УДК 519.21

Ю. В. Козаченко*, **Т. О. Яковенко** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ У ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА – ОРЛИЧА

We establish conditions under which trajectories of stochastic processes from the Orlicz spaces of random variables belong with probability one to the functional Sobolev – Orlicz spaces, in particular, to the classical Sobolev spaces defined on the entire real line. The obtained results enable us to estimate the rate of convergence for wavelet expansions of stochastic processes from spaces $L_p(\Omega)$ and $L_2(\Omega)$ in the norm of the space $L_q(\mathbb{R})$.

Знайдено умови належності з імовірністю одиниця траєкторій випадкових процесів із просторів Орлича випадкових величин функціональним просторам Соболєва – Орлича, зокрема класичним просторам Соболєва, що визначені на всій дійсній осі. Це дало змогу оцінити швидкість збіжності вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів $L_p(\Omega)$ та $L_2(\Omega)$ у нормі простору $L_q(\mathbb{R})$.

1. Вступ. Одним із основних напрямків у теорії випадкових процесів, що інтенсивно розвивається, є вивчення аналітичних властивостей траєкторій випадкових процесів та оцінка розподілу функціоналів від випадкових процесів. Це пояснюється широким застосуванням отриманих результатів при розв'язанні задач, що виникають у різних областях наукових досліджень, зокрема в фінансовій математиці, теорії масового обслуговування, біології, медицині, радіотехніці.

Основним завданням роботи є знаходження умов належності з імовірністю одиниця траєкторій випадкових процесів із просторів Орлича випадкових величин просторам Соболєва – Орлича та класичним просторам Соболєва, а також застосування отриманих результатів до дослідження швидкості збіжності вейвлет розкладів випадкових процесів.

2. Необхідні відомості з теорії випадкових процесів із просторів Орлича.

Означення 1 [1]. *Функція* $U = \{U(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ *називається* S*-функцією Орлича, якщо вона є парною, неперервною, опуклою і* $U(0) = 0$, $U(x) > 0$, *коли* $x \neq 0$.

***Приклад* 1.** Функції $U_1(x) = A|x|^{\alpha}$, $A > 0$, $\alpha \geq 1$, та $U_2(x) = \exp\{B|x|^{\beta}\} - 1$, $B > 0$, $\beta \geq 1$, є S-функціями Орлича.

Означення 2 [1]. *Нехай* $U_1 = U_1(x)$ *і* $U_2 = U_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *— дві* S*-функції Орлича. Будемо говорити, що* U_1 *підпорядкована* U_2 ($U_1 \prec U_2$), *або* U_2 *мажорує* U_1, *якщо існують сталі* $x_0 \geq 0$ *і* $k > 0$ *такі, що для всіх* $x \geq x_0$ $U_1(x) \leq U_2(kx)$.

Розглянемо деякий вимірний параметричний простір $\{T, \mathcal{B}(T), \mu\}$.

Означення 3 [1]. *Нехай* $U = \{U(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ *— деяка* S*-функція Орлича. Простір вимірних функцій* $f = \{f(t), t \in T\}$ *називається простором Орлича* $L_U(T)$, *що породжений* S*-функцією* U, *якщо для кожної функції* f *існує стала* $r_f > 0$ *така, що*

$$\int_T U\left(\frac{f(t)}{r_f}\right) d\mu(t) < \infty.$$

У цьому просторі можна ввести норму — норму Люксембурга

* Частково підтримано грантом NATO PST.CLG.980408.

$$\| f(t) \|_{L_U(T)} = \inf\left\{ r > 0 \colon \int_T U\left(\frac{f(t)}{r} \right) d\mu(t) \le 1 \right\}.$$

***Зауваження* 1.** Простір $L_U(T, \mu)$ є банаховим відносно норми Люксембурга. Доведення цього твердження міститься в [1].

Означення 4 [2]**.** *Якщо розглянути стандартний імовірнісний простір* $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}\}$ *і деяку* S*-функцію* U, *то простором Орлича випадкових величин, що породжений функцією* U, *називається простір* $L_U(\Omega)$. *Норма Люксембурга у цьому просторі має вигляд*

$$\| \xi \|_{L_U(\Omega)} = \inf\left\{ r > 0 \colon \mathrm{E}U\left(\frac{\xi}{r} \right) \le 1 \right\}.$$

Означення 5 [2]**.** *Випадковий процес* $X = \{ X(t),\ t \in T \}$ *належить простору Орлича* $L_U(\Omega)$, *якщо для всіх* $t \in T$ *випадкова величина* $X(t)$ *належить простору* $L_U(\Omega)$.

Означення 6 [2]**.** *Випадковий процес* $X = \{ X(t),\ t \in T \}$ *належить простору* $L_U(T)$ *з імовірністю одиниця, якщо траєкторії процесу вимірні і з імовірністю одиниця* $X(T) \in L_U(T)$.

Умова М. Будемо говорити, що для деякої S-функції Орлича V виконується умова M відносно параметричного простору T, якщо для будь-яких вимірних випадкових процесів з простору $L_V(\Omega)$ таких, що $\| Z(t) \|_{L_V(\Omega)} = 1$, випадкова величина $\| Z(t) \|_{L_V(T)}$ належить простору $L_V(\Omega)$ й існує стала a_V така, що

$$\Big\| \| Z(t) \|_{L_V(T)} \Big\|_{L_V(\Omega)} \le a_V.$$

Умова M виконується для S-функцій $V_1(x) = |x|^p$, $x \in \mathbb{R}$, $p \ge 1$, та $V_2(x) = \exp\left\{ |x|^\alpha \right\} - 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \ge 1$, відносно будь-якої компактної множини (див. [3]).

Теорема 1 [3]**.** *Нехай* U *і* V — *дві* S*-функції Орлича такі, що функція* $W(x) = V^{(-1)}(U(x))$, $x \in \mathbb{R}$, *є опуклою і для* V *виконується умова* M *відносно параметричного простору* $[T_1, T_2]^d$ *зі сталою* a_V. *Для сепарабельного вимірного випадкового процесу* $X = \left\{ X(t),\ t \in [T_1, T_2]^d \right\}$ *з простору Орлича* $L_V(\Omega)$, *для якого* $\Gamma = \sup_{t \in [T_1, T_2]^d} \| X(t) \|_{L_V(\Omega)} < \infty$, *виконуються такі умови*:

i) $\sup\limits_{\substack{\rho(t,s) \le h \\ t,s \in [T_1, T_2]^d}} \| X(t) - X(s) \|_{L_V(\Omega)} \le \sigma_{[T_1, T_2]^d}(h)$, *де* $\sigma_{[T_1, T_2]^d}(h)$, $h > 0$, — *неперервна, монотонно неспадна функція така, що* $\sigma_{[T_1, T_2]^d}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$;

ii) $\int_{0+} \beta\left(\left(\sigma^{(-1)}_{[T_1, T_2]^d}(u) \right)^d \right) du < \infty$, *де* $\beta(z) = \dfrac{V^{(-1)}(1/z)}{U^{(-1)}(1/z)}$, $V^{(-1)}(z)$, $U^{(-1)}(z)$, $z > 0$ *і* $\sigma^{(-1)}_{[T_1, T_2]^d}(\cdot)$ — *функції, обернені до* V, U *і* $\sigma_{[T_1, T_2]^d}(\cdot)$.

Тоді X *належить функціональному простору Орлича* $L_U\left([T_1, T_2]^d \right)$ *з імовірністю одиниця і для* $\gamma_0 = \sigma_{[T_1, T_2]^d}(T_2 - T_1)$ *та будь-яких* $m \ge 0$, $0 < \theta < 1$ *мають місце такі нерівності*:

1) $$\Big\| \| X(t)\|_{L_U([T_1,T_2]^d)} \Big\|_{L_V(\Omega)} \le a_V \Bigg[\Gamma\beta\Big(\Big(\sigma^{(-1)}_{[T_1,T_2]^d}(\theta^m\gamma_0)/3\Big)^d\Big) +$$

$$+ \frac{1+\theta}{\theta(1-\theta)} \int\limits_0^{\gamma_0\theta^{m+1}} \beta\Big(\Big(\sigma^{(-1)}_{[T_1,T_2]^d}(u)/3\Big)^d\Big) du \Bigg] =: \tilde{B}_m;$$

2) *для будь-яких* $\delta > 0$ $$\mathrm{P}\Big\{ \| X(t)\|_{L_U([T_1,T_2]^d)} > \delta \Big\} \le \left(V\left(\frac{\delta}{\tilde{B}_m} \right) \right)^{-1}.$$

3. Випадкові процеси у просторах Соболєва – Орлича.

Означення 7 [4]**.** *Функція* $f = \{ f(x),\ x \in \mathbb{R} \}$ *називається слабко диференційовною, якщо існує функція* $g = \{ g(x),\ x \in \mathbb{R} \}$, *що є інтегровною на будь-якому обмеженому інтервалі, та для всіх* $a \le b$ *має місце зображення*

$$f(a) - f(b) = \int\limits_a^b g(u)\,du. \tag{1}$$

Функція g *називається слабкою* (*узагальненою*) *похідною функції* f. *Будемо позначати слабку похідну* f'_y.

***Зауваження* 2.** Слабко диференційовні функції неперервні на $\mathbb{R}$. Функція g визначається з точністю до еквівалентності.

Означення 8. *Функція* $f = \{ f(x),\ x \in \mathbb{R} \}$ *є* N *разів слабко диференційовною, якщо вона має* N *слабко диференційовних похідних.*

***Зауваження* 3.** Функція f та похідні $f_y^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, є неперервними функціями, а похідні $f_y^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, — звичайними похідними.

Нехай параметричний простір — це $(T, \mathcal{B}(T), \mu)$, де T — обмежений інтервал з $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(T)$ — σ-алгебра борелевих множин на T, μ — міра Лебега.

Нехай $V = \{ V(x),\ x \in \mathbb{R} \}$ — деяка S-функція Орлича.

Означення 9. *Випадковий процес* $X = \{ X(t),\ t \in T \}$ *з простору* $L_V(\Omega)$ *називається неперервним за нормою в* $L_V(\Omega)$, *якщо для будь-яких* $t, s \in T$

$$\| X(t) - X(s) \|_{L_V(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to s.$$

***Зауваження* 4.** У випадку, коли простір Орлича $L_V(\Omega)$ — це простір $L_p(\Omega)$, всі випадкові процеси, що належать цьому простору, будуть неперервними за нормою $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$.

Означення 10. *Випадковий процес* $X \in L_V(\Omega)$ *називається диференційовним за нормою у просторі* $L_V(\Omega)$ *в точці* $t_0 \in T$, *якщо існує така випадкова величина* $X^{[1]}(t_0) \in L_V(\Omega)$, *що*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{X(t_0+h) - X(t_0)}{h} - X^{[1]}(t_0) \right\|_{L_V(\Omega)} = 0.$$

Процес X *є диференційовним за нормою в* $L_V(\Omega)$ *на* T, *якщо він диференційовний у кожній точці цього простору. Тоді процес* $X^{[1]} = \{ X^{[1]}(t),\ t \in T \}$ *називається похідною за нормою в* $L_V(\Omega)$ *процесу* X.

Означення 11. *Другою похідною за нормою в* $L_V(\Omega)$ *випадкового процесу* X *називається* $X^{[2]}(t) = (X^{[1]})^{[1]}(t)$ *і, аналогічно,* $X^{[k]}(t) = (X^{[k-1]})^{[1]}(t)$, $k \geq 1$, $X^{[0]}(t) := X(t)$.

Лема 1. *Нехай* $X(t)$ *і* $Y(t)$, $t \in T$, — *два процеси з простору Орлича* $L_V(\Omega)$ *такі, що для всіх* $t \in T$ $X^{[1]}(t) = Y^{[1]}(t)$ *з імовірністю одиниця. Тоді*

$$\| X(t) - Y(t) \|_{L_V(\Omega)} = \text{const}.$$

Доведення. Визначимо функціонал $f(t) := \| X(t) - Y(t) \|_{L_V(\Omega)}$. Тоді

$$|f'(t)| = \left| \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left| \frac{1}{h} \| X(t+h) - Y(t+h) \|_{L_V(\Omega)} - \| X(t) - Y(t) \|_{L_V(\Omega)} \right| \leq$$

$$\leq \lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|} \| X(t+h) - X(t) - [\, Y(t+h) - Y(t) \,] \|_{L_V(\Omega)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} \right\|_{L_V(\Omega)} =$$

$$= \left\| X^{[1]}(t) - Y^{[1]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} = 0.$$

Отже, для всіх $t \in T$ $f'(t) = 0$, тобто $f(t) = c = \text{const}$.

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $X = \{ X(t),\ t \in T \}$ — N *разів диференційовний за нормою в* $L_V(\Omega)$ *випадковий процес, причому для всіх* $k = \overline{0, N}$ $\sup_{t\in T} \left\| X^{[k]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} \leq \leq \Gamma_k < \infty$.

Тоді для кожного $k = \overline{0, N-1}$ *похідна* $X^{[k]}(t)$ *є неперервною за нормою в* $L_V(\Omega)$ *і для досить малих* h

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t,s \in T}} \left\| X^{[k]}(t) - X^{[k]}(s) \right\|_{L_V(\Omega)} \leq 2\Gamma_{k+1} |h|. \tag{2}$$

Доведення. Для всіх $k = \overline{0, N-1}$

$$\left\| X^{[k]}(t+h) - X^{[k]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} = |h| \left\| \frac{X^{[k]}(t+h) - X^{[k]}(t)}{h} \right\|_{L_V(\Omega)} =$$

$$= |h| \left\| \frac{X^{[k]}(t+h) - X^{[k]}(t)}{h} - X^{[k+1]}(t) + X^{[k+1]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} \leq$$

$$\leq |h| \left(\left\| \frac{X^{[k]}(t+h) - X^{[k]}(t)}{h} - X^{[k+1]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} + \left\| X^{[k+1]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} \right).$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх $|h| < \delta$

$$\left\| \frac{X^{[k]}(t+h) - X^{[k]}(t)}{h} - X^{[k+1]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} < \varepsilon.$$

Виберемо ε настільки малим, що $\varepsilon < \Gamma_{k+1}$ (вважаємо, що $\Gamma_{k+1} \neq 0$), тоді

$$\left\| X^{[k]}(t+h) - X^{[k]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} \le |h| \left(\varepsilon + \left\| X^{[k+1]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} \right) \le$$

$$\le 2\Gamma_{k+1} |h| \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Лему доведено.

Означення 12. *Будемо говорити, що для процесу* $X = \{ X(t),\ t \in T \}$ *існує узагальнена* (*слабка*) *похідна з імовірністю одиниця, якщо існує локально інтегровний за Лебегом з імовірністю одиниця випадковий процес* $X'_y(t)$ *такий, що для всіх* $a, b \in T$

$$\int_a^b X'_y(t)\,dt = X(b) - X(a)$$

з імовірністю одиниця. При цьому випадковий процес $X'_y(t)$ *називається узагальненою* (*слабкою*) *похідною процесу* X.

Означення 13 [2]. *Нехай* $C(T)$ — *простір неперервних на* T *дійсних функцій. Випадковий процес* $X = \{ X(t),\ t \in T \}$ *називається вибірково неперервним на* T *з імовірністю одиниця, якщо* $\mathrm{P}\{ X \in C(T) \} = 1$.

***Зауваження* 5.** У даній роботі розглядаються процеси, що є неперервними за нормою. Оскільки з неперервності за нормою випливає неперервність за ймовірністю, будемо вважати, що траєкторії цих процесів є вимірними, тому що в цьому випадку завжди можна перейти до вимірної модифікації процесу.

Теорема 2. *Нехай* $V = \{ V(x),\ x \in \mathbb{R} \}$ — *деяка* S*-функція Орлича, а* $X = \{ X(t),\ t \in \mathbb{R} \}$ — *сепарабельний вимірний випадковий процес із простору Орлича* $L_V(\Omega)$ *такий, що*:

i) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : \sup\limits_{t \in [a,b]} \| X(t) \|_{L_V(\Omega)} < \infty$;

ii) $\sup\limits_{\substack{|t-s| \le h \\ t,s \in [a,b]}} \| X(t) - X(s) \|_{L_V(\Omega)} \le \sigma_{a,b}(h)$, *де* $\sigma_{a,b} = \sigma_{a,b}(h)$, $h > 0$, — *такі неперервні, монотонно неспадні функції, що* $\sigma_{a,b}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$;

iii) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : \int_{0+} V^{(-1)}\left(\dfrac{1}{\sigma_{a,b}^{(-1)}(u)} \right) du < \infty$, *де* $V^{(-1)}(z), z \ge 0$, *і* $\sigma_{a,b}^{(-1)}(u)$, $u > 0$, — *функції, обернені до* V *і* $\sigma_{a,b}$.

Тоді випадковий процес X *є вибірково неперервним на* $\mathbb{R}$ *з імовірністю одиниця.*

Доведення. У книзі [2] знайдено умови вибіркової неперервності випадкових процесів з імовірністю одиниця, що визначені на компактній параметричній множині. З наслідку 5.2 до теореми 5.2 [2, с. 136] випливає, що для будь-яких фіксованих $a, b \in \mathbb{R}$ випадковий процес X буде вибірково неперервним на $[a, b]$ з імовірністю одиниця.

Оскільки $\mathbb{R}$ можна зобразити у вигляді об'єднання зліченної кількості скінченних інтервалів, тобто $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [-k, k]$, на кожному з яких X є вибірково неперервним з імовірністю одиниця, то

$$\mathrm{P}\{X \in C(\mathbb{R})\} = \mathrm{P}\left\{X \in C\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}[-k, k]\right)\right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{\bigcap_{k=1}^{+\infty}\{X \in C([-k, k])\}\right\} = 1.$$

Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай* $V = \{V(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ *— деяка S-функція Орлича, а вимірний випадковий процес* $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ *із простору Орлича* $L_V(\Omega)$ *задовольняє такі умови*:

1) X *— неперервно диференційовний за нормою в* $L_V(\Omega)$ *на* $\mathbb{R}$;

2) X *— вибірково неперервний з імовірністю одиниця на* $\mathbb{R}$;

3) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ \ \exists\, C_{a,b} > 0 : \sup\limits_{a \le t \le b} \mathrm{E}\left|X^{[1]}(t)\right| \le C_{a,b} < \infty.$

Тоді для випадкового процесу X *з імовірністю одиниця існує узагальнена похідна* $X'_y(t)$, *що збігається для всіх* $t \in \mathbb{R}$ *з імовірністю одиниця з похідною за нормою цього процесу.*

Доведення. Оскільки похідна за нормою $X^{[1]}(t)$ визначається з точністю до еквівалентності, будемо вважати, що траєкторії процесу $X^{[1]}(t)$ є вимірними функціями.

Тоді для кожної фіксованої пари чисел $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, за теоремою Фубіні

$$\mathrm{E}\int_a^b \left|X^{[1]}(t)\right| dt = \int_a^b \mathrm{E}\left|X^{[1]}(t)\right| dt \le C_{a,b}(b - a) < \infty.$$

Звідси випливає, що для всіх $a, b \in \mathbb{R}$ з імовірністю одиниця існує інтеграл Лебега $\int_a^b X^{[1]}(t)\,dt$. Отже, похідна за нормою процесу X є інтегровною за Лебегом на $[a, b]$ з імовірністю одиниця.

Покажемо, що інтеграл Лебега $\int_a^b X^{[1]}(t)\,dt$ існує з імовірністю одиниця для всіх $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$. Дійсно, якщо для деяких фіксованих $a < b$ існує $\int_a^b \left|X^{[1]}(t)\right| dt$ з імовірністю одиниця, то для цих же траєкторій існує $\int_c^d \left|X^{[1]}(t)\right| dt$ з імовірністю одиниця, де $a \le c < d \le b$. Оскільки завжди можна вибрати послідовність інтервалів $[a_n, b_n]$, $n \ge 1$, таких, що $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$, і число таких інтервалів є зліченним, то майже для всіх траєкторій існують інтеграли Лебега $\int_{a_n}^{b_n} \left|X^{[1]}(t)\right| dt$. Отже, для цих же траєкторій існують інтеграли $\int_a^b \left|X^{[1]}(t)\right| dt$, де $-\infty < a < b < +\infty$, а тому процес $X^{[1]}(t)$ є інтегровним за Лебегом на $[a, b]$ для всіх $a, b \in \mathbb{R}$ з імовірністю одиниця.

Нехай $a \in \mathbb{R}$ — деяке фіксоване число. Розглянемо випадковий процес $Y_a(t) = \int_a^t X^{[1]}(u)\,du$, $t \in \mathbb{R}$.

Покажемо, що для кожного фіксованого t $Y_a^{[1]}(t) = X^{[1]}(t)$ з імовірністю одиниця. Дійсно, для досить малих h

$$\left\| \frac{Y_a(t+h) - Y_a(t)}{h} - X^{[1]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} =$$

$$= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} X^{[1]}(u)\,du - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} X^{[1]}(t)\,du \right\|_{L_V(\Omega)} =$$

$$= \frac{1}{|h|} \left\| \int_t^{t+h} \left(X^{[1]}(u) - X^{[1]}(t) \right) du \right\|_{L_V(\Omega)} \leq \frac{1}{|h|} \int_t^{t+h} \left\| X^{[1]}(u) - X^{[1]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} du \leq$$

$$\leq \sup_{|u-t| \leq h} \left\| X^{[1]}(u) - X^{[1]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} \to 0, \qquad h \to 0,$$

оскільки процес $X^{[1]}(t)$ є неперервний за нормою в $L_V(\Omega)$. Тому для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$ $Y_a^{[1]}(t) = X^{[1]}(t) = (X(t) - X(a))^{[1]}$ з імовірністю одиниця. Тоді за лемою 1

$$f(t) = \| Y_a(t) - (X(t) - X(a)) \|_{L_V(\Omega)} = \text{const}.$$

Оскільки $f(a) = 0,$ то для кожного $t \in \mathbb{R}$

$$Y_a(t) = \int_a^t X^{[1]}(u)\,du = X(t) - X(a) \quad \text{з імовірністю одиниця.}$$

Процес $\int_a^t X^{[1]}(u)\,du$ є вибірково неперервним з імовірністю одиниця, як інтеграл Лебега, і $X(t)$ — вибірково неперервний з імовірністю одиниця процес за припущенням, тому остання рівність виконується з імовірністю одиниця для всіх a та t з $\mathbb{R}$. Звідси і випливає твердження теореми.

Нехай $(T, \mathcal{B}(T), \mu)$ — вимірний простір, $T \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(T)$ — σ-алгебра борелевих множин на T, μ — міра Лебега, U — деяка S-функція Орлича.

Означення 14 [5]. *Простором Соболєва – Орлича N-го порядку $W_U^N(T)$ називається множина класів еквівалентності функцій із функціонального простору Орлича $L_U(T)$, що задається таким чином*:

$$W_U^N(T) = \left\{ f : T \to \mathbb{R},\ f \text{ — вимірні},\ f_y^{(k)}(t) \in L_U(T),\ 0 \leq k \leq N \right\},$$

де $f_y^{(k)}(t)$ — узагальнена похідна функції f порядку k.

Означення 15. *Випадковий процес $X = \{ X(t),\ t \in T \}$ належить простору Соболєва – Орлича $W_U^N(T)$ з імовірністю одиниця, якщо траєкторії процесу вимірні і для всіх $0 \leq k \leq N$ існує узагальнена k-та похідна процесу $X_y^{(k)}(t)$, що належить простору $L_U(T)$ з імовірністю одиниця.*

***Зауваження* 6.** Якщо S-функція $U(x) = |x|^q$, $x \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, то простір $W_U^N(T)$ є класичним простором Соболєва $W_q^N(T)$.

Нехай параметричним простором є $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра борелевих множин на $\mathbb{R}$, μ — міра Лебега. Позначимо $U_1(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Розглянемо числову послідовність $\{ x_l \}_{l \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}$, що задає розбиття простору $\mathbb{R}$ на інтервали $[x_{l-1}, x_l)$, $l \in \mathbb{Z}$, яке має такі властивості:

$$\forall\, l \in \mathbb{Z} : \Delta x_l = |x_l - x_{l-1}| < \infty, \qquad \bigcup_{l\in\mathbb{Z}} [\, x_{l-1}, x_l \,) = \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$[\, x_{l'-1}, x_{l'} \,) \cap [\, x_{l''-1}, x_{l''} \,) = \varnothing \quad \text{при} \quad l' \neq l''.$$

Теорема 4. *Нехай* U *і* V *— дві* S*-функції Орлича такі, що функція* $W(x) = V^{(-1)}(U(x))$, $x \in \mathbb{R}$, *є опуклою,* $U_1 \prec V$ *і для* V *виконується умова* M *відносно кожної з множин* $[\, x_{l-1}, x_l \,)$ *зі сталими* a_V^l, $l \in \mathbb{Z}$, $X = \{ X(t),\ t \in \mathbb{R} \}$ *— сепарабельний, вимірний,* N *разів диференційовний за нормою в* $L_V(\Omega)$ *процес і виконуються такі умови*:

1) $0 \le k \le N,\ l \in \mathbb{Z}\ \ \exists\, \Gamma_{kl} > 0 : \sup\limits_{t\in[\, x_{l-1}, x_l \,)} \left\| X^{[k]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} = \Gamma_{kl} < \infty;$

2) $\forall\, l \in \mathbb{Z} : \sup\limits_{\substack{|t-s|\le h \\ t,s\in[\, x_{l-1}, x_l \,)}} \left\| X^{[N]}(t) - X^{[N]}(s) \right\|_{L_V(\Omega)} \le \sigma_l(h),$ *де* $\sigma_l(h) > 0,\ h > 0$

— такі неперервні, монотонно неспадні функції, що $\sigma_l(h) \to 0$ *при* $h \to 0$;

3) $\int_{0+} V^{(-1)}\left(\dfrac{1}{u} \right) du < \infty;$

4) $\forall\, l \in \mathbb{Z} : \int_{0+} \beta\left(\sigma_l^{(-1)}(u) \right) du < \infty,$ *де* $\beta(z) = \dfrac{V^{(-1)}(1/z)}{U^{(-1)}(1/z)};$

5) *існують послідовності* $\left\{ 0 < \delta_l^k < 1 \right\}_{l \ge 1}$ *такі, що для деяких* $m \ge 0$

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \delta_l^k < \infty \quad i \quad \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(V\left(\frac{\delta_l^k}{B_l^k(m)} \right) \right)^{-1} < \infty,$$

де $B_{kl}(m)$ *— оцінки для* $\left\| \left\| X^{[k]}(t) \right\|_{L_U[\, x_{l-1}, x_l \,)} \right\|_{L_V(\Omega)}$ *з теореми* 1.

Тоді $X(t)$ *належить* $W_U^N(\mathbb{R})$ *з імовірністю одиниця.*

Доведення. Перевіримо спочатку чи виконуються умови теореми 3 для похідних за нормою в $L_V(\Omega)$ випадкового процесу X.

З леми 2 та умови 2 випливає, що для всіх $k = \overline{0, N}$ процеси $X^{[k]}(t)$ є неперервними за нормою в $L_V(\Omega)$, тобто виконується перша умова теореми 3.

З нерівності (2) та умов 1 – 3 за теоремою 2 похідні $X^{[k]}(t)$ є вибірково неперервними з імовірністю одиниця на $\mathbb{R}$ для кожного $k = \overline{0, N-1}$, а отже, виконується друга умова теореми 3.

Оскільки $U_1 \prec V$, то за теоремою 3.2 [2, с. 68] існує деяка стала $0 < C < \infty$ така, що для всіх $k = \overline{1, N}$ і $l \in \mathbb{Z}$

$$\sup_{t\in[\, x_{l-1}, x_l \,)} \mathrm{E}\left| X^{[k]}(t) \right| \le C \sup_{t\in[\, x_{l-1}, x_l \,)} \left\| X^{[k]}(t) \right\|_{L_V(\Omega)} \le C\Gamma_{kl} < \infty$$

і виконується остання умова теореми 3, звідки випливає, що для випадкового процесу X існують узагальнені похідні до N-го порядку включно, що збігаються для всіх $t \in \mathbb{R}$ з відповідними похідними за нормою в $L_V(\Omega)$ з імовірністю одиниця.

Оскільки випадковий процес $X(t)$ належить простору $L_V(\Omega)$, який є банаховим відносно норми Люксембурга, то для будь-якого фіксованого $t \in \mathbb{R}$ $X^{[k]}(t) \in L_V(\Omega)$, $1 \le k \le N$.

З того, що для досить малих z $\dfrac{V^{(-1)}(1/z)}{U^{(-1)}(1/z)} \le V^{(-1)}(1/z)$, та з умови 3 випливає збіжність інтеграла $\int_{0+} \beta(u)\,du$. Тоді з умов 4 та 5 за теоремою 3.2 [6, с. 180] випливає належність похідних $X^{[k]}$, а отже і відповідних узагальнених похідних, процесу X простору $L_U(\mathbb{R})$ з імовірністю одиниця, тобто $X(t)$ належить $W_U^N(\mathbb{R})$ з імовірністю одиниця.

4. $L_p(\Omega)$-процеси. Нехай $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ — вимірний параметричний простір, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра борелевих множин, μ — міра Лебега на $\mathbb{R}$.

Лема 3. *Послідовність*

$$\left\{ x_l = \operatorname{sign}\{l\} \sum_{i=1}^{|l|} \frac{1}{i^\gamma},\ 0 < \gamma < 1 \right\}_{l \in \mathbb{Z}}, \quad \textit{де} \quad \operatorname{sign}\{l\} = \begin{cases} 1, & l \ge 1, \\ 0, & l = 0, \\ -1, & l \le -1, \end{cases} \tag{4}$$

розбиває $\mathbb{R}$ *на півінтервали* $[x_{l-1}, x_l)$, *що мають властивості* (3). *Крім того, для будь-якого* $l \ge 1$ *і* $0 < \gamma < 1$

$$x_l = |x_{-l}| = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{i^\gamma} > (l+1)^{1-\gamma} - 1 \sim l^{1-\gamma} \quad \textit{при} \quad l \to \infty. \tag{5}$$

Доведення. Оскільки для всіх $0 < \gamma < 1$, $u \ge 1$ функція $1/u^\gamma$ є монотонно спадною, то для будь-якого $i \ge 1$

$$\frac{1}{i^\gamma} = \int_i^{i+1} \frac{1}{i^\gamma} du \ge \int_i^{i+1} \frac{1}{u^\gamma} du = \left. \frac{u^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right|_i^{i+1} = \frac{1}{1-\gamma}\left((i+1)^{1-\gamma} - i^{1-\gamma}\right),$$

а отже,

$$x_l = |x_{-l}| = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{i^\gamma} \ge \frac{1}{1-\gamma} \sum_{i=1}^{l} \left((i+1)^{1-\gamma} - i^{1-\gamma}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}\left((l+1)^{1-\gamma} - 1\right) > (l+1)^{1-\gamma} - 1 \sim l^{1-\gamma} \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Лему доведено.

Теорема 5. *Нехай* $1 \le p < q$ *і сепарабельний вимірний випадковий процес* $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ *з простору* $L_p(\Omega)$ *такий, що для будь-яких* $-\infty < a < b < +\infty$, $b - a \le 1$:

i) $\sup\limits_{a \le t < b} \left(\mathrm{E}|X(t)|^p\right)^{1/p} \le \dfrac{1}{(\max\{|a|, |b|\})^\tau}$, *де* $\tau > \dfrac{1}{1-\gamma}\left(1 + \dfrac{1}{p} - \dfrac{\gamma}{q}\right)$, $0 < \gamma < 1$;

ii) $\sup\limits_{\substack{|t-s| \le h \\ t, s \in [a, b)}} \left(\mathrm{E}|X(t) - X(s)|^p\right)^{1/p} \le C_{a,b} h^\alpha$, *де* $h > 0$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$ *та існує* $0 < c < \infty$ *таке, що* $C_{a,b} \le \dfrac{c}{(b-a)^\alpha} \sup\limits_{a \le t < b} \left(\mathrm{E}|X(t)|^p\right)^{1/p}$.

Тоді випадковий процес X *належить простору* $L_q(\mathbb{R})$ *з імовірністю одиниця.*

Доведення. Розглянемо послідовність $\{x_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$, що має вигляд (4). Ця послідовність задає розбиття простору $\mathbb{R}$, що задовольняє умови (3). З леми 3 випливає, що для $l \geq 1$

$$\sup_{x_{l-1}\leq t<x_l}\left(\mathrm{E}|X(t)|^p\right)^{1/p} \leq \frac{1}{\left((l+1)^{1-\gamma}-1\right)^{\tau}} \sim \frac{1}{l^{\tau(1-\gamma)}} =: \Gamma_l^+ \quad \text{при} \quad l\to+\infty$$

та для $l \leq 0$

$$\sup_{x_{l-1}\leq t<x_l}\left(\mathrm{E}|X(t)|^p\right)^{1/p} \leq \frac{1}{\left((2-l)^{1-\gamma}-1\right)^{\tau}} \sim \frac{1}{(1-l)^{\tau(1-\gamma)}} =: \Gamma_l^- \quad \text{при} \quad l\to-\infty,$$

при цьому для всіх $l \geq 1$ $\Gamma_l^+ = \Gamma_{1-l}^-$.

Для процесу X виконуються умови теореми 1 відносно будь-якого інтервалу $[x_{l-1}, x_l)$, $l \in \mathbb{Z}$, оскільки при $1 \leq p < q$ функція $W(x) = |x|^{q/p}$ є опуклою та для функції $|x|^p$ виконується умова M відносно інтервалів $[x_{l-1}, x_l)$, $l \in \mathbb{Z}$, зі сталими $a_V^l = (\Delta x_l)^{1/p}$. Тоді для всіх $l \in \mathbb{Z}$ траєкторії випадкового процесу X належать функціональним просторам $L_q([x_{l-1}, x_l))$ з імовірністю одиниця і

$$\left\| \|X(t)\|_{L_q([x_{l-1},x_l))} \right\|_{L_p(\Omega)} = \left(\mathrm{E}\left(\int_{x_{l-1}}^{x_l}|X(t)|^q\,dt\right)^{p/q}\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{(\Delta x_l)^{1/p}}{3^{1/q-1/p}}\left[\sup_{x_{l-1}\leq t<x_l}\left(\mathrm{E}|X(t)|^p\right)^{1/p}\left(\frac{C_l(\Delta x_l)^{\alpha}\theta^m}{C_l}\right)^{(1/\alpha)(1/q-1/p)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+\theta}{\theta(1-\theta)}\int_0^{C_l(\Delta x_l)^{\alpha}\theta^{m+1}}\left(\frac{u}{C_l}\right)^{(1/q-1/p)/\alpha}du\right] =$$

$$= \frac{1}{3^{1/q-1/p}}\left[\sup_{x_{l-1}\leq t<x_l}\left(\mathrm{E}|X(t)|^p\right)^{1/p}(\Delta x_l)^{1/q}\,\theta^{(m/\alpha)(1/q-1/p)} + \right.$$

$$\left. + (\Delta x_l)^{1/p}\frac{1+\theta}{\theta(1-\theta)}\frac{\left(C_l(\Delta x_l)^{\alpha}\theta^{m+1}\right)^{(1/\alpha)(1/q-1/p)+1}}{\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)+1\right)C_l^{(1/\alpha)(1/q-1/p)}}\right] =$$

$$= \frac{1}{3^{1/q-1/p}}\left[(\Delta x_l)^{1/q}\,\theta^{(m/\alpha)(1/q-1/p)}\sup_{x_{l-1}\leq t<x_l}\left(\mathrm{E}|X(t)|^p\right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + (\Delta x_l)^{1/q}\frac{1+\theta}{1-\theta}\frac{\theta^{((m+1)/\alpha)(1/q-1/p)+m}}{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)+1}C_l(\Delta x_l)^{\alpha}\right] =$$

$$= \frac{(\Delta x_l)^{1/q}}{3^{1/q-1/p}}\left(A_m \sup_{x_{l-1}\le t<x_l}\left(\mathrm{E}|X(t)|^p\right)^{1/p} + B_m C_l(\Delta x_l)^{\alpha}\right) =: B_m^l,$$

де $A_m = \theta^{(m/\alpha)(1/q-1/p)}$, $B_m = \dfrac{1+\theta}{1-\theta}\dfrac{\theta^{((m+1)/\alpha)(1/q-1/p)+m}}{\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}\right)+1}$, $0<\theta<1$ — деяке фіксоване число.

Тоді за теоремою 3.2 [6, с. 180] траєкторії випадкового процесу X належать простору $L_q(\mathbb{R})$, якщо існує послідовність $\{0<\delta_l<1\}_{l\in\mathbb{Z}}$ така, що

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\delta_l < \infty \quad \text{і} \quad \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\frac{B_m^l}{\delta_l}\right|^p < \infty.$$

Виберемо послідовність δ_l, що має вигляд

$$\delta_l = \begin{cases} \dfrac{1}{l^{\varepsilon}}, & l\ge 1, \\ \dfrac{1}{(-l+1)^{\varepsilon}}, & l\le 0, \end{cases} \qquad \varepsilon > 1.$$

Тоді

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta_l = \sum_{l=-\infty}^{0}\frac{1}{(-l+1)^{\varepsilon}} + \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{l^{\varepsilon}} = 2\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{l^{\varepsilon}} < \infty$$

і

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{B_m^l}{\delta_l}\right|^p \le \sum_{l=-\infty}^{0}\left|\frac{(\Delta x_l)^{1/q}\left(A_m\Gamma_{1-l}^{-} + B_m C_l(\Delta x_l)^{\alpha}\right)}{3^{1/q-1/p}\delta_l}\right|^p +$$

$$+ \sum_{l=1}^{+\infty}\left|\frac{(\Delta x_l)^{1/q}\left(A_m\Gamma_l^{+} + B_m C_l(\Delta x_l)^{\alpha}\right)}{3^{1/q-1/p}\delta_l}\right|^p.$$

Оскільки

$$\Delta x_l = \left|x_l - x_{l-1}\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{l^{\gamma}}, & l\ge 1, \\ \dfrac{1}{(-l+1)^{\gamma}}, & l\le 0, \end{cases}$$

то

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{B_m^l}{\delta_l}\right|^p \le 2\sum_{l=1}^{+\infty}\left|\frac{(\Delta x_l)^{1/q}\left(A_m\Gamma_l^{+} + B_m C_l(\Delta x_l)^{\alpha}\right)}{3^{1/q-1/p}\delta_l}\right|^p. \qquad (6)$$

Дослідимо на збіжність ряди

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(\Delta x_l)^{p/q}}{\delta_l^p}\left(\Gamma_l^{+}\right)^p \sim \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{p(\gamma/q+\tau(1-\gamma)-\varepsilon)}}$$

та

$$\sum_{l=1}^{\infty} C_l^p \frac{(\Delta x_l)^{p(\alpha+1/q)}}{\delta_l^p} \le \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c^p}{(\Delta x_l)^{\alpha p}} \sup_{x_{l-1} \le t < x_l} \mathrm{E}|X(t)|^p \frac{(\Delta x_l)^{p(\alpha+1/q)}}{\delta_l^p} =$$

$$= c^p \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\left(\Gamma_l^+\right)^p (\Delta x_l)^{p(\alpha+1/q)}}{(\Delta x_l)^{\alpha p} \delta_l^p} \sim \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{p(\gamma/q+\tau(1-\gamma)-\varepsilon)}}.$$

Ці ряди збігаються при $1 < \varepsilon < (1-\gamma)\tau + \dfrac{\gamma}{q} - \dfrac{1}{p}$. Такі ε будуть існувати, оскільки $(1-\gamma)\tau + \dfrac{\gamma}{q} - \dfrac{1}{p} > (1-\gamma)\dfrac{1}{1-\gamma}\left(1+\dfrac{1}{p}-\dfrac{\gamma}{q}\right) + \dfrac{\gamma}{q} - \dfrac{1}{p} = 1$, а отже, буде збігатися ряд (6) і за теоремою 3.2 [6, с. 180] $X(t)$ належить $L_q(\mathbb{R})$ з імовірністю одиниця.

Теорема 6. *Нехай числа* p *і* q *такі, що* $1 < p \le q$, *випадковий процес* $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ *є сепарабельним, вимірним,* N *разів диференційовним за нормою в* $L_p(\Omega)$ *і для всіх* $a, b \in \mathbb{R}$ *таких, що* $b - a \le 1$, *виконуються умови*:

1) $\forall k = \overline{0, N}$:

$$\sup_{t \in [a,b)} \left\| X^{[k]}(t) \right\|_{L_p(\Omega)} = \sup_{t \in [a,b)} \left(\mathrm{E}\left| X^{[k]}(t) \right|^p \right)^{1/p} \le \frac{1}{(\max\{|a|,|b|\})^{\tau}},$$

де $\tau > \dfrac{1}{1-\gamma}\left(1+\dfrac{1}{p}-\dfrac{\gamma}{q}\right)$ *і* $0 < \gamma < 1$ — *деяке фіксоване число*;

2) $\sup\limits_{\substack{|t-s| \le h \\ t,s \in [a,b)}} \left(\mathrm{E}\left| X^{[N]}(t) - X^{[N]}(s) \right|^p \right)^{1/p} \le C_{a,b} h^{\alpha}$, *де* $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$ *та існує* $0 < c < \infty$ *таке, що* $C_{a,b} \le \dfrac{c}{(b-a)^{\alpha}} \sup\limits_{a \le t < b} \left(\mathrm{E}\left| X^{[N]}(t) \right|^p \right)^{1/p}$.

Тоді $X(t)$ *належить* $W_q^N(\mathbb{R})$ *з імовірністю одиниця.*

Доведення. В даному випадку функція $W(x) = |x|^{q/p}$, $x \in \mathbb{R}$, є опуклою, $|x| \prec |x|^p$ і для $|x|^p$ виконується умова M відносно кожної з множин $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ [3, с. 144]. Крім того, для всіх $p > 1$ $\int_{0+} \dfrac{du}{u^{1/p}} < \infty$.

З леми 2 випливає, що для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$, $b - a \le 1$ і $0 \le k \le N-1$

$$\sup_{\substack{|t-s| \le h \\ t,s \in [a,b)}} \left(\mathrm{E}\left| X^{[k]}(t) - X^{[k]}(s) \right|^p \right)^{1/p} \le 2 \sup_{t \in [a,b)} \left(\mathrm{E}\left| X^{[k+1]}(t) \right|^p \right)^{1/p} h \le$$

$$\le \frac{2}{(\max\{|a|,|b|\})^{\tau}} h \le \frac{2}{b-a} \frac{1}{(\max\{|a|,|b|\})^{\tau}} h.$$

Тоді з теореми 5 випливає належність похідних за нормою $X^{[k]}$, а отже, і відповідних узагальнених похідних процесу X простору $L_q(\mathbb{R})$ з імовірністю одиниця. Звідси випливає, що $X(t)$ належить $W_q^N(\mathbb{R})$ з імовірністю одиниця.

5. Оцінювання швидкості збіжності вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів Орлича. На початку 90-х років XX століття в Західній Європі та Північній Америці почала бурхливо розвиватися нова цікава галузь математики – вейвлет аналіз. В вейвлет аналізі вивчаються умови, за яких функції можуть бути розкладені в ряди по базисах вейвлетів, тобто по ортонормованих системах, що породжуються однією функцією φ з простору $L_2(\mathbb{R})$, та досліджується швидкість збіжності цих рядів у нормах різних просторів. Засновниками цієї теорії були Малла, Мейєр, Добеші та Чуі. Російською мовою перекладено книги Інгрід Добеші [7] та Чарльза Чуі [8]. Багато результатів із вейвлет аналізу застосовуються в суміжних галузях математики — математичній статистиці та теорії випадкових процесів. Зокрема, розклади випадкових процесів по системах вейвлетів використовуються при моделюванні процесів та при збереженні їх траєкторій з метою подальшого відновлення.

Наведемо основні відомості з теорії вейвлетів.

Розглянемо деяку комплекснозначну функцію $\varphi = \{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ з простору $L_2(\mathbb{R})$. Позначимо $\varphi_{0k}(x) = \{\varphi(x-k),\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Накладемо на φ такі умови.

Умова 1 [4]**.** Система $\varphi_{0k}(x)$ є ортонормованою системою, тобто

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{0k}(x)\overline{\varphi_{0j}(x)}\,dx = \delta_{kj},$$

де δ_{kj} — символ Кронекера.

Позначимо через V_0 простір функцій $f \in L_2(\mathbb{R})$ таких, що

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi_{0k}(x), \tag{7}$$

де ряд (7) збігається в нормі простору $L_2(\mathbb{R})$, тобто $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$. Тоді система $\{\varphi_{0k}(x),\ k \in \mathbb{Z}\}$ буде ортонормованим базисом у V_0.

Визначимо простір $V_j = \left\{h(x)\colon h(x) = f(2^j x);\ f \in V_0\right\}$, $j \ge 0$. Система функцій $\left\{\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ є ортонормованим базисом у V_j.

Умова 2 [4]**.** Простори V_j мають властивість: для кожного $j \ge 0$ $V_j \in V_{j+1}$.

Умова 3 [4]**.** Множина $V = \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ є щільною в $L_2(\mathbb{R})$, тобто

$$\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L_2(\mathbb{R}).$$

У книгах [4, 9] наведено необхідні та достатні умови виконання умов 1, 2 та достатні умови, за яких виконується умова 3.

Означення 16 [4]**.** *Якщо для функції* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ *виконуються умови* 1 – 3, *то послідовність* $\{V_j\}_{j\ge 0}$, *що породжується цією функцією, називається багаторівневим аналізом у* $L_2(\mathbb{R})$. *При цьому функцію* φ *називають f-вейвлетом.*

Нехай послідовність $\{V_j\}_{j\ge 0}$ є багаторівневим аналізом у $L_2(\mathbb{R})$. Позначимо $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$, тоді $V_{j+1} = V_j \oplus W_j = V_0 \oplus \oplus_{i=0}^{j} W_i$. Отже, в цьому випадку $L_2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \oplus_{j=0}^{\infty} W_j$.

Для будь-якого f-вейвлета φ існує функція ψ така, що система функцій

$\left\{\psi_{jk} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ є ортонормованим базисом у W_j, а система

$$\begin{aligned}&\varphi_{0k}(x) = \varphi(x-k),\\ &\psi_{jk} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k),\end{aligned} \qquad j \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

— ортонормованим базисом у $L_2(\mathbb{R})$. Тоді кожну функцію з $L_2(\mathbb{R})$ можна зобразити у вигляді

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{jk}\psi_{jk}(x), \tag{8}$$

де ряд (8) збігається в $L_2(\mathbb{R})$. Розклад (8) називається вейвлет розкладом.

Відомо, що f-вейвлет φ допускає зображення $\hat{\varphi}(y) = m_0(y/2)\hat{\varphi}(y/2)$, де $m_0(y)$ — 2π-періодична функція з простору $L_2(0, 2\pi)$, $\hat{\varphi}(y)$ — перетворення Фур'є функції φ. Тоді функцію $\psi = \{\psi(x),\ x \in \mathbb{R}\} \in L_2(\mathbb{R})$ з (8) можна знайти як обернене перетворення Фур'є до функції

$$\psi(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2}+\pi\right)}\exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\}\hat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right). \tag{9}$$

Приклади вейвлет функцій можна знайти в усіх книгах із вейвлет аналізу.

Умова *S*. Нехай φ — f-вейвлет. Для φ виконується умова S, якщо існує монотонна незростаюча функція $\Phi(x)$, $x \geq 0$, така, що

$$\left|\varphi(x)\right| \leq \Phi(|x|) \quad \text{та} \quad \int_{\mathbb{R}} \Phi(|x|)\,dx < \infty.$$

Умова *S*(*N*). Для функції φ виконується умова $S(N)$, де $N \geq 0$ — деяке ціле число, якщо для φ виконується умова S та

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(|x|)|x|^N\,dx < \infty.$$

Наведемо два комплекси умов, які можуть задовольняти f-вейвлети:

K_1) для φ виконується умова $S(N)$ φ належить простору Соболєва $W_q^N(\mathbb{R})$, $N \geq 0$, $q > 1$;

K_2) для φ виконується умова $S(N)$ та одне з чотирьох припущень:

a_1) $\varphi \in W_q^{N-1}(\mathbb{R})$, $N \geq 1$, $q > 1$;

a_2) $\left|m_0(y)\right| = 1 + o\left(|y|^{2(N-1)}\right)$ при $y \to 0$, де $m_0(y)$ — функція, що визначена в (9), $N \geq 1$;

a_3) $\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x)\,dx = 0$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, $N \geq 1$, де ψ — m-вейвлет, що відповідає φ;

a_4) $\hat{\varphi}(y - 2k\pi) = o\left(|y|^{N-1}\right)$ при $y \to 0$, $k \neq 0$, $N \geq 1$.

У книзі [4] наведено приклади систем вейвлетів, для яких виконуються комплекси умов K_1, K_2. Це, зокрема, вейвлети Добеші, симплети.

Для випадкового процесу $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{E}X(t) = 0$, такого, що належить простору $L_2(\mathbb{R})$ з імовірністю одиниця і для будь-якої системи вейвлетів має місце розклад

$$X(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{0k}\,\varphi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_{jk}\,\psi_{jk}(t), \tag{10}$$

де ξ_{0k} та η_{jk} — такі випадкові величини, що

$$\xi_{0k} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\overline{\varphi_{0k}(t)}\,dt, \qquad \eta_{jk} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\overline{\psi_{jk}(t)}\,dt.$$

Ряд (10) збігається в $L_2(\mathbb{R})$ з імовірністю одиниця. Розглянемо наближення випадкового процесу X частинною сумою ряду (10):

$$X_n(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{0k}\,\varphi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_{jk}\,\psi_{jk}(t).$$

Зрозуміло, що $X_n(t)$ збігається до $X(t)$ при $n\to\infty$ в нормі простору $L_2(\mathbb{R})$ з імовірністю одиниця, тобто з імовірністю одиниця

$$\| X(t) - X_n(t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Дослідимо швидкість цієї збіжності у випадку, коли випадковий процес X належить простору $L_p(\Omega)$, $p \ge 2$.

Теорема 7. *Нехай числа* p *і* q *такі, що* $2 \le p \le q$, *випадковий процес* $X = \{X(t),\ t\in\mathbb{R}\}$ *є центрованим, сепарабельним, вимірним,* N *разів диференційовним за нормою в* $L_p(\Omega)$ *і виконуються наступні умови*:

1) $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ b - a \le 1,\ \ \forall\, k = \overline{0, N}$:

$$\sup_{t\in[a,b)} \left\| X^{[k]}(t)\right\|_{L_p(\Omega)} = \sup_{t\in[a,b)} \left(\mathrm{E}\left| X^{[k]}(t)\right|^p\right)^{1/p} \le \frac{1}{(\max\{|a|,|b|\})^{\tau}},$$

де $\tau > \dfrac{1}{1-\gamma}\left(1 + \dfrac{1}{p} - \dfrac{\gamma}{q}\right)$ *і* $0 < \gamma < 1$ — *деяке фіксоване число*;

2) $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ b - a \le 1$,

$$\sup_{\substack{|t-s|\le h\\ t,s\in[a,b)}} \left(\mathrm{E}\left| X^{[N]}(t) - X^{[N]}(s)\right|^p\right)^{1/p} \le C_{a,b}h^{\alpha},$$

де $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$, *та існує* $0 < c < \infty$ *таке, що*

$$C_{a,b} \le \frac{c}{(b-a)^{\alpha}} \sup_{a\le t<b} \left(\mathrm{E}\left| X^{[N]}(t)\right|^p\right)^{1/p}.$$

Тоді:

b_1) *якщо для f-вейвлета* φ *виконується комплекс умов* K_1, *то з імовірністю одиниця* $2^{Nn}\| X_n(t) - X(t)\|_{L_q(\mathbb{R})} \to 0$ *при* $n\to\infty$;

b_2) *якщо для f-вейвлета* φ *виконується комплекс умов* K_2, *то з імовірністю одиниця* $\| X_n(t) - X(t) \|_{L_q(\mathbb{R})} = O\left(\frac{1}{2^{Nn}}\right)$ *при* $n \to \infty$.

Доведення. В цьому випадку функція $W(x) = |x|^{q/p}$, $x \in \mathbb{R}$, є опуклою, $|x| < |x|^p$ і для $|x|^p$ виконується умова M відносно кожної з множин $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Розглянемо функцію $f \in L_q(\mathbb{R})$, $q > 1$, f_n — наближення функції f частинною сумою ряду (8). У книзі [4] доведено такі твердження:

1. Нехай для f-вейвлета φ виконується комплекс умов K_1, тоді якщо $f \in W_q^N(\mathbb{R})$, то $2^{Nn} \| f_n - f \|_{L_q(\mathbb{R})} \to 0$ при $n \to \infty$;

2. Нехай для f-вейвлета φ виконується комплекс умов K_2, тоді якщо $f \in W_q^N(\mathbb{R})$, то $\| f_n - f \|_{L_q(\mathbb{R})} = O\left(\frac{1}{2^{Nn}}\right)$ при $n \to \infty$.

Твердження відповідної теореми також наведено в книзі [9, с. 97].

Оскільки для траєкторій випадкового процесу X виконуються умови теореми 6, а отже, вони належать просторам Соболєва $W_q^N(\mathbb{R})$, то звідси і випливає твердження теореми.

У випадку, коли $p = 2$, відповідні умови накладаються на кореляційну функцію випадкового процесу.

Наслідок. *Нехай* $q \ge 2$, $X = \{ X(t),\ t \in \mathbb{R} \}$, $\mathrm{E}X(t) = 0$, — *сепарабельний, вимірний процес із простору* $L_2(\Omega)$, *для його кореляційної функції* $R(t, s)$ *існують неперервні похідні* $\dfrac{\partial^{k+1}}{\partial t^k \partial s^l} R(t, s)$, $k, l = \overline{1, N}$, $N \ge 1$, *і виконуються умови*:

1) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $b - a \le 1$, $\forall\, k = \overline{0, N}$:

$$\sup_{t \in [a, b)} \frac{\partial^{2k} R(t, t)}{\partial t^{2k}} \le \frac{1}{(\max\{|a|, |b|\})^{2\tau}}, \text{ де } \tau > \frac{1}{1-\gamma}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{q}\right) \text{ і } 0 < \gamma < 1;$$

2) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $b - a \le 1$, $\alpha > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{q}$:

$$\sup_{\substack{|t-s| \le h \\ t, s \in [a, b)}} \left[\frac{\partial^{2N} R(t, t)}{\partial t^{2N}} - 2 \frac{\partial^{2N} R(t, s)}{\partial t^N \partial s^N} + \frac{\partial^{2N} R(s, s)}{\partial s^{2N}} \right] \le C_{a,b} h^{2\alpha}$$

та існує $0 < c < \infty$ *таке, що*

$$C_{a,b} \le \frac{c}{(b-a)^{2\alpha}} \sup_{a \le t < b} \frac{\partial^{2N} R(t, t)}{\partial t^{2N}}.$$

Тоді:

b_1) *якщо для f-вейвлета* φ *виконується комплекс умов* K_1, *то з імовірністю одиниця* $2^{Nn} \| X_n(t) - X(t) \|_{L_q(\mathbb{R})} \to 0$ *при* $n \to \infty$.

b_2) *якщо для f-вейвлета* φ *виконується комплекс умов* K_2, *то з імовірністю одиниця* $\| X_n(t) - X(t) \|_{L_q(\mathbb{R})} = O\left(\frac{1}{2^{Nn}}\right)$ *при* $n \to \infty$.

Доведення. Твердження наслідку випливає з відомих фактів з $L_2(\Omega)$-теорії. А саме, центрований випадковий процес має N неперервних похідних у середньому квадратичному тоді і лише тоді, коли існують неперервні похідні

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial s^l} R(t,s), \qquad k, l = \overline{0, N}.$$

При цьому

$$\mathrm{E}\left| X^{[k]}(t) \right|^2 = \frac{\partial^{2k} R(t,t)}{\partial t^{2k}}, \quad k = \overline{0, N},$$

$$\left(\mathrm{E}\left| X^{[N]}(t) - X^{[N]}(s) \right|^2 \right)^{1/2} = \frac{\partial^{2N} R(t,t)}{\partial t^{2N}} - 2\frac{\partial^{2N} R(t,s)}{\partial t^N \partial s^N} - \frac{\partial^{2N} R(s,s)}{\partial s^{2N}}.$$

Отже, твердження наслідку випливає з теореми 7.

Висновки. В роботі знайдено умови, за яких траєкторії випадкових процесів із просторів Орлича випадкових величин належать з імовірністю одиниця просторам Соболєва – Орлича та класичним просторам Соболєва. За допомогою отриманих результатів оцінено швидкість збіжності вейвлет розкладів траєкторій випадкових процесів у нормі простору $L_q(\mathbb{R})$.

1. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.
2. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric characterization of random variables and random processes. – Providence: Amer. Math. Soc., 2000. – 289 p.
3. *Козаченко Ю. В., Яковенко Т. О.* Умови належності випадкових процесів деяким функціональним просторам Орлича // Вісн. Київ. ун-ту. – 2002. – № 5. – С. 64–74.
4. *Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A.* Wavelets, approximation and statistical applications. – New York: Springer, 1998. – 265 p.
5. *Rao M. M., Pen Z. D.* Theory of Orlicz spaces. – New York etc.: Marsel Dekker, Ink., 1991. – 445 p.
6. *Yakovenko T.* Conditions under which processes belong to Orlicz space in case of noncompact parametric set // Theory Stochast. Processes. – 2004. – **10(26)**, issue 1 – 2. – P. 178–183.
7. *Daubechies I.* Ten lecture on wavelets. – Philadelphia: Soc. Industrial and Appl. Math., 1992. – 324 p. (*Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. – М.; Ижевск: РХД, 2001. – 463 с.)
8. *Chui C. K.* An introduction to wavelets. – New York: Acad. Press, 1992. – 266 p. (*Чуи Ч.* Введение в вейвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412 с.)
9. *Козаченко Ю. В.* Лекції з вейвлет аналізу. – Київ: ТВіМС, 2004. – 147 с.

Одержано 12.04.2005