К О Р О Т К І   П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.5

В. М. Дільний (Дрогобиц. пед. ун-т)

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДЕЯКИХ УМОВ ДЛЯ ВАГОВИХ ПРОСТОРІВ ГАРДІ

Let $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, where $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ is a space of functions analytic in the half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$, for which

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |G(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\} < +\infty.$$

In the case where a singular boundary function of G is identically constant and $G(z) \neq 0$ for all $z \in \mathbb{C}_+$, conditions equivalent to the condition $G(z)\exp\left\{\dfrac{2\sigma}{\pi} z\ln z - cz\right\} \notin H^p(\mathbb{C}_+)$, where $H^p(\mathbb{C}_+)$ is the Hardy space, are found in terms of the behavior of G on the real semiaxis and the imaginary axis.

Нехай $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, де $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ — клас функцій, аналітичних у правій півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$, для яких

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |G(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\} < +\infty.$$

У випадку, коли сингулярна гранична функція функції G є тотожно сталою і $G(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, знайдено еквівалентні умови до $G(z)\exp\left\{\dfrac{2\sigma}{\pi} z\ln z - cz\right\} \notin H^p(\mathbb{C}_+)$, де $H^p(\mathbb{C}_+)$ — простір Гарді, у термінах поведінки G на дійсній півосі та на уявній осі.

Нехай $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leqslant p < +\infty$, $\sigma \geqslant 0$, — клас функцій, аналітичних у правій півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, для яких

$$\|G\| := \sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Цей клас є узагальненням простору Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$ у півплощині. Останній [1] одержуємо, коли $\sigma = 0$. З іншого боку, простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ містить [2, с. 26] клас Пелі – Вінера цілих функцій експоненціального типу $\leq \sigma$, що належать L^p на дійсній осі. Класи $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ вивчалися в [3, 4]. Там, зокрема, встановлено, що функції $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ мають майже скрізь (м. с.) на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, які теж позначаємо через $G(iy)$, і $G(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$. Для функцій з розглядуваного простору існує [5, 6] сингулярна гранична функція, що з точністю до адитивної сталої і значень у точках неперервності визначається рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x\to 0+} \int_{t_1}^{t_2} \ln\left|G(x+iy)\right| dy - \int_{t_1}^{t_2} \ln\left|G(iy)\right| dy.$$

Б. В. Винницький [7, 8] поставив задачу одержання кількісних умов, за яких у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ повною за вказаною вище нормою є система

$$\{G(z)e^{\tau z},\ \tau \le 0\},$$

де $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Ця задача залишається відкритою, проте в [8, 9] показано, що коли система є повною, то G не має нулів у $\mathbb{C}_+$, її сингулярна гранична функція є тотожно сталою і виконується умова

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt-2\sigma\ln r\right)=-\infty. \tag{1}$$

У зв'язку з цим виникла задача про зв'язок умови (1) з поведінкою функції G на $\mathbb{R}_+$. Її розв'язує наступне твердження.

Теорема. *Нехай* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leqslant p < +\infty$, $\sigma > 0$, *і* $f(z) \ne 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$, *а також* $h(t) \equiv \mathrm{const}$. *Тоді умова* (1) *еквівалентна кожній з наступних умов*:

$$G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z-cz\right\}\notin H^p(\mathbb{C}_+)\quad \text{для кожного}\quad c\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln\bigl|G(it)\bigr|dt-2\sigma\ln r\right)=-\infty, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\bigl|G(x)\bigr|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)=+\infty. \tag{4}$$

Доведення теореми випливає з лем 2 – 5. Зауважимо, що теорема залишається справедливою і для випадку $\sigma = 0$ в тому розумінні, що кожна з умов (1) – (4) визначає порожню множину у просторі $H^p_0(\mathbb{C}_+) \equiv H^p(\mathbb{C}_+)$. Нам невідомі подібні результати для інших вагових просторів Гарді. Щодо класу $H^p(\mathbb{C}_+)$, то одержати умови, які пов'язували б „малість" модуля функції на $\partial\mathbb{C}_+$ з „великістю" її модуля на $\mathbb{R}_+$, неможливо. Справді, коли $G \in H^p(\mathbb{C}_+)$ не має нулів $\mathbb{C}_+$ і її сингулярна гранична функція є тотожною сталою, то [10, с. 149]

$$\bigl|G(x)\bigr|=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{t^2+x^2}\ln\bigl|G(it)\bigr|\,dt+cx\right\},$$

тобто коли $\bigl|G_1(it)\bigr| \le \bigl|G_2(it)\bigr|$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$ і $c = 0$, то $\bigl|G_1(x)\bigr| \le \bigl|G_2(x)\bigr|$ для всіх $x > 0$.

Сформулюємо допоміжне твердження, що міститься, фактично, в [5].

Лема 1. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leqslant p < +\infty$, $\sigma > 0$, $h(t) \equiv \mathrm{const}$ *і* $f(z) \ne 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$, *то*

$$G(z)=\exp\left(ia_0+a_1z+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t,z)\ln\bigl|G(it)\bigr|\,dt\right),\quad a_0\in\mathbb{R},\quad a_1\in\mathbb{R},$$

де

$$Q(t,z)=\frac{(tz+i)^2}{i(t^2+1)^2(t+iz)},$$

і виконуються умови

$$\varliminf_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln\bigl|G(it)\bigr|\,dt>-\infty,\qquad \ln\bigl|G(it)\bigr|\in L^1[-1;1].$$

Лема 2. *Якщо* $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і виконується умова* (1), *то виконується й умова* (3).

Доведення. Оскільки $G(it)e^{-\sigma|t|}\in L^p(\mathbb{R})$, то

$$\varphi_1(r):=\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln^+\bigl|G(it)e^{-\sigma|t|}\bigr|dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\frac{1}{t^2}\bigl|G(it)e^{-\sigma|t|}\bigr|^p dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\Bigl|G(it)e^{-\sigma|t|}\Bigr|^p\,dt<c_1<+\infty.$$

Функція

$$\varphi_2(r):=\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln^+\frac{1}{\bigl|G(it)e^{-\sigma|t|}\bigr|}dt,$$

очевидно, є монотонно зростаючою. Оскільки

$$\ln\bigl|G(it)e^{-\sigma|t|}\bigr|=\ln^+\bigl|G(it)e^{-\sigma|t|}\bigr|-\ln^+\frac{1}{\bigl|G(it)e^{-\sigma|t|}\bigr|},$$

то якби функція φ_2 була обмеженою зверху, то

$$\varliminf_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln\bigl|G(it)e^{-\sigma|t|}\bigr|dt>-\infty,$$

що суперечить умові. Отже,

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\varphi_2(r)=\lim_{r\to+\infty}\varphi_2(r)=+\infty.$$

Тому

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln\bigl|G(it)e^{-\sigma|t|}\bigr|dt=$$

$$=\varlimsup_{r\to+\infty}\bigl(\varphi_1(r)-\varphi_2(r)\bigr)\leqslant\varlimsup_{r\to+\infty}\bigl(c_1-\varphi_2(r)\bigr)=-\infty,$$

а отже, виконується умова (3).

Лема 3. *Якщо* $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $h(t)\equiv\mathrm{const}$, $f(z)\neq0$ *для всіх* $z\in\mathbb{C}_+$, *а також виконується умова* (3), *то виконується й умова* (4).

Доведення. Застосовуючи лему 1 до функцій G та $e^{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z}$ і покладаючи $z = x > 0$, маємо

$$\ln \left| G(x) e^{\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x} \right| = cx + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t, x) \ln \left| G(it) e^{-\sigma |t|} \right| dt \right\}.$$

Оскільки

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\pi} Q(t; x) \right\} = \frac{-t^2 x^3 + x + 2t^2 x}{\pi (1 + t^2)^2 (t^2 + x^2)},$$

то

$$\frac{\ln \left| G(x) e^{\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x} \right|}{x} = c + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{-t^2 x^2 + 1 + 2t^2}{\pi (1 + t^2)^2 (t^2 + x^2)} \ln \left| G(it) e^{-\sigma |t|} \right| dt =$$

$$= c - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 x^2}{\pi (1 + t^2)^2 (t^2 + x^2)} \ln^+ \left| G(it) e^{-\sigma |t|} \right| dt +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + 2t^2}{\pi (1 + t^2)^2 (t^2 + x^2)} \ln^+ \left| G(it) e^{-\sigma |t|} \right| dt +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 x^2}{\pi (1 + t^2)^2 (t^2 + x^2)} \ln^+ \frac{1}{\left| G(it) e^{-\sigma |t|} \right|} dt -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + 2t^2}{\pi (1 + t^2)^2 (t^2 + x^2)} \ln^+ \frac{1}{\left| G(it) e^{-\sigma |t|} \right|} dt =$$

$$= c - I_1 + I_2 + I_3 - I_4.$$

Оцінимо відповідні інтеграли:

$$I_1 = \frac{1}{p} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 x^2}{\pi (1 + t^2)^2 (t^2 + x^2)} \ln^+ \left(\left| G(it) e^{-\sigma |t|} \right|^p \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 x^2}{(1 + t^2)^2 (t^2 + x^2)} \left| G(it) e^{-\sigma |t|} \right|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| G(it) e^{-\sigma |t|} \right|^p dt < +\infty;$$

вважаючи, що $x > 1$, маємо

$$I_4 \leqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{\left| G(it) e^{-\sigma |t|} \right|} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^2} \left(\ln^+ \frac{1}{|G(it)|} + \sigma |t| \right) dt =$$

$$= c_2 + \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{\bigl|G(it)\bigr|} dt =$$

$$= c_3 + \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt.$$

Останнє отримуємо з того, що за лемою 1 $\ln \bigl|G(it)\bigr| \in L^1[-1;1]$. Далі

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{\bigl|G(it)\bigr|} dt \leqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \int\limits_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{\bigl|G(is)\bigr|} ds =$$

$$= \frac{1}{t^2} \int\limits_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds \Bigg|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{\bigl|G(is)\bigr|} ds \frac{2}{t^3} dt \leqslant$$

$$\leqslant c_4 + c_5 \frac{\ln t}{t^2} \Bigg|_1^{+\infty} + c_5 \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3} dt < c_6.$$

Це одержуємо з того, що

$$\int\limits_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{\bigl|G(is)\bigr|} ds \leqslant \frac{4}{3} \int\limits_1^{2t} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{(2t)^2} \right) \ln^+ \frac{1}{\bigl|G(is)\bigr|} ds \leqslant c_7 \ln t + c_7,$$

тому що за лемою 1

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{1 < |t| \leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ \frac{1}{\bigl|G(it)\bigr|} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1 < |t| \leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ \bigl|G(it)\bigr| dt + c_8 \leqslant c_9 + c_{10} \ln t.$$

Аналогічно

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{\bigl|G(it)\bigr|} dt \leqslant c_{11},$$

тому $I_4 \leqslant c_{12}$. Далі

$$I_3 \geqslant \int\limits_{1 < |t| \le x} \frac{t^2 x^2}{\pi (1+t^2)^2 (t^2 + x^2)} \ln^+ \frac{1}{\bigl|G(it) e^{-\sigma |t|}\bigr|} dt \ \ge$$

$$\ge \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1 < |t| \le x} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{\bigl|G(it) e^{-\sigma |t|}\bigr|} dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{8\pi} \int\limits_{1 < |t| \le x} \frac{1}{t^2} \ln^+ \frac{1}{\bigl|G(it) e^{-\sigma |t|}\bigr|} dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{1<|t|\leq x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{x^2}\right) \ln\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right| dt.$$

Тому за умовою леми $\lim\limits_{x\to+\infty} I_3 = +\infty$. Оскільки $I_2 > 0$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}\right|}{x} = +\infty.$$

Лема 4. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і виконується умова* (4), *то виконується й умова* (2).

Доведення. Припустимо, що умова (2) не виконується, тобто

$$(\exists c \in \mathbb{R}): \ G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z - cz\right\} \in H^p(\mathbb{C}_+). \tag{5}$$

Тоді [10, с. 139]

$$\left|G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z\right\}\right| \leqslant \frac{e^{cx}}{\sqrt[p]{x}}.$$

Тому $\ln|G(x)| + \dfrac{2\sigma}{\pi}x\ln x \leqslant cx$, якщо $x \geq 1$, що суперечить умові (4).

Лема 5. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $h(t) \equiv \mathrm{const}$, $f(z) \neq 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$ *і виконується умова* (2), *то виконується й умова* (1).

Доведення. Нехай умова (1) не виконується. Тоді

$$(\exists c \in \mathbb{R})\,(\forall r > 1): \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right| dt > c. \tag{6}$$

Оскільки $G(it)e^{-\sigma|t|} \in L^p(\mathbb{R})$, то

$$\int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^+\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right| dt =$$

$$= \frac{1}{p} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^+\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|^p dt < +\infty, \tag{7}$$

а тому з (6) маємо

$$\int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \frac{1}{\ln^+\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|} dt < c_1.$$

Враховуючи, що за лемою 1 $\ln\left|G(it)\right| \in L^1[-1;1]$, оскільки $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ \dfrac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|}}{1+t^2} dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln^{+} \dfrac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|}}{1+t^2}dt + \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \frac{\ln^{+} \dfrac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|}}{1+t^2}dt =$$

$$= c + \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \frac{\ln^{+} \dfrac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|}}{1+t^2}dt \leqslant$$

$$\leqslant c + \frac{4}{3}\varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(2r)^2}\right)\ln^{+} \frac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|}dt \leqslant$$

$$\leqslant c + \frac{4}{3}\varlimsup_{2r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant 2r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(2r)^2}\right)\ln^{+} \frac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|}dt < +\infty.$$

Аналогічно з (7) отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^{+}\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|}{1+t^2}dt < +\infty,$$

тому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\ln\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|\right|}{1+t^2}dt < +\infty.$$

Тоді з [11 с. 189, 190], оскільки функція $G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}$ не має нулів у $\mathbb{C}_+$ і її сингулярна гранична функція є тотожною сталою, отримуємо, що виконується (5), а це суперечить умові (2).

Лему доведено.

1. *Седлецкий А. М.* Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения // Мат. сб. – 1975. – **96**, № 1. – С. 75 – 82.
2. *Винер Н., Пели Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1963. – 256 с.
3. *Винницкий Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 484 – 500.
4. *Винницький Б. В.* Про нулі деяких класів функцій, аналітичних в півплощині // Мат. студ. – 1996. – **6**, № 1. – С. 67 – 72.
5. *Винницький Б. В., Дільний В. М.* Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки // Там же. – 2001. – **16**, № 1. – С. 61 – 70.
6. *Fedorov M. A., Grishin A. F.* Some questions of the Nevanlinna theory for the complex half-plane // Math. Phys., Anal. and Geom. – 1998. – **1**. – P. 223 – 271.
7. *Винницький Б. В.* Рівняння згортки і кутові граничні значення аналітичних функцій // Допов. НАН України. Сер. А. – 1995. – № 10. – С. 13 – 17.
8. *Винницький Б. В.* Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних в півсмузі // Мат. студ. – 1997. – **8**, № 1. – С. 41 – 52.
9. *Дільний В. М.* Деякі властивості функцій, аналітичних у півплощині, та їх застосування: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2002. – 16 с.
10. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
11. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 306 с.

Одержано 30.05.2005,
після доопрацювання — 04.11.2005