УДК 517.9

А. П. Креневич (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АСИМПТОТИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ІТО

We investigate the problem of the asymptotic equivalence of stochastic systems of linear ordinary equations and stochastic equations in the sense of mean square and with probability one.

Досліджується питання асимптотичної еквівалентності стохастичних систем лінійних звичайних та стохастичних рівнянь у сенсі середнього квадратичного та з імовірністю одиниця.

1. Вступ. Якісна теорія систем лінійних стохастичних диференціальних рівнянь займає значне місце у загальних питаннях дослідження стохастичних рівнянь. Одним із найбільш важливих серед них є вивчення стійкості розв'язків стохастичних систем у різних імовірнісних сенсах, наприклад стійкість у середньому квадратичному, стійкість з імовірністю одиниця, стійкість за ймовірністю. Даним питанням присвячено низку робіт (див., наприклад, [1, 2]). Досить широко дані питання висвітлено в монографіях [3 – 5].

У даній роботі використано інший підхід до вивчення асимптотичної поведінки розв'язків лінійних стохастичних систем, а саме відшукання системи звичайних диференціальних рівнянь, асимптотична поведінка розв'язків якої є подібною до поведінки розв'язків стохастичної системи. Таким чином, питання стійкості стохастичної системи зводиться до питання стійкості системи звичайних диференціальних рівнянь, що значно спрощує дослідження початкової системи. Стохастичні системи, асимптотична поведінка розв'язків яких є подібною, аналогічно до звичайних диференціальних рівнянь (див. [6]) будемо називати асимптотично еквівалентними. Природно, що при дослідженні стохастичних систем виникають поняття асимптотичної еквівалентності в різних імовірнісних сенсах.

У даній роботі отримано достатні умови асимптотичної еквівалентності стохастичних диференціальних рівнянь Іто та систем звичайних диференціальних рівнянь у сенсі середнього квадратичного та з імовірністю одиниця.

2. Постановка задачі. Будемо розглядати систему звичайних диференціальних рівнянь

$$dx = f(t,x)dt \tag{1}$$

з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, $t \geq t_0 \geq 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, $f(t,x) \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^n)$ — n-вимірна функція.

Поряд із системою (1) на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathbf{F}, \mathrm{P})$ [7] розглядаємо систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$dy = g(t,y)dt + \sigma(t,y)dW_t, \tag{2}$$

де $g(t,x)$, $\sigma(t,y)$ — неперервні за сукупністю аргументів n-вимірні функції; W_t — стандартний скалярний вінерів процес, визначений для $t \geq 0$, на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathbf{F}, \mathrm{P})$; $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — потік σ-алгебр, відносно якого узгоджено процес W_t. Тоді, як відомо (див., наприклад, [3, с. 230]), система стохастичних диференціальних рівнянь (2) має єдиний сильний розв'язок $y(t) \equiv y(t,\omega) \in \mathbf{R}^n$ за початковою умовою $y(t_0) = y_0$.

Означення 1. *Якщо кожному сильному розв'язку* $y(t)$ *системи* (2) *можна поставити у відповідність розв'язок* $x(t)$ *системи* (1) *такий, що*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\big|x(t)-y(t)\big|^2 = 0,$$

то систему (2) *будемо називати асимптотично еквівалентною системі* (1) *у середньому квадратичному.*

Означення 2. *Якщо кожному сильному розв'язку* $y(t)$ *системи* (2) *можна поставити у відповідність розв'язок* $x(t)$ *системи* (1) *такий, що*

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty} \big|x(t)-y(t)\big| = 0\right\} = 1,$$

то систему (2) *називатимемо асимптотично еквівалентною системі* (1) *з імовірністю одиниця.*

У даній роботі вивчаються питання асимптотичної еквівалентності систем лінійних звичайних та стохастичних диференціальних рівнянь.

3. Основні результати. Розглянемо систему звичайних лінійних диференціальних рівнянь

$$dx = Axdt \tag{3}$$

з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, $t \ge t_0 \ge 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, A — детермінована стала матриця.

Поряд із системою (3) розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$dy = \big(A + B(t)\big)ydt + D(t)ydW_t \tag{4}$$

з початковою умовою $y(t_0) = y_0$, де $B(t), D(t)$ — неперервні детерміновані матриці.

Наступна теорема є узагальненням теореми Левінсона (див., наприклад, [6, с. 159]) про асимптотичну еквівалентність систем звичайних диференціальних рівнянь на випадок стохастичних систем диференціальних рівнянь.

Теорема 1. *Нехай розв'язки системи* (3) *обмежені на* $[0,\infty)$. *Тоді якщо*

$$\int_0^\infty \big\|B(t)\big\|dt \le k < \infty, \qquad \int_0^\infty \big\|D(t)\big\|^2 dt \le k < \infty \tag{5}$$

для деякого $k > 0$, *то система* (4) *асимптотично еквівалентна в середньому квадратичному системі* (3).

Доведення. I. Оскільки розв'язки системи (3) обмежені, то характеристичні корені $\lambda(A)$ матриці A задовольняють нерівність $\operatorname{Re}\lambda(A) \le 0$, причому характеристичні корені з нульовими дійсними частинами мають прості елементарні дільники [6, с. 86].

Без втрати загальності будемо вважати, що матриця A має квазідіагональний вигляд

$$A = \operatorname{diag}(A_1, A_2),$$

де A_1 і A_2 — відповідно $(p\times p)$- та $(q\times q)$-матриці $(p+q=n)$ такі, що

$$\operatorname{Re}\lambda(A_1) \le -\alpha < 0, \qquad \operatorname{Re}\lambda(A_2) = 0. \tag{6}$$

Справді, у випадку необхідності цього можна досягти з допомогою неособливого перетворення

$$\xi = Sx,$$

де S — стала невироджена $(n \times n)$-матриця.

Нехай

$$X(t) = \operatorname{diag}\Big(e^{tA_1}, e^{tA_2}\Big)$$

— фундаментальна матриця системи (3), нормована в нулі: $X(0) = E$, і

$$I_1 = \operatorname{diag}\big(E_p, 0\big), \qquad I_2 = \operatorname{diag}\big(0, E_q\big).$$

Тут E_p і E_q — одиничні матриці відповідно порядків p і q, при цьому очевидно, що $I_1 + I_2 = E_n$. Покладемо

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t),$$

де

$$X_1(t) = X(t)I_1 = \operatorname{diag}(e^{tA_1}, 0)$$

і

$$X_2(t) = X(t)I_2 = \operatorname{diag}(0, e^{tA_2}).$$

Звідси матрицю Коші

$$\widetilde{X}(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau) = X(t-\tau)$$

можна подати у вигляді

$$\widetilde{X}(t,\tau) = X_1(t-\tau) + X_2(t-\tau),$$

причому на основі оцінок (6) маємо

$$\|X_1(t)\| = \left\|e^{tA_1}\right\| \le ae^{-\alpha t}, \quad t \ge t_0 \ge 0,$$

і

$$\|X_2(t)\| = \left\|e^{tA_2}\right\| \le b, \quad t \ge t_0 \ge 0,$$

де a, b, α — деякі додатні сталі.

Запишемо розв'язок задачі (4) за допомогою матриці Коші системи детермінованих диференціальних рівнянь (3) [3, с. 33, 34, 263 – 266]:

$$y(t) = X(t-t_0)y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t} X_2(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau, \tag{7}$$

де $t \geq t_0 \geq 0$.

Враховуючи еволюційну властивість матриканта

$$X_2(t-\tau) = X(t-\tau)I_2 = X(t-t_0)X(t_0-\tau)I_2 = X(t-t_0)X_2(t_0-\tau),$$

записуємо співвідношення (7) у вигляді

$$y(t) = X(t-t_0)\left[y(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right] +$$

$$+\int_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau -$$

$$-\int_{t}^{\infty} X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau - \int_{t}^{\infty} X_2(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau. \tag{8}$$

Кожному розв'язку $y(t) \equiv y(t,\omega)$ системи (4), як випадковому процесу, за початковою умовою $y(t_0) = y_0$ з імовірністю одиниця поставимо у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (3) за початковою умовою

$$x(t_0) = y(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau. \tag{9}$$

Оскільки розв'язок $x(t)$ лінійної системи (3) і сильний розв'язок $y(t) \equiv y(t,\omega)$ системи стохастичних диференціальних рівнянь (4) визначаються початковими умовами, то формула (9) визначає однозначну відповідність з точністю до стохастичної еквівалентності (див. [7]) між множиною розв'язків $\{y(t) \equiv y(t,\omega)\}$ системи (4) та множиною розв'язків $\{x(t)\}$ системи (3). Зауважимо, що співвідношення (9) неперервне відносно початкової умови $y(t_0) = y_0$ (див. [5, 7]).

II. Доведемо, що всі розв'язки системи (4) за умови (5) будуть обмеженими в середньому квадратичному. Відомо [3, с. 263 – 266], що

$$y(t) = X(t-t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} X(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau. \tag{10}$$

Тоді з (10), враховуючи властивість стохастичного інтеграла [7, с. 16], оцінюємо математичне сподівання квадрата $|y(t)|$:

$$\mathrm{E}|y(t)|^2 \leq 3\big\|X(t-t_0)\big\|^2 \mathrm{E}|y(t_0)|^2 +$$

$$+3\mathrm{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right|^2 + 3\mathrm{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|^2 \leq$$

$$\leq 3\max(a^2,b^2)\mathrm{E}|y(t_0)|^2+$$

$$+3\mathrm{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\|X(t-\tau)\|}\sqrt{\|X(t-\tau)\|}\sqrt{\|B(\tau)\|}\sqrt{\|B(\tau)\|}|y(\tau)|d\tau\right)^2+$$

$$+3\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{E}\left|X(t-\tau)D(\tau)y(\tau)\right|^2 d\tau \leq$$

$$\leq 3\max(a^2,b^2)\mathrm{E}|y(t_0)|^2+$$

$$+3\int\limits_{t_0}^{t} \|X(t-\tau)\|\|B(\tau)\|\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau \int\limits_{t_0}^{t} \|X(t-\tau)\|\|B(\tau)\|d\tau+$$

$$+3\int\limits_{t_0}^{t} \|X(t-\tau)\|^2\|D(\tau)\|^2 E|y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq 3\max(a^2,b^2)\left(\mathrm{E}|y(t_0)|^2 + \int\limits_{0}^{\infty} \|B(\tau)\|d\tau \int\limits_{t_0}^{t} \|B(\tau)\|\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_0}^{t} \|D(\tau)\|^2\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau\right).$$

З нерівності Гронуолла – Беллмана отримуємо

$$\mathrm{E}|y(t)|^2 \leq 3\max(a^2,b^2)\mathrm{E}|y(t_0)|^2 e^{3\max(a^2,b^2)\int_{t_0}^{t}(k\|B(\tau)\|+\|D(\tau)\|^2)d\tau} \leq$$

$$\leq 3\max(a^2,b^2)\mathrm{E}|y(t_0)|^2 e^{3\max(a^2,b^2)\int_{0}^{\infty}(k\|B(\tau)\|+\|D(\tau)\|^2)d\tau} \leq$$

$$\leq \widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2, \tag{11}$$

де $\widetilde{K} = 3\max(a^2,b^2)e^{3\max(a^2,b^2)\int_0^\infty(k\|B(\tau)\|+\|D(\tau)\|^2)d\tau}$.

З (11) випливає, що інтеграли

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau, \qquad \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau$$

збіжні в сенсі середнього квадратичного.

III. Для відповідних розв'язків $x(t)$ та $y(t)$ оцінимо математичне сподівання норми різниці. Очевидно, що

$$x(t) = X(t-t_0)x(t_0),$$

де $x(t_0)$ визначається формулою (9). Тоді з формули (8) маємо

$$\mathrm{E}|x(t)-y(t)|^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{t}^{\infty} X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau - \int\limits_{t}^{\infty} X_2(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau \right|^2 \le$$

$$\le 4\mathrm{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right|^2 + 4\mathrm{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|^2 +$$

$$+ 4\mathrm{E}\left|\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right|^2 + 4\mathrm{E}\left|\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|^2. \qquad (12)$$

Оцінимо кожен із доданків правої частини нерівності (12), врахувавши оцінку (11):

$$4\mathrm{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right|^2 \le 4\mathrm{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t} \|X_1(t-\tau)\|\|B(\tau)\||y(\tau)|d\tau\right)^2 =$$

$$= 4\mathrm{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\|X_1(t-\tau)\|\|B(\tau)\|}\sqrt{\|X_1(t-\tau)\|\|B(\tau)\|}\,|y(\tau)|d\tau\right)^2 \le$$

$$\le 4\mathrm{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t} \|X_1(t-\tau)\|\|B(\tau)\|d\tau \int\limits_{t_0}^{t} \|X_1(t-\tau)\|\|B(\tau)\|\,|y(\tau)|^2 d\tau\right) \le$$

$$\le 4\widetilde{K}E|y(t_0)|^2 \left(\int\limits_{t_0}^{t} \|X_1(t-\tau)\|\|B(\tau)\|d\tau\right)^2 \le$$

$$\le 4\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2 \left(\int\limits_{t_0}^{t} a e^{-\alpha(t-\tau)}\|B(\tau)\|d\tau\right)^2.$$

Оскільки матриця $B(t)$ абсолютно інтегровна на $t \ge 2t_0$, то легко отримати оцінку

$$\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\|B(\tau)\|d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t/2} e^{-\alpha(t-\tau)}\|B(\tau)\|d\tau + \int\limits_{t/2}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\|B(\tau)\|d\tau \le$$

$$\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int\limits_{t_0}^{t/2} \|B(\tau)\| d\tau + \int\limits_{t/2}^{t} \|B(\tau)\| d\tau \leq$$

$$\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int\limits_{0}^{\infty} \|B(\tau)\| d\tau + \int\limits_{t/2}^{t} \|B(\tau)\| d\tau.$$

Таким чином, останній вираз прямує до нуля при $t \to \infty$, а отже, і перший доданок співвідношення (12).

Враховуючи властивість стохастичного інтеграла Вінера – Іто, отримуємо спочатку оцінку для другого доданка (12):

$$4\mathrm{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|^2 \leq 4\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{E}|X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq 4\int\limits_{t_0}^{t} \|X_1(t-\tau)\|^2 \|D(\tau)\|^2 \mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq 4\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2 \int\limits_{t_0}^{t} a^2 e^{-2\alpha(t-\tau)} \|D(\tau)\|^2 \mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau.$$

Далі, враховуючи інтегровність квадрата норми матриці $D(t)$, аналогічно наведеній вище оцінці першого доданка (12) можна переконатися, що останній вираз прямує до нуля при $t \to \infty$.

Для третього та четвертого доданків співвідношення (12) очевидними є такі оцінки:

$$4\mathrm{E}\left|\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right|^2 \leq 4\mathrm{E}\left(\int\limits_{t}^{\infty} \|X_2(t-\tau)\|\|B(\tau)\||y(\tau)|d\tau\right)^2 \leq$$

$$\leq 4\int\limits_{t}^{\infty} \|X_2(t-\tau)\|\|B(\tau)\|\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau \int\limits_{t}^{\infty} \|X_2(t-\tau)\|\|B(\tau)\| d\tau \leq$$

$$\leq 4\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2 \left(\int\limits_{t}^{\infty} \|X_2(t-\tau)\|\|B(\tau)\| d\tau\right)^2 \leq$$

$$\leq 4\widetilde{K}E|y(t_0)|^2 b^2 \left(\int\limits_{t}^{\infty} \|B(\tau)\| d\tau\right)^2,$$

$$4\mathrm{E}\left|\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|^2 \leq$$

$$\leq 4\mathrm{E}\int\limits_t^\infty \|X_2(t-\tau)\|^2\|D(\tau)\|^2\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq 4\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2 b^2 \int\limits_t^\infty \|D(\tau)\|^2 d\tau.$$

Тоді два останніх доданки в (12) прямують до нуля при $t \to \infty$, як залишки збіжних інтегралів. Таким чином,

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}|x(t)-y(t)|^2 = 0.$$

Теорему 1 доведено.

У наступній теоремі наведено достатні умови асимптотичної еквівалентності з імовірністю одиниця системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь системі лінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Теорема 2. *Нехай розв'язки системи* (3) *обмежені на* $[0,\infty)$. *Тоді якщо для деякої додатної послідовності* ε_N, *що монотонно прямує до нуля і для якої ряд* $\sum_{N=1}^\infty \dfrac{1}{\varepsilon_N^2} e^{-\frac{\alpha N}{2}}$ *є збіжним для деякого* $\alpha > 0$, *виконуються співвідношення*

$$\sum_{N=1}^\infty \frac{\int_{N/2}^\infty \big\|B(t)\big\| dt}{\varepsilon_N} < \infty, \tag{13}$$

$$\sum_{N=1}^\infty \frac{\int_{N/2}^\infty \big\|D(t)\big\|^2 dt}{\varepsilon_N^2} < \infty, \tag{14}$$

то система (4) *асимптотично еквівалентна системі* (3) *з імовірністю одиниця.*

Доведення. Початок доведення даної теореми повністю повторює пункти I, II доведення теореми 1.

III. Подальше доведення базується на оцінках, отриманих з використанням властивостей стохастичних інтегралів.

Оскільки, очевидно,

$$x(t) = X(t-t_0)x(t_0),$$

де $x(t_0)$ визначається формулою (9), то з формули (8) для відповідних розв'язків $x(t)$ та $y(t)$ для деякої додатної $\varepsilon_N > 0$ отримуємо

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\geq N}|x(t)-y(t)| \geq \varepsilon_N\right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{\sup_{t\geq N}\left|\int\limits_{t_0}^t X_1(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^t X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau - \int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right| \geq \varepsilon_N\right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\sup_{t\geq N}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right| \geq \frac{\varepsilon_N}{4}\right\}+$$

$$+\mathrm{P}\left\{\sup_{t\geq N}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right| \geq \frac{\varepsilon_N}{4}\right\}+$$

$$+\mathrm{P}\left\{\sup_{t\geq N}\left|\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right| \geq \frac{\varepsilon_N}{4}\right\}+$$

$$+\mathrm{P}\left\{\sup_{t\geq N}\left|\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right| \geq \frac{\varepsilon_N}{4}\right\}. \qquad (15)$$

Далі оцінимо кожен із доданків останньої нерівності. Використовуючи нерівність Чебишова для додатної випадкової величини [8, с. 84, 85; 9], маємо

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\geq N}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right| \geq \frac{\varepsilon_N}{4}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{4}{\varepsilon_N}\mathrm{E}\sup_{t\geq N}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right| \leq$$

$$\leq \frac{4}{\varepsilon_N}\mathrm{E}\sup_{t\geq N}\int\limits_{t_0}^{t} \|X_1(t-\tau)\|\|B(\tau)\||y(\tau)|d\tau \leq$$

$$\leq \frac{4\sqrt{\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2}}{\varepsilon_N}\sup_{t\geq N}\int\limits_{t_0}^{t} ae^{-\alpha(t-\tau)}\|B(\tau)\|d\tau =$$

$$= \frac{4a\sqrt{\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2}}{\varepsilon_N}\sup_{t\geq N}\left(\int\limits_{t_0}^{t/2} e^{-\alpha(t-\tau)}\|B(\tau)\|d\tau + \int\limits_{t/2}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\|B(\tau)\|d\tau\right) \leq$$

$$\leq \frac{4a\sqrt{\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2}}{\varepsilon_N}\left(e^{-\frac{\alpha N}{2}}\int\limits_{t_0}^{\infty} \|B(\tau)\|d\tau + \int\limits_{N/2}^{\infty} \|B(\tau)\|d\tau\right) =: I_N^{(1)}.$$

Далі, використовуючи нерівність Коші – Буняковського, знаходимо

$$\left(\sum_{N=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha N/2}}{\varepsilon_N}\right)^2 = \left(\sum_{N=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha N/4}e^{-\alpha N/4}}{\varepsilon_N}\right)^2 \leq \sum_{N=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha N/2}}{\varepsilon_N^2}\sum_{N=1}^{\infty}e^{-\alpha N/2}.$$

Отже, на підставі умови (13) $I_N^{(1)}$ є N-м членом відповідного збіжного ряду.

Оцінимо другий доданок нерівності (15). Очевидно, що для довільних додатних цілих $N < N'$

$$\sup_{N\le t\le N'}\left|\int_{t_0}^{t}X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|\le$$

$$\le\sup_{N\le t\le N'}\left|\int_{t_0}^{N}X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|+\sup_{N\le t\le N'}\left|\int_{N}^{t}X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|.$$

Таким чином, маємо

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{N\le t\le N'}\left|\int_{t_0}^{t}X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|\ge\frac{\varepsilon_N}{4}\right\}\le$$

$$\le\mathrm{P}\left\{\sup_{N\le t\le N'}\left|\int_{t_0}^{N}X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|\ge\frac{\varepsilon_N}{8}\right\}+$$

$$+\mathrm{P}\left\{\sup_{N\le t\le N'}\left|\int_{N}^{t}X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|\ge\frac{\varepsilon_N}{8}\right\}. \tag{16}$$

Оцінимо перший доданок правої частини нерівності (16), використовуючи нерівність Чебишова для дисперсії та властивість математичного сподівання від квадрата інтеграла Вінера – Іто [7]:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{N\le t\le N'}\left|\int_{t_0}^{N}X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|\ge\frac{\varepsilon_N}{8}\right\}\le$$

$$\le\frac{64}{\varepsilon_N^2}\sup_{N\le t\le N'}\int_{t_0}^{N}\mathrm{E}|X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)|^2d\tau\le$$

$$\le\frac{64}{\varepsilon_N^2}\sup_{N\le t\le N'}\int_{t_0}^{N}\|X_1(t-\tau)\|^2\|D(\tau)\|^2\mathrm{E}|y(\tau)|^2d\tau\le$$

$$\le\frac{64\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2}{\varepsilon_N^2}e^{-2\alpha N}\int_{t_0}^{N}e^{2\alpha\tau}\|D(\tau)\|^2d\tau\le$$

$$\le\frac{64\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2}{\varepsilon_N^2}\left(e^{-\alpha N}\int_{t_0}^{N/2}\|D(\tau)\|^2d\tau+\int_{N/2}^{N}\|D(\tau)\|^2d\tau\right)\le$$

$$\le\frac{64\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2}{\varepsilon_N^2}\left(e^{-\alpha N}\int_{t_0}^{\infty}\|D(\tau)\|^2d\tau+\int_{N/2}^{\infty}\|D(\tau)\|^2d\tau\right)=:I_N^{(2)}.$$

Отже, на підставі умов теореми 2 легко бачити, що $I_N^{(2)}$ є N-м членом відповідного збіжного ряду. Оцінимо другий доданок правої частини нерівності (16), як це зроблено для першого доданка:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{N\le t\le N'}\left|\int_N^t X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|\ge\frac{\varepsilon_N}{8}\right\}\le$$

$$\le\frac{64}{\varepsilon_N^2}\sup_{N\le t\le N'}\int_N^{N'}\|X_1(t-\tau)\|^2\|D(\tau)\|^2\mathrm{E}|y(\tau)|^2d\tau\le$$

$$\le\frac{64\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2}{\varepsilon_N^2}e^{-2\alpha N}\int_N^{N'}e^{2\alpha\tau}\|D(\tau)\|^2d\tau\le$$

$$\le\frac{64\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2}{\varepsilon_N^2}\int_N^{\infty}\|D(\tau)\|^2d\tau=:I_N^{(3)}.$$

Оскільки $\int_N^\infty\|D(\tau)\|^2d\tau\le\int_{N/2}^\infty\|D(\tau)\|^2d\tau$, то згідно з умовами теореми $I_N^{(3)}$ є N-м членом відповідного збіжного ряду. Спрямовуючи N' до нескінченності, маємо

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{N\le t}\left|\int_{t_0}^t X_1(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|\ge\frac{\varepsilon_N}{4}\right\}\le I_N^{(2)}+I_N^{(3)}.$$

Оцінимо третій доданок у правій частині нерівності (15):

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\ge N}\left|\int_t^\infty X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right|\ge\frac{\varepsilon_N}{4}\right\}\le$$

$$\le\mathrm{P}\left\{\sup_{t\ge N}\int_t^\infty\|X_2(t-\tau)\|\|B(\tau)\||y(\tau)|d\tau\ge\frac{\varepsilon_N}{4}\right\}\le$$

$$\le\mathrm{P}\left\{\sup_{t\ge N}\int_N^\infty\|X_2(t-\tau)\|\|B(\tau)\||y(\tau)|d\tau\ge\frac{\varepsilon_N}{4}\right\}\le$$

$$\le\frac{4}{\varepsilon_N}\mathrm{E}\sup_{t\ge N}\int_N^\infty\|X_2(t-\tau)\|\|B(\tau)\||y(\tau)|d\tau\le$$

$$\le\frac{4b\sqrt{\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2}}{\varepsilon_N}\int_N^\infty\|B(\tau)\|d\tau=:I_N^{(4)}.$$

За умови (13) $I_N^{(4)}$ є N-м членом відповідного збіжного ряду.

Нарешті оцінимо останній доданок правої частини нерівності (15):

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\geq N}\left|\int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|\geq\frac{\varepsilon_N}{4}\right\}\leq$$

$$\leq\frac{16b^2}{\varepsilon_N^2}\int\limits_N^\infty\|D(\tau)\|^2\mathrm{E}|y(\tau)|^2d\tau\leq\frac{16b^2\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2}{\varepsilon_N^2}\int\limits_N^\infty\|D(\tau)\|^2d\tau=:I_N^{(5)}.$$

Отже, маємо

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\geq N}|x(t)-y(t)|\geq\varepsilon_N\right\}\leq\sum_{k=1}^5 I_N^{(k)}=I_N.$$

Легко бачити, що I_N є N-м членом відповідного збіжного ряду. З леми Бореллі – Кантеллі випливає, що існує додатна ціла випадкова величина $M=M(\omega)$ така, що для будь-якого $N\geq M(\omega)$ виконується

$$\sup_{t\geq N}|x(t)-y(t)|<\varepsilon_N \tag{17}$$

з імовірністю одиниця.

Позначимо через $[T]$ цілу частину T. Для кожного ω виберемо $T>M(\omega)$. Тоді для $t\geq T$ із (17) отримуємо

$$\big|x(t)-y(t)\big|\leq\sup_{t\geq T}\big|x(t)-y(t)\big|\leq\sup_{t\geq[T]}\big|x(t)-y(t)\big|\leq\varepsilon_{[T]}.$$

Звідси й випливає твердження теореми.

Наведемо приклад, що демонструє застосування теорем 1 і 2.

***Приклад* 1.** Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}dx_1&=-x_1dt,\\dx_2&=(x_1-x_2)dt.\end{aligned} \tag{18}$$

Легко переконатися, що всі розв'язки даної системи обмежені на додатній півосі. Поряд із системою (18) розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned}dy_1&=\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{(t+1)^3}\right)y_1dt+\frac{1}{(t+1)^2}y_2dW_t,\\dy_2&=\left(y_1+\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{(t+1)^3}\right)y_2\right)dt+\frac{1}{(t+1)^2}y_1dW_t.\end{aligned} \tag{19}$$

Застосуємо теореми 1 та 2 до дослідження асимптотичної поведінки розв'язків системи (19). Очевидно, що

$$A=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\qquad B(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{(t+1)^3}&0\\0&\dfrac{\sqrt{2}}{(t+1)^3}\end{pmatrix},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{(t+1)^2} \\ \dfrac{1}{(t+1)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $\|B(t)\|$ та $\|D(t)\|^2$:

$$\big\|B(t)\big\| = \frac{2}{(t+1)^3}, \qquad \big\|D(t)\big\|^2 = \frac{2}{(t+1)^4}.$$

Тоді

$$\int\limits_0^\infty \|B(t)\| dt = 1, \qquad \int\limits_0^\infty \|D(t)\|^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Отже, з теореми 1 випливає, що система (19) асимптотично еквівалентна системі (18) у середньому квадратичному.

Для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків системи (19) з імовірністю одиниця використаємо теорему 2. Виберемо допоміжну послідовність ε_N вигляду

$$\varepsilon_N = \frac{1}{(N+2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Очевидно, що ряд $\sum_{N=1}^\infty \dfrac{1}{\varepsilon_N^2} e^{-\frac{\alpha N}{2}}$ є збіжним для довільного $\alpha > 0$. Тоді, очевидно, що ряди

$$\sum_{N=1}^\infty \frac{\displaystyle\int_{N/2}^\infty \|B(t)\| dt}{\varepsilon_N} = \sum_{N=1}^\infty \frac{4}{(N+2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\sum_{N=1}^\infty \frac{\displaystyle\int_{N/2}^\infty \|D(t)\|^2 dt}{\varepsilon_N^2} = \sum_{N=1}^\infty \frac{16/3}{(N+2)^2}$$

є збіжними, а отже, з теореми 2 випливає, що система (19) асимптотично еквівалентна системі (18) з імовірністю одиниця.

У попередніх теоремах фігурувала система зі сталими коефіцієнтами. Далі дослідимо випадок системи лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Розглянемо системи рівнянь

$$dx = A(t)xdt, \tag{20}$$

$$dy = (A(t) + B(t))ydt + D(t)ydW_t, \tag{21}$$

де $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$ — неперервні детерміновані матриці.

Теорема 3. *Нехай* $X(t,\tau)$ — *матрицант системи* (20). *Припустимо, що існує функція* $\varphi(t,\tau) \geq 0$ *з такими властивостями*:

1) $\varphi(t,\tau)$ *монотонно спадна по* t *та монотонно зростаюча по* τ;

2) $\varphi(t,t) \leq C\ \forall t \geq 0$;

3) $\varphi(t, t/2)) \to 0$, $t \to \infty$.

Тоді якщо виконуються умови

$$\big\|X(t,\tau)\big\| \le \varphi(t,\tau), \tag{22}$$

$$\int\limits_0^\infty \|B(t)\|dt < \infty, \qquad \int\limits_0^\infty \|D(t)\|^2 dt < \infty, \tag{23}$$

то система (21) *асимптотично еквівалентна в середньому квадратичному системі* (20).

Доведення. Нехай $X(t,\tau)$ — матрицант системи (20). Використовуючи запис розв'язку системи стохастичних диференціальних рівнянь (21) через матрицю Коші системи диференціальних рівнянь (20), отримуємо, що розв'язок $y(t)$ системи (21) задовольняє співвідношення

$$y(t) = X(t,t_0)y(t_0) + \int\limits_{t_0}^t X(t,\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^t X(t,\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau. \tag{24}$$

Оскільки розв'язки $x(t)$, $y(t)$ відповідно систем (20) та (21) повністю визначаються своїми початковими даними, то відповідність між розв'язками встановимо через відповідність між початковими даними. Кожному розв'язку $y(t)$ системи (21) поставимо у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (20) з початковою умовою $x(t_0) = y(t_0)$.

Доведемо, що всі розв'язки системи (21) за умов (22), (23) будуть обмеженими в середньому квадратичному.

Із співвідношення (24) отримуємо нерівність

$$\mathrm{E}|y(t)|^2 \le 3\|X(t,t_0)\|^2\mathrm{E}|y(t_0)|^2 + 3\mathrm{E}\left|\int\limits_{t_0}^t X(t,\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right|^2 +$$

$$+3\mathrm{E}\left|\int\limits_{t_0}^t X(t,\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|^2 \le$$

$$\le 3\varphi^2(t,t_0)\mathrm{E}|y(t_0)|^2 + 3\mathrm{E}\left(\int\limits_{t_0}^t \|X(t,\tau)\|\|B(\tau)\||y(\tau)|d\tau\right)^2 +$$

$$+3\int\limits_{t_0}^t \|X(t,\tau)\|^2\|D(\tau)\|^2\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau \le$$

$$\le 3\varphi^2(t,t_0)\mathrm{E}|y(t_0)|^2 + 3\int\limits_{t_0}^t \|X(t,\tau)\|\|B(\tau)\|d\tau \int\limits_{t_0}^t \|X(t,\tau)\|\|B(\tau)\|\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau +$$

$$+3\int\limits_{t_0}^t \|X(t,\tau)\|^2\|D(\tau)\|^2\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau \le$$

$$\leq 3\varphi^2(0,t_0)\mathrm{E}|y(t_0)|^2 + 3\varphi^2(0,t_0)\int\limits_{t_0}^{t}\|B(\tau)\|d\tau\int\limits_{t_0}^{t}\|B(\tau)\|\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau +$$

$$+3\varphi^2(0,t_0)\int\limits_{t_0}^{t}\|D(\tau)\|^2\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau.$$

Далі, враховуючи умови (22), (23), з нерівності Гронуолла – Беллмана маємо

$$\mathrm{E}|y(t)|^2 \leq 3\varphi^2(0,t_0)\mathrm{E}|y(t_0)|^2 e^{3\varphi^2(0,t_0)\left(\left(\int_0^\infty \|B(\tau)\|d\tau\right)^2 + \int_0^\infty \|D(\tau)\|^2 d\tau\right)} \leq$$

$$\leq \widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2.$$

Для відповідних розв'язків $x(t)$ та $y(t)$ оцінимо математичне сподівання норми різниці. Оскільки, очевидно, що

$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0),$$

де $x(t_0) = y(t_0)$, то з формули (24) знаходимо

$$\mathrm{E}|x(t)-y(t)|^2 = \mathrm{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|^2 \leq$$

$$\leq 2\mathrm{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right|^2 + 2\mathrm{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)D(\tau)y(\tau)dW_\tau\right|^2 \leq$$

$$\leq 2\mathrm{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\|X(t,\tau)\|\|B(\tau)\||y(\tau)|d\tau\right)^2 + 2\int\limits_{t_0}^{t}\|X(t,\tau)\|^2\|D(\tau)\|^2\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau.$$

Оцінимо кожен із двох доданків останньої нерівності. Маємо

$$2\mathrm{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\|X(t,\tau)\|\|B(\tau)\||y(\tau)|d\tau\right)^2 =$$

$$= 2\mathrm{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{\|X(t,\tau)\|\|B(\tau)\|}\sqrt{\|X(t,\tau)\|\|B(\tau)\|}|y(\tau)|d\tau\right)^2 \leq$$

$$\leq 2\int\limits_{t_0}^{t}\|X(t,\tau)\|\|B(\tau)\|d\tau\int\limits_{t_0}^{t}\|X(t,\tau)\|\|B(\tau)\|\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq 2\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2\left(\int\limits_{t_0}^{t}\|X(t,\tau)\|\|B(\tau)\|d\tau\right)^2 \leq$$

$$\leq 2\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2 \left(\int_{t_0}^{t} \varphi(t,\tau)\|B(\tau)\|d\tau \right)^2 =$$

$$= 2\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2 \left(\int_{t_0}^{t/2} \varphi(t,\tau)\|B(\tau)\|d\tau + \int_{t/2}^{t} \varphi(t,\tau)\|B(\tau)\|d\tau \right)^2 \leq$$

$$\leq 2\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2 \left(\int_{t_0}^{t/2} \varphi(t,t/2)\|B(\tau)\|d\tau + \int_{t/2}^{t} \varphi(t,t)\|B(\tau)\|d\tau \right)^2.$$

З умов теореми 3 випливає, що останній вираз прямує до нуля при $t \to \infty$. Далі,

$$2\int_{t_0}^{t} \|X(t,\tau)\|^2\|D(\tau)\|^2\mathrm{E}|y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq 2\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2 \int_{t_0}^{t} \varphi^2(t,\tau)\|D(\tau)\|^2 d\tau \leq$$

$$\leq 2\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2 \left(\int_{t_0}^{t/2} \varphi^2(t,\tau)\|D(\tau)\|^2 d\tau + \int_{t/2}^{t} \varphi^2(t,\tau)\|D(\tau)\|^2 d\tau \right) \leq$$

$$\leq 2\widetilde{K}\mathrm{E}|y(t_0)|^2 \left(\varphi^2(t,t/2) \int_{t_0}^{t/2} \|D(\tau)\|^2 d\tau + C \int_{t/2}^{t} \|D(\tau)\|^2 d\tau \right).$$

На підставі умов теореми 3 отримуємо, що останній вираз прямує до нуля при $t \to \infty$, що й доводить теорему 3.

***Приклад* 2.** Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$d\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} dt. \tag{25}$$

Легко переконатися, що матриця

$$X(t,\tau) = \begin{pmatrix} e^{-t^2+\tau^2} & 0 \\ 0 & e^{-t^2+\tau^2} \end{pmatrix}$$

є матрицантом системи (25), нормованим у точці $t = \tau$.

Далі розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$d\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix} + B(t) \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} dt + D(t) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} dW_t, \tag{26}$$

де матриці $B(t)$ і $D(t)$ такі, як у прикладі 1. Умови теореми 3 для систем (25) та (26) перевіряються очевидним чином. Отже, система (26) асимптотично еквівалентна системі (25) у середньому квадратичному.

1. *Arnold L.* Anticipative problems in the theory of random dynamical system in stochastic analysis / Eds M. Cranston, M. Pinsky // Proc. Symp. Pure Math. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. – **57**. – P. 529 – 541.
2. *Arnold L., Oeljeklaus O., Pardoux E.* Almost sure and moments stability for linear Ito equations Lyapunov exponents // Lect. Notes Math. / Eds L. Arnold, V. Wihstuts. – Berlin: Springer, 1986. – **1186**. – P. 129 – 159.
3. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения функционально-дифференциальных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
5. *Ясинский В. К.* Стохастические дифференциально-функциональные уравнения со всей предысторией. – Киев: ТВіМС, 2003. – 254 с.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
8. *Боровков А. А.* Курс теории вероятности. – М.: Наука, 1972. – 287 с.
9. *Королюк В. С., Ясинський В. К.* Курс теорії ймовірностей, випадкових процесів та математичної статистики. – Чернівці: Золоті литаври, 2005. – 525 с.

Одержано 07.06.2005