} функції λ_j , а через $\Lambda_{jk}: L_2(\Delta_{jk}) \rightarrow L_2(\Delta_{jk})$ оператор множення на функцію λ_{jk} . Очевидно, що $\Lambda_j = \bigoplus_{k=1}^{2m_j} \Lambda_{jk}$, $j = 1, \dots, n$, і, таким чином,

$$ULU^* = \bigoplus_{j=1}^n \bigoplus_{k=1}^{2m_j} \Lambda_{jk}.$$

Оскільки при всіх $x \in \Delta_{jk}$ $\lambda_{jk}'(x) \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, 2m_j$, то λ_{jk} має обернену функцію $\lambda_{jk}^{-1} \in C^\infty(\bar{\Delta}_{jk})$, де $\bar{\Delta}_{jk} = \lambda_{jk}(\Delta)$.

Введемо оператори $W_{jk}: L_2(\bar{\Delta}_{jk}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \omega_{jk})$, покладаючи

$$W_{jk}f(\xi) = \begin{cases} f(\lambda_{jk}^{-1}(\xi)), & \text{якщо } \xi \in \bar{\Delta}_{jk}, \\ 0, & \text{якщо } \xi \in \mathbb{R} \setminus \bar{\Delta}_{jk}. \end{cases}$$

Від ваг ω_{jk} вимагаємо, щоб $\omega_{jk}(x) = |(\lambda^{-1})'(x)|$ при $x \in \bar{\Delta}_{jk}$. Безпосередня перевірка показує, що оператори W_{jk} є ізометричними і

$$W_{jh} \Lambda_{jh} W_{jk}^* = S W_{jh} W_{jk}^* = W_{jh} W_{jk}^* S,$$

$$\|W_{jh} f\|_{L_\infty} = \|f\|_{L_\infty}, \quad f \in L_2(\bar{\Delta}_{jk}) \cap L_\infty(\bar{\Delta}_{jk}),$$

де S — оператор множення на незалежну змінну в просторі $L_2(\mathbb{R}, \omega_{jk})$. За допомогою операторів $U, W_{jk}, i = 1, \dots, n., k = 1, \dots, 2m_j$, неважко побудувати оператор $V: H \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N)$ ($\omega = \{\omega_{jk}\}$), який задовольняє умови 2 і 3 теореми 1. Таким чином, залишилося показати, що ваги ω_{jk} можна підібрати так, щоб вони задовольняли умову Макенхаупта. Враховуючи (1) і те, що λ_{jk} є звуженнями на Δ_{jk} галузок деяких алгебраїчних функцій, неважко переконатися, що функції $|(\lambda_{jk}^{-1})'(x)|$ можна подати у вигляді добутку $|x - a|^\nu g$, де $a \in \mathbb{R}, \nu \in]-1, 1[$, g — вимірна і $0 < \inf g \leq \sup g < +\infty$. Тому достатньо показати, що умову Макенхаупта задовольняє вага $\omega_\nu(x) = \max(1, |x|^\nu), \nu \in]-1, 1[$. Перевірка цього факту зводиться до нескладних обчислень. Теорема доведена.

1. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции.— М.: Мир, 1984.— 469 с.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.— 740 с.

Одержано 06.03.92