УДК 517.968.4+517.988.63

Х. А. Хачатрян (Ин-т математики НАН Армении, Ереван),
А. С. Петросян (Армян. нац. аграр. ун-т, Ереван)

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУОСИ С НЕКОМПАКТНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА – СТИЛЬТЬЕСА *

We study one class of nonlinear integral equations with a noncompact operator of the Hammerstein – Stieltjes-type on the semiaxis. The existence of positive solutions is proved in various function spaces by using the factorization methods and specially chosen successive approximations.

Досліджується клас нелінійних інтегральних рівнянь на півосі з некомпактним оператором типу Гаммерштейна – Стільтьєса. З використанням факторизаційних методів і спеціально вибраних послідовних наближень доведено існування додатних розв'язків у різних функціональних просторах.

1. Введение. Нелинейными интегральными уравнениями вида

$$\varphi(x) = -\int_0^\infty \mathcal{F}_0(t,\varphi(t))d_tF(x-t) + \mathcal{F}_1(x,\varphi(x)), \quad x \geq 0, \tag{1}$$

описываются ряд задач современного математического естествознания. В частности, такие уравнения встречаются в теории марковских процессов, в кинетической теории газов, в эконометрике и т. д. (см. [1 – 3]). Существенной особенностью таких уравнений является тот факт, что соответствующий нелинейный оператор Гаммерштейна – Стильтьеса не является компактным в естественных банаховых пространствах и, следовательно, классические методы нелинейного анализа о нахождении неподвижных точек для операторов либо не пригодны, либо их можно применить при весьма жестких условиях на функции $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ и F. Другим немаловажным затруднением исследования вышеуказанных уравнений является тот факт, что искомое решение $\varphi(x)$ определено на неограниченном множестве $[0, +\infty)$.

В уравнении (1) функция F задана на множестве $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:

a) F непрерывна слева на $(-\infty, +\infty)$,

b) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$,

c) F монотонно возрастает на множестве $(-\infty, +\infty)$,

т. е. функцию F можно рассматривать как функцию распределения некоторой случайной величины ξ. Согласно теореме Лебега функция F допускает представление

$$F = F_A + F_D + F_S, \tag{2}$$

где F_A — абсолютно непрерывная компонента функции F, F_D — ее дискретная компонента, являющаяся функцией скачков с конечной суммой модулей скачков, а F_S — непрерывная функция ограниченной вариации, имеющая почти всюду равную нулю производную. Поскольку

*Выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта SCS 13YR-1A0003.

F — монотонно неубывающая (возрастающая) функция, из теоремы Лебега следует, что ее компоненты F_A, F_D и F_S также неубывающие (возрастающие).

Интеграл в правой части (1) понимается в смысле Лебега – Стильтьеса.

$\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ — определенные на множестве $(0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ измеримые функции, удовлетворяющие условию критичности (см. [4])

$$\mathcal{F}_0(t, 0) \equiv 0, \qquad \mathcal{F}_1(x, 0) \equiv 0, \quad t, x \in (0, +\infty) \tag{3}$$

(т. е. тождественно нулевая функция удовлетворяет уравнению (1)).

В случае, когда $F = F_A$, $\mathcal{F}_0(t, z) = z$, $\mathcal{F}_1(x, z) = g(x) \in L_1(0, +\infty)$, уравнение (1) превращается в интегральное уравнение Винера – Хопфа второго рода

$$\varphi(x) = g(x) + \int\limits_0^\infty K(x - t)\varphi(t)dt, \quad x \geq 0, \tag{4}$$

где $K(x) = F_A'(x)$. Изучению уравнения (4) посвящено большое количество работ (см., например, [5 – 9] и библиографию в них). Благодаря своей специфике, для уравнений вида (4) разработаны математические теории, сочетающие тонкие аналитические построения и эффективные приближенные методы. Отметим также, что уравнение (4) применяется в различных областях математической физики (см., например, [10 – 12]).

В частном случае, когда $\mathcal{F}_1 \equiv 0$, $\mathcal{F}_0(t, z) = z$, уравнение (1) достаточно подробно было исследовано в работе [13] в связи с его важным применением в известной задаче теории вероятностей: для заданной случайной величины ξ найти независимо распределенную случайную величину ζ такую, чтобы имело место соотношение

$$\zeta \backsim (\xi + \zeta)_+ = \begin{cases} \xi + \zeta & \text{при} \quad \xi + \zeta \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad \xi + \zeta < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Эквивалентность этих случайных величин понимается в смысле совпадения их функций распределения. Соотношение (5) сводится к следующему частному случаю уравнения (1):

$$\varphi(x) = -\int\limits_0^\infty \varphi(t) d_t F(x - t), \quad x \geq 0,$$

где F играет роль функции распределения случайной величины ξ, а φ — искомая функция распределения ζ.

В случае, когда $\mathcal{F}_1 \equiv 0$, $\mathcal{F}_0(t, z) = G(z)$, G — непрерывная функция на некотором отрезке $[0, \eta]$, причем $G(z) \geq z$, $z \in [0, \eta]$, $G(\eta) = \eta$, $G \uparrow$ на $[0, \eta]$, уравнение (1) исследовалось в работе [14]. При этом было доказано существование положительного монотонно неубывающего и ограниченного решения $\varphi(x)$. Более того, было установлено предельное соотношение $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \eta$.

В недавней работе одного из авторов (см. [15]) уравнение (1) изучалось в частном случае, когда $\mathcal{F}_1 \equiv 0$, $\mathcal{F}_0(t, z) = z - \omega(t, z)$, $F = F_A$, где ω — монотонно убывающая по z (начиная с некоторого числа $\delta > 0$) функция, удовлетворяющая следующему условию Красносельского – Ганкеля: существует измеримая функция

$$\overset{\circ}{\omega} : \overset{\circ}{\omega} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_0(\mathbb{R}^+), \qquad \overset{\circ}{\omega} \downarrow \quad \text{по} \quad z \quad \text{на} \quad [\delta, +\infty), \qquad m_1(\overset{\circ}{\omega}) \equiv \int\limits_0^\infty x\, \overset{\circ}{\omega}(x)dx < +\infty,$$

такая, что

$$0 \leq \omega(t, z) \leq \overset{\circ}{\omega}(t + z), \quad (t, z) \in \mathbb{R}^+ \times [\delta, +\infty).$$

В статье [15] был предложен новый подход, который позволяет построить однопараметрическое семейство положительных и ограниченных решений, а также вычислить предел каждого решения из этого семейства в бесконечности.

Настоящая работа посвящена исследованию уравнения (1) и его некоторым частным случаям, когда функция F непрерывна и имеет сингулярную компоненту: $F \equiv F_C = F_A + F_S$. В последнем случае, когда $\mathcal{F}_1 \equiv 0$, при некоторых условиях на функцию $\mathcal{F}_0(t, z)$ строится однопараметрическое семейство положительных и ограниченных решений для уравнения (1). Что касается общего случая (2), то здесь при существенно иных условиях относительно $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ доказывается существование положительных и интегрируемых решений. В завершение работы приведено несколько примеров функций $\mathcal{F}_j(t, z)$, $j = 0, 1$.

2. Обозначения и вспомогательные факты. Пусть E — одно из следующих банаховых пространств: $C[0, +\infty)$, $C_l[0, +\infty)$, $V_c[0, +\infty)$, где $C_l[0, +\infty)$ — банахово пространство непрерывных на $[0, +\infty)$ функций, имеющих конечный предел в ∞, с нормой $\|f\| = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$, а $V_c[0, +\infty)$ — банахово пространство непрерывных функций ограниченной вариации на $[0, +\infty)$ с нормой

$$\|f\| = |f(a)| + \bigvee_a^b f \tag{6}$$

(из сходимости по норме (6) следует равномерная сходимость).

Рассмотрим интегральный оператор

$$(\hat{F}f)(x) = -\int\limits_0^\infty f(t) d_t F(x - t), \quad x \geq 0,$$

где F удовлетворяет условиям a) – c) (см. введение), а $f \in E$.

Как известно, оператор $\hat{F}$ действует в каждом из банаховых пространств E, причем в случае $F \equiv F_C = F_A + F_S$ оператор $I - \hat{F}$ допускает следующую факторизацию (см. [13]):

$$I - \hat{F} = (I - \hat{U}^-)(I - \hat{U}^+), \tag{7}$$

где I — единичный оператор, $\hat{U}^\pm$ — вольтерровы операторы,

$$(\hat{U}^- f)(x) = \int\limits_x^\infty f(t) d_t u_-(t - x), \qquad (\hat{U}^+ f)(x) = -\int\limits_0^x f(t) d_t u_+(x - t),$$

f принадлежит E,

$$u_\pm(x) = w_\pm(0) - w_\pm(x), \tag{8}$$

$w_\pm \in V_c[0,+\infty)$, $w_\pm \downarrow$ по x, $\lim\limits_{x\to+\infty} w_\pm(x) = 0$, причем

$$(1 - w_-(0))(1 - w_+(0)) = 0.$$

Обозначим через

$$m(F) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) \tag{9}$$

первый момент функции F (т. е. математическое ожидание случайной величины ξ). В дальнейшем, если не будет оговорено противное, будем считать, что интеграл (9) абсолютно сходится в смысле Лебега – Стильтьеса и

$$m(F) < 0. \tag{10}$$

При выполнении условия (10) из результатов работы [13] следует, что

$$w_+(0) < 1, \qquad w_-(0) = 1. \tag{11}$$

В [13] с использованием условий $a) - c)$, (10) и факторизации (7) доказано, что при $F \equiv F_C = F_A + F_S$ уравнение

$$S(x) = -\int\limits_0^\infty S(t) d_t F(x-t), \quad x \geq 0, \tag{12}$$

с условием

$$S(0) = 1$$

имеет положительное монотонно неубывающее и ограниченное решение, причем

$$1 = S(0) \leq S(x) \leq (1 - w_+(0))^{-1}, \quad x \geq 0, \tag{13}$$

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = (1 - w_+(0))^{-1}, \qquad \frac{1}{1 - w_+(0)} - S \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{14}$$

Рассмотрим теперь соответствующее неоднородное уравнение

$$\rho(x) = g(x) - \int\limits_0^\infty \rho(t) d_t F(x-t), \quad x \geq 0, \tag{15}$$

относительно искомой измеримой функции $\rho(x)$, где $g(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$ и $g \in L_1(\mathbb{R}^+)$. С использованием факторизации (7) решение уравнения (15) сводится к последовательному решению следующих связанных уравнений:

$$(I - U^-)Q = g, \tag{16}$$

$$(I - U^+)\rho = Q. \tag{17}$$

Запишем уравнение (16) в раскрытом виде

$$Q(x) = g(x) + \int_x^\infty Q(t)du_-(t-x), \quad x \geq 0. \tag{18}$$

В работе [14] доказано, что уравнение (18) имеет неотрицательное локально интегрируемое решение с асимптотикой

$$\int_0^x Q(t)dt = o(x), \quad x \to +\infty,$$

являющееся пределом следующих последовательных приближений:

$$Q^{(n+1)}(x) = g(x) + \int_x^\infty Q^{(n)}(t)du_-(t-x), \qquad Q^{(0)}(x) = g(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \geq 0. \tag{19}$$

В этой же работе установлено следующее неравенство для решения Q : при любом $r > 0$ имеет место неравенство

$$\int_r^{r+1} Q(\tau)d\tau \leq \left(\int_1^\infty du_-(\tau)\right)^{-1} \int_r^\infty g(\tau)d\tau. \tag{20}$$

Ниже при дополнительных условиях на функцию g мы установим новые свойства функции Q, а именно, докажем следующую лемму, которая будет играть важную роль в дальнейших рассуждениях.

Лемма (основная). *Пусть функция g имеет следующие свойства:*

$$0 \leq g \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad g(x) \downarrow \quad \textit{по} \quad x \quad \textit{на} \quad \mathbb{R}^+ \quad \textit{и} \quad m_1(g) \equiv \int_0^\infty xg(x)dx < +\infty,$$

а u_- задается согласно (8) *и* (11)*, где $L_\infty(\mathbb{R}^+)$ — пространство почти всюду ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$. Тогда решение $Q(x)$ уравнения* (18) *имеет следующие свойства:*

1) $Q(x) \downarrow$ *по x на $\mathbb{R}^+$,*

2) $Q \in L^0_\infty(\mathbb{R}^+) \cap L_1(\mathbb{R}^+)$, *где $L^0_\infty(\mathbb{R}^+)$ — пространство почти всюду ограниченных на $\mathbb{R}^+$ функций, имеющих нулевой предел на бесконечности.*

Доказательство. Сначала убедимся, что $Q^{(n)}(\tau) \downarrow$ по τ на $\mathbb{R}^+$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В случае $n = 0$ это очевидно, ибо $g(x) \downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+$. Пусть $Q^{(n)}(\tau) \downarrow$ по τ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, записывая итерации (19) в виде

$$Q^{(n+1)}(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty Q^{(n)}(\tau+t)du_-(t),$$
$$Q^{(0)}(\tau) = g(\tau), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \tau \geq 0, \tag{21}$$

и учитывая монотонность функции g, из (21) получаем, что $Q^{(n+1)}(\tau) \downarrow$ по τ на $\mathbb{R}^+$. Следовательно предельная функция $Q(\tau) = \lim_{n\to\infty} Q^{(n)}(\tau)$ также монотонно убывает. Из (20) с учетом монотонности Q следует, что

$$0 \le Q(r+1) \le \left(\int\limits_1^\infty du_-(\tau)\right)^{-1} \int\limits_r^\infty g(t)dt \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что Q ограничена на множестве $[1,+\infty)$ и $\lim_{\tau\to+\infty} Q(\tau) = 0$.

Теперь докажем, что Q принадлежит $L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$. Из (18) имеем

$$Q(x) = g(x) + \int\limits_x^1 Q(t)d_t u_-(t-x) + \int\limits_1^\infty Q(t)d_t u_-(t-x) \le$$

$$\le \sup_{x\in\mathbb{R}^+} g(x) + Q(x)\int\limits_x^1 d_t u_-(t-x) + \sup_{t\ge1} Q(t)\int\limits_1^\infty du_-(t-x) \le$$

$$\le \sup_{x\in\mathbb{R}^+} g(x) + Q(x)u_-(1-x) + \sup_{t\ge1} Q(t) \le$$

$$\le \sup_{x\in\mathbb{R}^+} g(x) + \sup_{t\ge1} Q(t) + Q(x)u_-(1) \quad \text{при} \quad x\in[0,1]. \tag{22}$$

Заметим, что $u_-(1) < 1$, ибо $u_-(0) = 0$, $u_-(+\infty) = 1$, и $u_-(x)$ — строго возрастающая функция из $V_c[0,+\infty)$ (см. [13, 14]). Следовательно, из (22) получаем

$$Q(x) \le C(1-u_-(1))^{-1},$$

где

$$C \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^+} g(x) + \sup_{t\ge1} Q(t).$$

Таким образом, мы получили, что Q принадлежит $L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$. Для завершения доказательства нам осталось убедиться, что Q принадлежит $L_1(\mathbb{R}^+)$.

Проинтегрируем обе части (20) по r в пределах от нуля до некоторого числа $\delta > 0$. В результате получим

$$\int\limits_0^\delta \int\limits_r^{r+1} Q(\tau)d\tau dr \le \left(\int\limits_1^\infty du_-(\tau)\right)^{-1} \int\limits_0^\delta \int\limits_r^\infty g(\tau)d\tau dr =$$

$$= \left(\int\limits_1^\infty du_-(\tau)\right)^{-1} \left(\int\limits_0^\delta \int\limits_r^\delta g(\tau)d\tau dr + \int\limits_0^\delta \int\limits_\delta^\infty g(\tau)d\tau dr\right).$$

Изменяя порядок интегрирования в последних двух слагаемых с учетом теоремы Фубини, находим

$$\int\limits_0^\delta \int\limits_r^{r+1} Q(\tau)d\tau dr \le \left(\int\limits_1^\infty du_-(\tau)\right)^{-1} \left(\int\limits_0^\delta \tau g(\tau)d\tau + \delta\int\limits_\delta^\infty g(\tau)d\tau\right) \le$$

$$\leq \left(\int_1^\infty du_-(\tau)\right)^{-1} \int_0^\infty \tau g(\tau)d\tau \leq \left(\int_1^\infty du_-(\tau)\right)^{-1} m_1(g) < +\infty.$$

С учетом монотонности Q из полученного неравенства следует, что

$$\int_0^\delta Q(r+1)dr \leq \left(\int_1^\infty du_-(\tau)\right)^{-1} m_1(g) < +\infty$$

или

$$\int_1^{\delta+1} Q(z)dz \leq \left(\int_1^\infty du_-(\tau)\right)^{-1} m_1(g),$$

откуда, устремляя δ к $+\infty$, получаем

$$\int_1^\infty Q(z)dz \leq \left(\int_1^\infty du_-(\tau)\right)^{-1} m_1(g). \tag{23}$$

Но, с другой стороны, подставляя в (20) $r = 0$, имеем

$$\int_0^1 Q(z)dz \leq \left(\int_1^\infty du_-(\tau)\right)^{-1} \int_0^\infty g(\tau)d\tau. \tag{24}$$

Складывая (23) и (24), приходим к неравенству

$$\int_0^\infty Q(z)dz \leq \left(\int_1^\infty du_-(\tau)\right)^{-1} \int_0^\infty (\tau+1)g(\tau)d\tau.$$

Таким образом, лемма полностью доказана.

Перейдем теперь к решению уравнения (17):

$$\rho(x) = Q(x) - \int_0^x \rho(t)d_t u_+(x-t), \quad x \geq 0. \tag{25}$$

Рассмотрим итерации

$$\rho_{n+1}(x) = Q(x) - \int_0^x \rho_n(t)d_t u_+(x-t),$$

$$\rho_0 \equiv 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \quad x \geq 0.$$

С использованием того факта, что $w_+(0) < 1$, в силу представления (8) индукцией по n нетрудно убедиться в достоверности следующих фактов:

а) $\rho_n \uparrow$ по n,

b) $\rho_n \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

c) $\rho_n(\tau) \leq (1 - w_+(0))^{-1} \sup_{\tau \geq 0} Q(\tau)$, $\tau \geq 0$,

d) $\displaystyle\int_0^\infty \rho_n(\tau)d\tau \leq (1 - w_+(0))^{-1} \int_0^\infty Q(\tau)d\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Следовательно, последовательность функций $\{\rho_n(\tau)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \to +\infty$: $\lim_{n\to\infty} \rho_n(\tau) = \rho(\tau)$, причем предельная функция по теореме Б. Леви (см. [16]) удовлетворяет уравнению (25) и неравенствам

$$\rho(\tau) \geq Q(\tau), \quad \tau \geq 0,$$
$$\rho(\tau) \leq (1 - w_+(0))^{-1} \sup_{\tau \geq 0} Q(\tau) \equiv C_0, \tag{26}$$

$$\int_0^\infty \rho(\tau)d\tau \leq (1 - w_+(0))^{-1} \int_0^\infty Q(\tau)d\tau \leq$$

$$\leq (1 - w_+(0))^{-1} \left(\int_1^\infty du_-(\tau) \right)^{-1} \int_0^\infty (x + 1)g(x)dx. \tag{27}$$

Поскольку $g(x) \downarrow 0$ при $x \to +\infty$ и $w_+(0) < 1$, из леммы 3.3 работы [13] непосредственно следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} \rho(x) = 0. \tag{28}$$

Соотношения (26) – (28) понадобятся нам в дальнейших рассуждениях.

3. Разрешимость уравнения (1) с функцией распределения *F*, имеющей сингулярную и дискретную компоненты. В настоящем пункте будем рассматривать уравнение (1) в случае, когда F допускает представление (2).

Пусть определенная на множестве $\mathbb{R}$ измеримая функция $G(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) существует положительное число $\eta > 0$ такое, что $G \in C[0, \eta]$, $G \uparrow [0, \eta]$,

2) $G(0) = 0$, $G(\eta) = \eta$, причем число $\eta > 0$ является первым положительным корнем уравнения $G(x) = x$,

3) функция $G(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0, \eta]$ с некоторой постоянной $L > 0$, т. е. существует число $L > 0$ такое, что

$$|G(x_1) - G(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \qquad x_1, x_2 \in [0, \eta].$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция распределения* F *удовлетворяет условиям* a) – c) *и* $1 - F \in L_1(\mathbb{R}^+)$, *а также существуют числа* $\eta_0 \in (0, \eta)$ *и* $\alpha \in (0, \min(1, 1/L))$ *такие, что*:

$$1)\ \ \mathcal{F}_1(x, \mu_{\eta_0}(x)) \geq \mu_{\eta_0}(x), \qquad \mathcal{F}_1(x, \eta) \leq \mu_\eta(x), \tag{29}$$

где

$$\mu_\delta(x) \equiv \delta(1 - F(x)), \quad x \in \mathbb{R}^+; \tag{30}$$

2) *функции* $\mathcal{F}_0(x,z)$ *и* $\mathcal{F}_1(x,z)$ *при каждом фиксированном* $x\in\mathbb{R}^+$ *монотонно возрастают по аргументу* z *на отрезке* $[0,\eta]$;

3) $0\le\mathcal{F}_0(x,z)\le\alpha G(z),\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad z\in[0,\eta];$ (31)

4) $\mathcal{F}_0$ *и* $\mathcal{F}_1$ *на множестве* $\mathbb{R}^+\times[0,\eta]$ *удовлетворяют условию Каратеодори по аргументу* z, *т. е. при каждом фиксированном* $z\in[0,\eta]$ *функции* $\{\mathcal{F}_j(x,z)\}_{j=0,1}$ *измеримы по* $x\in\mathbb{R}^+$ *и почти при всех* $x\in\mathbb{R}^+$ *непрерывны по* z *на отрезке* $[0,\eta]$.

Тогда уравнение (1) *имеет ненулевое неотрицательное решение в пространстве* $L_1(\mathbb{R}^+)\cap\cap L^0_\infty(\mathbb{R}^+)$, *где* $L^0_\infty(\mathbb{R}^+)=\left\{f\in L_\infty(\mathbb{R}^+):\ \lim_{x\to\infty}f(x)=0\right\}$.

Доказательство. Наряду с уравнением (1) рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\tilde\varphi(x)=-\int\limits_0^\infty G_\alpha(\tilde\varphi(t))d_tF(x-t),\quad x\ge0, \tag{32}$$

относительно искомой измеримой и вещественной функции $\tilde\varphi(x)$, где

$$G_\alpha(z)=\eta-\alpha G(\eta-z). \tag{33}$$

Введем следующие итерации:

$$\tilde\varphi_{n+1}(x)=-\int\limits_0^\infty G_\alpha(\tilde\varphi_n(t))d_tF(x-t),$$

$$\tilde\varphi_0(x)\equiv0,\qquad n=0,1,2,\ldots,\quad x\ge0.$$

С использованием свойств функции G и с учетом условий a) – c) индукцией по n нетрудно убедиться в справедливости следующих фактов:

j$_1$) $\tilde\varphi_n(x)\uparrow$ по n,

j$_2$) $\tilde\varphi_n(x)\not\equiv0,\ n=1,2,3,\ldots,$

j$_3$) $\tilde\varphi_n(x)\uparrow$ по $x,\ n=0,1,2,\ldots,$

j$_4$) $\tilde\varphi_n(x)\le\eta,\ n=0,1,2,\ldots,\ x\in\mathbb{R}^+$.

Следовательно, последовательность функций $\{\tilde\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n\to\infty$: $\tilde\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\tilde\varphi_n(x)$, причем предельная функция по теореме Б. Леви удовлетворяет уравнению (32), является монотонно возрастающей и при всех $x\in\mathbb{R}^+$ удовлетворяет неравенствам

$$\eta(1-\alpha)\bigvee_{-\infty}^{x}F\le\tilde\varphi(x)\le\eta.$$

Ниже убедимся, что

$$\eta-\tilde\varphi\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap L^0_\infty(\mathbb{R}^+).$$

С этой целью рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\tilde\rho(x)=\eta(1-F(x))-\int\limits_0^\infty(\eta-G_\alpha(\eta-\tilde\rho(t)))d_tF(x-t),\quad x\ge0, \tag{34}$$

относительно искомой функции $\tilde{\rho}(x)$ и следующие последовательные приближения для него:

$$\rho_{n+1}(x) = \eta(1 - F(x)) - \int\limits_0^\infty (\eta - G_\alpha(\eta - \tilde{\rho}_n(t)))d_t F(x - t),$$
$$\tilde{\rho}_0(x) = \eta(1 - F(x)), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \geq 0. \tag{35}$$

Индукцией можно убедиться, что:

i$_1$) $\tilde{\rho}_n(x) \uparrow$ по n,

i$_2$) $\tilde{\rho}_n(x) \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

i$_3$) $\displaystyle\int_0^\infty \rho_n(x)dx \leq \eta(1 - \alpha L)^{-1}\|1 - F\|_{L_1(\mathbb{R}^+)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

i$_4$) $\tilde{\rho}_n(x) \leq \eta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x \geq 0$.

Докажем, например, свойство i$_3$). Остальные свойства последовательности $\{\tilde{\rho}_n(\tau)\}_{n=0}^\infty$ доказываются легче. В случае $n = 0$ свойство i$_3$) непосредственно следует из (35) с учетом того, что $\alpha \in (0, \min(1, 1/L))$. Пусть i$_3$) выполняется при некотором натуральном n. Тогда из (35) с учетом условий, накладываемых на F и G, имеем

$$\int\limits_0^\infty \tilde{\rho}_{n+1}(x)dx = \eta\int\limits_0^\infty (1 - F(x))dx - \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (\eta - G_\alpha(\eta - \tilde{\rho}_n(t)))d_t F(x - t)dx \leq$$

$$\leq \eta\|1 - F\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} - \alpha L\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \tilde{\rho}_n(t)d_t F(x - t)dx =$$

$$= \eta\|1 - F\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} + \alpha L\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^x \tilde{\rho}_n(x - t)d_t F(t)dx =$$

$$= \eta\|1 - F\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} + \alpha L\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^0 \tilde{\rho}_n(x - t)d_t F(t)dx +$$

$$+\alpha L\int\limits_0^\infty\int\limits_0^x \tilde{\rho}_n(x - t)d_t F(t)dx =$$

$$= \eta\|1 - F\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} + \alpha L\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_0^\infty \tilde{\rho}_n(x - t)dx d_t F(t) +$$

$$+\alpha L\int\limits_0^\infty\int\limits_t^{+\infty} \tilde{\rho}_n(x - t)dx d_t F(t) =$$

$$= \eta\|1-F\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} + \alpha L \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{-t}^{+\infty} \tilde{\rho}_n(y)dyd_tF(t) + \alpha L \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{\rho}_n(y)dyd_tF(t) \leq$$

$$\leq \eta\|1-F\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} + \alpha L \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{\rho}_n(y)dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d_tF(t) \leq$$

$$\leq \eta\|1-F\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} \left(1 + \frac{\alpha L}{1-\alpha L}\right) = \eta(1-\alpha L)^{-1}\|1-F\|_{L_1(\mathbb{R}^+)}.$$

Следовательно, последовательность функций $\{\tilde{\rho}_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел при $n \to \to \infty$: $\tilde{\rho}(\tau) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\rho}_n(\tau)$, причем этот предел по теореме Лебега удовлетворяет уравнению (34) и соотношениям

$$\eta(1-F(x)) \leq \tilde{\rho}(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \tilde{\rho}(x)dx \leq \eta(1-\alpha L)^{-1}\|1-F\|_{L_1(\mathbb{R}^+)}.$$

С использованием условий, накладываемых на функцию G, и того, что $\alpha \in (0, \min(1, 1/L))$, нетрудно убедиться в единственности решения уравнения (34) в следующем классе измеримых функций:

$$\Omega_\eta \equiv \{\varphi\colon 0 \leq \varphi(x) \leq \eta,\, x \in \mathbb{R}^+\}.$$

С другой стороны, непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$\tilde{\rho}^*(x) \equiv \eta - \tilde{\varphi}(x) \in \Omega_\eta$$

удовлетворяет уравнению (34). Тогда из изложенного следует, что

$$\tilde{\rho}^*(x) \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

Теперь докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{\rho}^*(x) = 0.$$

Поскольку $0 \leq \tilde{\varphi}(x) \leq \eta,\ x \in \mathbb{R}^+$ и $\tilde{\varphi}(x) \uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{\varphi}(x) = c_0 \leq \eta.$$

Ниже убедимся, что $c_0 = \eta$. С этой целью сначала докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-\int\limits_{0}^{\infty} G_\alpha(\tilde{\varphi}(t))d_tF(x-t) \right) = G_\alpha(c_0). \tag{36}$$

Имеем

$$\left| G_\alpha(c_0) + \int_0^\infty G_\alpha(\tilde{\varphi}(t)) d_t F(x-t) \right| \le$$

$$\le G_\alpha(c_0)(1 - F(x)) + \int_0^\infty |G_\alpha(c_0) - G_\alpha(\tilde{\varphi}(t))||d_t F(x-t)| = I_1(x) + I_2(x).$$

Очевидно, что $I_1(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Докажем, что $I_2(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Учитывая формулу (33), имеем

$$I_2(x) \le \alpha L \int_0^\infty |c_0 - \tilde{\varphi}(t)||d_t F(x-t)| =$$

$$= \alpha L \left(\int_0^x |c_0 - \tilde{\varphi}(t)||d_t F(x-t)| + \int_x^\infty |c_0 - \tilde{\varphi}(t)||d_t F(x-t)| \right) =$$

$$= \alpha L (J_1(x) + J_2(x)).$$

Поскольку $\tilde{\varphi}(t) \to c_0$ при $t \to +\infty$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $t > \delta$, то

$$|\tilde{\varphi}(t) - c_0| < \varepsilon.$$

Пусть $x > 2\delta$, тогда для второго интеграла $J_2(x)$ получаем

$$J_2(x) \le \varepsilon \int_x^\infty |d_t F(x-t)| \le \varepsilon.$$

Далее, преобразуя первый интеграл для $J_1(x)$, имеем следующую оценку:

$$J_1(x) = \int_0^{x/2} |c_0 - \tilde{\varphi}(t)||d_t F(x-t)| + \int_{x/2}^x |c_0 - \tilde{\varphi}(t)||d_t F(x-t)| \le$$

$$\le 2c_0 \int_{x/2}^x |d_t F(\tau)| + \varepsilon \int_{x/2}^x |d_t F(x-t)| \le 2c_0 \int_{x/2}^x |d_t F(\tau)| + \varepsilon.$$

Поскольку $\int_{x/2}^x |d_t F(t)| \to 0$ при $x \to +\infty$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что при $x > \delta_1$

$$\int_{x/2}^x |d_t F(t)| < \varepsilon.$$

Выбирая $x > \max(2\delta, \delta_1)$, получаем

$$J_1(x) \leq \varepsilon(1 + 2c_0).$$

Таким образом, при $x > \max(2\delta, \delta_1)$

$$I_2(x) \leq \alpha L(2\varepsilon + 2\varepsilon c_0).$$

Итак, справедливость формулы (36) доказана.

Переходя к пределу в обеих частях уравнения (32) при $x \to +\infty$, получаем

$$c_0 = G_\alpha(c_0), \qquad 0 < c_0 \leq \eta.$$

Ниже убедимся, что η является первым положительным корнем уравнения $G_\alpha(x) = x$. Предположим обратное: пусть существует число $\eta_1 \in (0, \eta)$ такое, что

$$G_\alpha(\eta_1) = \eta_1, \quad \text{т. е.} \quad \eta - \alpha G(\eta - \eta_1) = \eta_1.$$

Тогда имеем

$$\eta - \eta_1 = G_\alpha(\eta) - G_\alpha(\eta_1) \leq \alpha L(\eta - \eta_1),$$

откуда непосредственно следует, что $\eta \leq \eta_1$, ибо $\alpha L < 1$. Из полученного противоречия, в свою очередь, следует, что $c_0 = \eta$.

Итак, мы доказали, что уравнение (32) имеет ненулевое неотрицательное монотонно возрастающее и ограниченное решение $\tilde{\varphi}(x)$, причем $\lim_{x\to+\infty} \tilde{\varphi}(x) = \eta$ и $\eta - \tilde{\varphi} \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Теперь, использовав эти факты, перейдем к построению положительного решения уравнения (1) в пространстве $L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$. Введем следующие итерации:

$$\varphi_{n+1}(x) = -\int_0^\infty \mathcal{F}_0(t, \varphi_n(t))d_tF(x-t) + \mathcal{F}_1(x, \varphi_n(x)), \tag{37}$$

$$\varphi_0(x) = \mu_{\eta_0}(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,\ x \geq 0.$$

Индукцией можно проверить достоверность следующих фактов:

$$\varphi_n(x) \uparrow \quad \text{по} \quad n, \tag{38}$$

$$\varphi_n(x) \leq \eta - \tilde{\varphi}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ , \tag{39}$$

Докажем неравенства (39). Пусть $n = 0$, тогда

$$\varphi_0(x) = \mu_{\eta_0}(x) \leq \mu_\eta(x) = \eta(1 - F(x)) \leq$$

$$\leq \eta(1 - F(x)) + \left(-\int_0^\infty (\eta - G_\alpha(\eta - \tilde{\rho}^*(t)))d_tF(x-t)\right) = \tilde{\rho}^*(x) \equiv \eta - \tilde{\varphi}(x).$$

Предположим, что неравенства (39) выполняются при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (37) с учетом (29) – (31) будем иметь

$$\varphi_{n+1}(x) \leq -\int_0^\infty \mathcal{F}_0(t, \eta - \tilde{\varphi}(t)) d_t F(x-t) + \mathcal{F}_1(x, \eta - \tilde{\varphi}(x)) \leq$$

$$\leq -\int_0^\infty \mathcal{F}_0(t, \eta - \tilde{\varphi}(t)) d_t F(x-t) + \mathcal{F}_1(x, \eta) \leq$$

$$\leq -\alpha \int_0^\infty G(\eta - \tilde{\varphi}(t)) d_t F(x-t) + \mathcal{F}_1(x, \eta) \leq$$

$$\leq -\int_0^\infty (\eta - G_\alpha(\tilde{\varphi}(t))) d_t F(x-t) + \mu_\eta(x) =$$

$$= \eta F(x) + \int_0^\infty G_\alpha(\tilde{\varphi}(t)) d_t F(x-t) + \mu_\eta(x) = \eta - \tilde{\varphi}(x).$$

Монотонность последовательности $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ по n доказывается с использованием условий 1, 2 теоремы 1. Следовательно, последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \to \infty\colon \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, причем $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1), что следует из условия 4 теоремы 1 с учетом теоремы Б. Леви. Из (39) следует также, что

$$\mu_{\eta_0}(x) \leq \varphi(x) \leq \eta - \tilde{\varphi}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{40}$$

Поскольку $\mu_{\eta_0}(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\eta - \tilde{\varphi} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$, из (40) заключаем, что $\varphi \in$ $\in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$.

Теорема доказана.

Приведем несколько примеров функций $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$, для которых выполняются все условия теоремы 1.

Примеры функции $\mathcal{F}_0(x, z)$:

1^0) $\mathcal{F}_0(x, z) = \alpha^p q_0(x, z) \dfrac{Q^p(z)}{\eta^{p-1}}$, $x \in \mathbb{R}^+$, $z \in [0, \eta]$, где $q_0(x, z)$ — определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

A) $0 \leq q_0(x, z) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, $z \in [0, \eta]$,

B) $q_0 \uparrow$ по z на отрезке $[0, \eta]$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$,

C) $q_0(x, z)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу z на множестве $\mathbb{R}^+ \times [0, \eta]$.

2^0) $\mathcal{F}(x, z) = q_0(x, z) \ln(\alpha Q(z) + 1)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $z \in [0, \eta]$.

Примерами $q_0(x, z)$ и $Q(z)$ могут служить следующие функции:

$$q_0(x, z) = e^{-\gamma x}(1 - e^{-\beta z}), \quad \gamma, \beta > 0,$$

$$Q(z) = \frac{z^p}{\eta^{p-1}}, \qquad p > 1, \quad z \in [0, \eta].$$

Примеры функции $\mathcal{F}_1(x, z)$:

3^0) $\mathcal{F}_1(x, z) = \mu_{\eta_0 + \eta_1}(x) \dfrac{z}{z + \mu_{\eta_1}(x)}$, где $x \in \mathbb{R}^+$, $z \in [0, \eta]$, $\eta_0, \eta_1 > 0$, $\eta \geq \eta_0 + \eta_1$,

$4^0)$ $\mathcal{F}_1(x,z)=\mu_{\eta_0+\eta_1}(x)\dfrac{\lambda z^2}{(z+\mu_{\eta_1}(x))^2}$, где $x\in\mathbb{R}^+$, $z\in[0,\eta]$, $\lambda\geq 1+\dfrac{\eta_1}{\eta_0}$, $\eta\geq\lambda(\eta_0+\eta_1)$, $\eta_0,\eta_1>0$.

4. Однопараметрическое семейство положительных и ограниченных решений для уравнения (1) в случае, когда $\boldsymbol{\mathcal{F}_1\equiv 0}$, а $\boldsymbol{F\equiv F_C=F_A+F_S}$. В настоящем пункте мы займемся построением однопараметрического семейства положительных и ограниченных решений для уравнения (1) в частном случае, когда $\mathcal{F}_1(x,z)\equiv 0$, а функция распределения F удовлетворяет условиям a) – c) и имеет только абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты, т. е. допускает представление $F\equiv F_C=F_A+F_S$. В доказательстве следующей теоремы существенным образом применяется основная лемма из п. 2.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{F}_1(x,z)\equiv 0$, а функция F удовлетворяет условиям* (10) *и* $a)-c)$, *причем $F\equiv F_C=F_A+F_S$. Предположим далее, что $\mathcal{F}_0(t,z)$ имеет следующую структуру:*

$$\mathcal{F}_0(t,z)=z-\omega(t,z),$$

где $\omega(t,z)$ — измеримая вещественная функция, определенная на множестве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$\gamma_1)$ *существует число $A>0$ такое, что при каждом фиксированном $t\in\mathbb{R}^+$ функция $\omega(t,z)\downarrow$ по z на множестве $[A,+\infty)$;*

$\gamma_2)$ *существует измеримая функция $\overset{\circ}{\omega}(z)$, определенная на $\mathbb{R}$, со свойствами $0\leq\overset{\circ}{\omega}(z)\downarrow$ на $[A,+\infty)$, $\overset{\circ}{\omega}\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap C_0(\mathbb{R}^+)$, $m_1(\overset{\circ}{\omega})\equiv\int\limits_0^\infty x\,\overset{\circ}{\omega}(x)dx<+\infty$,*

причем

$$0\leq\omega(t,z)\leq\overset{\circ}{\omega}(t+z),\qquad t\in\mathbb{R}^+,\quad z\in[A,+\infty);\tag{41}$$

$\gamma_3)$ *ω удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу z на множестве $\mathbb{R}^+\times[A,+\infty)$.*

Тогда уравнение (1) *имеет однопараметрическое семейство положительных и ограниченных решений $\{\varphi_\beta(x)\}_{\beta\in\Delta}$, причем каждая функция этого семейства обладает следующими свойствами:*

$$\lim_{x\to\infty}\varphi_\beta(x)=2\beta(1-w_+(0))^{-1},\quad \beta\in\Delta,$$

если $\beta_1,\beta_2\in\Delta$, $\beta_1>\beta_2$, то

$$\varphi_{\beta_1}(x)-\varphi_{\beta_2}(x)\geq 2(\beta_1-\beta_2),\quad x\in\mathbb{R}^+.$$

Здесь $\Delta=[\max(\varkappa,\beta_0),+\infty)$, где β_0 $(\beta_0\geq A)$ — некоторое фиксированное число, для которого $\overset{\circ}{\omega}(\beta_0)<\beta_0$, а $\varkappa=\sup_{x\geq 0}Q(x)$, $Q(x)$ — ограниченное и положительное решение неоднородного интегрального уравнения

$$Q(x)=2\,\overset{\circ}{\omega}(x+A)-\int\limits_0^\infty Q(t)d_tF(x-t),\quad x\geq 0.\tag{42}$$

***Замечание* 1.** Существование положительного и ограниченного решения уравнения (42) не предполагается, а следует из основной леммы, доказанной в п. 2, а существование числа $\beta_0\geq A$ непосредственно следует из свойств функции $\overset{\circ}{\omega}$.

Доказательство разобьем на несколько шагов.

I *шаг* (*исследование одного вспомогательного неоднородного линейного интегрального уравнения*). Наряду с уравнением (1) рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\tilde{Q}(x) = 2\,\overset{\circ}{\omega}(x + S_\beta(x)) - \lambda_\beta(x)\int\limits_0^\infty \tilde{Q}(t)d_tF(x-t), \quad x \geq 0, \tag{43}$$

относительно искомой измеримой функции $\tilde{Q}(x)$, где

$$S_\beta(x) = \beta S(x), \quad \beta \in \Delta,$$
$$\lambda_\beta(x) = 1 - \frac{\overset{\circ}{\omega}(x + S_\beta(x))}{S_\beta(x)}, \tag{44}$$

а $S(x)$ — решение уравнения (12), имеющее свойства (13), (14).

Введем следующие итерации:

$$\tilde{Q}_{n+1}(x) = 2\,\overset{\circ}{\omega}(x + S_\beta(x)) - \lambda_\beta(x)\int\limits_0^\infty \tilde{Q}_n(t)d_tF(x-t),$$
$$\tilde{Q}_0(x) = 2\,\overset{\circ}{\omega}(x + S_\beta(x)), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \geq 0. \tag{45}$$

Индукцией по n можно доказать, что

$\theta_1)$ $\tilde{Q}_n(x) \uparrow$ по n,

$\theta_2)$ $\tilde{Q}_n(x) \leq Q(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x \geq 0$.

Действительно, докажем, например, $\theta_2)$. Поскольку $S_\beta(x) \geq \beta \geq \beta_0 \geq A$, в силу монотонности $\overset{\circ}{\omega}$ на $[A, +\infty)$ имеем

$$\overset{\circ}{\omega}(x + S_\beta(x)) \leq \overset{\circ}{\omega}(x + A),$$

откуда следует, что

$$Q_0(x) = 2\,\overset{\circ}{\omega}(x + S_\beta(x)) \leq 2\,\overset{\circ}{\omega}(x + A) \leq Q(x).$$

Предположим, что $\theta_2)$ выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$, и докажем его при $n+1$. Сначала заметим, что функция $\lambda_\beta(x)$ имеет следующие свойства:

существует число $\delta = \delta_\beta > 0$ такое, что

$$0 < \delta \leq \lambda_\beta(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{46}$$

$$1 - \lambda_\beta \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \beta \in \Delta, \tag{47}$$

$$\lim_{x\to\infty} \lambda_\beta(x) = 1 \qquad \text{при любом} \quad \beta \in \Delta. \tag{48}$$

Действительно, выбирая в качестве $\delta > 0$ число

$$\delta = (\beta_0 - \overset{\circ}{\omega}(\beta_0))\frac{(1 - w_+(0))}{\beta} > 0$$

и учитывая монотонность функции $\overset{\circ}{\omega}$, приходим к (46). Свойства (47) и (48) непосредственно следуют из включения $\overset{\circ}{\omega} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_0(\mathbb{R}^+)$.

Теперь с использованием (46) и с учетом неравенства $Q_0(x) \leq \overset{\circ}{\omega}(x+A)$ из (45) получаем

$$\tilde{Q}_{n+1}(x) \leq 2\,\overset{\circ}{\omega}(x+A) - \int_0^\infty \tilde{Q}_n(t) d_t F(x-t) \leq 2\,\overset{\circ}{\omega}(x+A) - \int_0^\infty Q(t) d_t F(x-t) = Q(x).$$

Монотонность последовательности $\{\tilde{Q}_n\}_0^\infty$ доказывается более просто. Тогда последовательность функций $\{\tilde{Q}_n\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} \tilde{Q}_n(x) = \tilde{Q}_\beta(x)$, причем предельная функция удовлетворяет уравнению (43) и неравенствам

$$2\,\overset{\circ}{\omega}(x + S_\beta(x)) \leq \tilde{Q}_\beta(x) \leq Q(x).$$

Ниже убедимся также, что при любом $\beta \in \Delta$ имеет место неравенство

$$S_\beta(x) \geq \tilde{Q}_\beta(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{49}$$

Действительно, из определения множества Δ следует, что

$$S_\beta(x) \geq \beta \geq \varkappa \geq Q(x) \geq \tilde{Q}_\beta(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{50}$$

II *шаг* (*построение нетривиального решения соответствующего однородного линейного уравнения, априорные оценки*). Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (43):

$$E_\beta(x) = -\lambda_\beta(x) \int_0^\infty E_\beta(t) d_t F(x-t), \quad x \geq 0, \tag{51}$$

относительно искомой измеримой функции $E_\beta(x)$, $\beta \in \Delta$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $\tilde{E}_\beta(x) \equiv 2S_\beta(x) - \tilde{Q}_\beta(x)$ удовлетворяет уравнению (51). Поскольку $S_\beta(x) \geq \tilde{Q}_\beta(x)$ (см. (49) и (50)), то

$$\tilde{E}_\beta(x) \geq S_\beta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^+, \quad \beta \in \Delta.$$

Рассмотрим для уравнения (51) следующие итерации:

$$E_\beta^{(n+1)}(x) = -\lambda_\beta(x) \int_0^\infty E_\beta^{(n)}(t) d_t F(x-t), \quad x \geq 0,$$
$$E_\beta^{(0)}(x) = 2S_\beta(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Индукцией по n нетрудно убедиться в справедливости следующих фактов:

$$E_\beta^{(n)}(x) \downarrow \quad \text{по} \quad n, \qquad \beta \in \Delta, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$E_\beta^{(n)}(x) \leq 2\lambda_\beta(x) S_\beta(x), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad x \geq 0,$$

$$E_\beta^{(n)}(x) \geq \tilde{E}_\beta(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, последовательность функций $\{E_\beta^{(n)}(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} E_\beta^{(n)}(x) = E_\beta(x)$, причем этот предел удовлетворяет уравнению (51) и цепочке неравенств

$$2\lambda_\beta(x)S_\beta(x) \geq E_\beta(x) \geq \tilde{E}_\beta(x) \geq S_\beta(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{52}$$

Рассмотрим теперь „основное" вспомогательное однородное уравнение

$$P_\beta(x) = -\int\limits_0^\infty \lambda_\beta(t)P_\beta(t)d_tF(x-t), \quad x \geq 0, \tag{53}$$

относительно искомой функции $P_\beta(x)$, $\beta \in \Delta$.

В силу (51) и (52) функция $P_\beta(x) = \dfrac{E_\beta(x)}{\lambda_\beta(x)}$ удовлетворяет уравнению (53) и неравенствам

$$S_\beta(x) \leq \tilde{E}_\beta(x) \leq E_\beta(x) \leq P_\beta(x) \leq 2S_\beta(x), \qquad x \geq 0, \quad \beta \in \Delta. \tag{54}$$

На последнем шаге, с учетом свойств построенного решения $P_\beta(x)$ и специально выбранного итерационного процесса, докажем существование однопараметрического семейства положительных решений для (1) в случае, когда $\mathcal{F}_1 \equiv 0$.

III *шаг* (*специальный итерационный процесс для решения уравнения* (1)). Рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$\varphi_{n+1}^\beta(x) = -\int\limits_0^\infty (\varphi_n^\beta(t) - \omega(t, \varphi_n^\beta(t)))d_tF(x-t),$$
$$\varphi_0^\beta(x) = 2S_\beta(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \geq 0. \tag{55}$$

Индукцией по n нетрудно убедиться, что

$$\varphi_n^\beta(x) \downarrow \quad \text{по} \quad n, \tag{56}$$

$$\varphi_n^\beta(x) \geq P_\beta(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{57}$$

если β_1, $\beta_2 \in \Delta$, $\beta_1 > \beta_2$ — произвольные числа, то

$$\varphi_n^{\beta_1}(x) - \varphi_n^{\beta_2}(x) \geq 2(S_{\beta_1}(x) - S_{\beta_2}(x)) \geq 2(\beta_1 - \beta_2), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \geq 0. \tag{58}$$

Докажем, например, неравенство (57). Остальные свойства последовательности $\{\varphi_n^\beta(x)\}_{n=0}^\infty$ проверяются легче. В случае $n = 0$ неравенство (57) непосредственно следует из цепочки неравенств (54). Пусть (57) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (41), (44) и (54) из (55) получаем

$$\varphi_{n+1}^\beta(x) \geq -\int\limits_0^\infty (P_\beta(t) - \omega(t, P_\beta(t)))d_tF(x-t) \geq$$

$$\geq -\int_0^\infty (P_\beta(t) - \omega(t, S_\beta(t)))d_t F(x-t) \geq$$

$$\geq -\int_0^\infty (P_\beta(t) - \omega(t + S_\beta(t)))d_t F(x-t) =$$

$$= -\int_0^\infty (P_\beta(t) - (1-\lambda_\beta(t))S_\beta(t))d_t F(x-t) \geq$$

$$\geq -\int_0^\infty \lambda_\beta(t) P_\beta(t) d_t F(x-t) = P_\beta(x).$$

Из (56), (57) и (58) следует, что последовательность функций $\{\varphi_n^\beta(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} \varphi_n^\beta(x) = \varphi_\beta(x)$, причем предельная функция по предельной теореме Б. Леви удовлетворяет уравнению (1) и соотношениям

$$\tilde{E}_\beta(x) \leq P_\beta(x) \leq \varphi_\beta(x) \leq 2S_\beta(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{59}$$

$$\varphi_{\beta_1}(x) - \varphi_{\beta_2}(x) \geq 2(S_{\beta_1}(x) - S_{\beta_2}(x)) \geq 2(\beta_1 - \beta_2), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{60}$$

Из (60) непосредственно следует, что $\varphi_\beta(x) \uparrow$ по β на Δ.

Поскольку $\tilde{E}_\beta(x) = 2S_\beta(x) - \tilde{Q}_\beta(x)$, а $0 \leq \tilde{Q}_\beta(x) \leq Q(x)$, $\lim_{x\to\infty} Q(x) = 0$ (см. основную лемму из п. 2) и $\lim_{x\to\infty} S_\beta(x) = \beta(1 - w_+(0))^{-1}$, из (59) получаем существование конечного предела

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_\beta(x) = 2\beta(1 - w_+(0))^{-1}.$$

Таким образом, теорема доказана.

***Замечание* 2.** В частном случае, когда $F = F_A$, этот результат был получен в работе [15].

5. Построение суммируемого решения уравнения (1) с функцией $\mathcal{F}_0(t,z)$, для которой мажорантой служит функция вида $z + \omega(t,\xi)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (основная). *Пусть функция распределения F удовлетворяет условиям теоремы* 2, *причем $1 - F \in L_1(\mathbb{R}^+)$, а $\mathcal{F}_0(x,z)$ и $\mathcal{F}_1(x,z)$ — заданные измеримые и вещественные функции, определенные на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Предположим, что существуют числа*

$$\xi \geq \frac{2\max(\varkappa, \beta_0)}{1 - w_+(0)} \qquad \text{и} \qquad \xi_0 \in (0, \xi)$$

такие, что $\mathcal{F}_0(x,z)$ и $\mathcal{F}_1(x,z)$ удовлетворяют следующим условиям:

A) $\mathcal{F}_1(x, \mu_{\xi_0}(x)) \geq \mu_{\xi_0}(x)$, $\mathcal{F}_1(x,\xi) \leq \mu_\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$,

B) $0 \leq \mathcal{F}_0(t,z) \leq z + \omega(t,\xi)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $z \in [0,\xi]$, *где ω удовлетворяет условиям теоремы* 2,

C) *функции $\{\mathcal{F}_j(x,z)\}_{j=0,1}$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$ монотонно возрастают по z на отрезке $[0,\xi]$*,

D) *функции $\{\mathcal{F}_j(x,z)\}_{j=0,1}$ удовлетворяют условию Каратеодори по аргументу z на множестве $\mathbb{R}^+ \times [0,\xi]$.*

Тогда уравнение (1) *имеет ненулевое неотрицательное решение в пространстве* $L_1(\mathbb{R}^+) \cap \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$.

Доказательство. Из определения множества Δ следует, что

$$\beta^* = \frac{\xi(1 - w_+(0))}{2} \in \Delta.$$

Следовательно, учитывая теорему 2, можем утверждать, что уравнение

$$\tilde{\varphi}(x) = -\int\limits_0^\infty (\tilde{\varphi}(t) - \omega(t, \tilde{\varphi}(t)))d_t F(x - t), \quad x \geq 0,$$

имеет положительное и ограниченное решение $\tilde{\varphi}_{\beta^*}(x)$, обладающее следующими свойствами:

$$\lim_{x\to\infty} \tilde{\varphi}_{\beta^*}(x) = 2\beta^*(1 - w_+(0))^{-1} = \xi \tag{61}$$

и

$$S_{\beta^*}(x) \leq 2S_{\beta^*}(x) - \tilde{Q}_{\beta^*}(x) \leq \tilde{\varphi}_{\beta^*}(x) \leq 2S_{\beta^*}(x). \tag{62}$$

Убедимся, что

$$\xi - \tilde{\varphi}_{\beta^*}(x) \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+). \tag{63}$$

Включение $\xi - \tilde{\varphi}_{\beta^*} \in L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$ непосредственно следует из (61) и (62). Докажем, что $\xi - \tilde{\varphi}_{\beta^*} \in \in L_1(\mathbb{R}^+)$. В силу (62) с учетом того факта, что $\lim_{x\to\infty} \tilde{Q}_{\beta^*}(x) = 0$, будем иметь

$$0 \leq \xi - \tilde{\varphi}_{\beta^*}(x) \leq \xi - 2S_{\beta^*}(x) + \tilde{Q}_{\beta^*}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{64}$$

Поскольку

$$\xi - 2S_{\beta^*}(x) = 2\beta^* \left(\frac{1}{1 - w_+(0)} - S(x) \right) \in L_1(\mathbb{R}^+)$$

(см. формулу (14)) и $\tilde{Q}_{\beta^*} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, из (64) получаем (63).

С другой стороны, убедимся в достоверности неравенства

$$\xi - \tilde{\varphi}_{\beta^*}(x) \geq \mu_{\xi_0}(x).$$

Учитывая цепочку неравенств (62) и используя формулы (13), (14), имеем

$$\xi - \tilde{\varphi}_{\beta^*}(x) \geq \xi - 2S_{\beta^*}(x) = 2\beta^* \left(\frac{1}{1 - w_+(0)} - S(x) \right) =$$

$$= 2\beta^* \left(\frac{1}{1 - w_+(0)} \bigvee_x^\infty F + \frac{1}{1 - w_+(0)} \bigvee_{-\infty}^x F - S(x) \right) =$$

$$= 2\beta^* \left(\frac{1}{1 - w_+(0)} \bigvee_x^\infty F + \int\limits_{-\infty}^x \left(\frac{1}{1 - w_+(0)} - S(x - t) \right) dF(t) \right) \geq$$

$$\geq \frac{2\beta^*}{1 - w_+(0)}(1 - F(x)) = \xi(1 - F(x)) \geq \xi_0(1 - F(x)) = \mu_{\xi_0}(x).$$

Теперь рассмотрим следующие итерации:

$$\varphi_{n+1}(x) = -\int_0^\infty \mathcal{F}_0(t, \varphi_n(t))d_tF(x-t) + \mathcal{F}_1(x, \varphi_n(x)), \tag{65}$$

$$\varphi_0(x) = \xi - \tilde{\varphi}_{\beta^*}(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \geq 0.$$

Индукцией по n убедимся, что

$$\varphi_n(x) \downarrow \quad \text{по} \quad , n, \tag{66}$$

$$\varphi_n(x) \geq \mu_{\xi_0}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{67}$$

Сначала докажем, что

$$\varphi_1(x) \geq \mu_{\xi_0}(x), \qquad \varphi_1(x) \leq \varphi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

С учетом неравенства из условия A) и свойств функции $\mathcal{F}_0$ из (65) получаем

$$\varphi_1(x) \geq \mathcal{F}_1(x, \mu_{\xi_0}(x)) \geq \mu_{\xi_0}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$\varphi_1(x) = \mathcal{F}_1(x, \xi - \tilde{\varphi}_{\beta^*}(x)) - \int_0^\infty \mathcal{F}_0(t, \xi - \tilde{\varphi}_{\beta^*}(t))d_tF(x-t) \leq$$

$$\leq \mathcal{F}_1(x, \xi) - \int_0^\infty (\xi - \tilde{\varphi}_{\beta^*}(t) + \omega(t, \xi))d_tF(x-t) \leq$$

$$\leq \mu_\xi(x) + \xi F(x) - \int_0^\infty (-\tilde{\varphi}_{\beta^*}(t) + \omega(t, \xi))d_tF(x-t) \leq$$

$$\leq \xi - \int_0^\infty (-\tilde{\varphi}_{\beta^*}(t) + \omega(t, \tilde{\varphi}_{\beta^*}(t)))d_tF(x-t) = \xi - \tilde{\varphi}_{\beta^*}(x) = \varphi_0(x),$$

ибо $\omega(t, \xi) \leq \omega(t, \tilde{\varphi}_{\beta^*}(t))$ в силу $\tilde{\varphi}_{\beta^*}(t) \leq \xi, \ \tilde{\varphi}_{\beta^*}(t) \geq A$.

Предполагая, что $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n-1}(x)$ и $\varphi_n(x) \geq \mu_{\xi_0}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, и учитывая монотонность функций $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ по z, из (65) имеем

$$\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x) \qquad \text{и} \qquad \varphi_{n+1}(x) \geq \mu_{\xi_0}(x).$$

Следовательно, последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \to \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, причем этот предел в силу условия D) и с учетом теоремы Б. Леви удовлетворяет уравнению (1). Из (66) и (67) следует также, что

$$\mu_{\xi_0}(x) \leq \varphi(x) \leq \xi - \tilde{\varphi}_{\beta^*}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

откуда получаем, что $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$.

Теорема доказана.

Заметим, что для теоремы 3 в качестве функции $\mathcal{F}_1$ можно выбрать примеры из п. 3 в случае $\eta_0 = \xi_0$ и $\eta = \xi$.

Приведем один пример функции $\mathcal{F}_0$, для которой выполняются все условия теоремы 3:

$$\mathcal{F}_0(t,z) = z + \omega(t,\xi)\sin\frac{z}{\omega(t,\xi)}, \qquad t \in \mathbb{R}^+,\ z \in [0,\xi].$$

***Замечание* 3.** В отличие от утверждения теоремы 2, в теоремах 1 и 3 построенное решение $\varphi(x)$ не может быть функцией распределения, так как $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$.

1. *Cercignani C.* Theory and application of the Boltzman equation. – Edinburgh; London: Scot. Acad. Press, 1975. – 415 p.
2. *Sargan I. D.* The distribution of wealth // Econometrics. – 1957. – **25**, № 4. – P. 568 – 590.
3. *Феллер Ф.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967. – Т. 2.
4. *Хачатрян Х. А.* Вопросы разрешимости некоторых нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с некомпактными операторами в критическом случае: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Ереван, 2011. – 231 с.
5. *Lindley D. V.* The theory of queue whith a single sever // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1952. – № 48. – P. 277 – 289.
6. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978.
7. *Spitzer F.* The Wiener – Hopf equation whose kernel is probability density // Duke Math. J. – 1957. – **24**, № 3. – P. 323 – 343.
8. *Енгибарян Н. Б., Арутюнян А. А.* Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения // Мат. сб. – 1975. – **97**, № 1. – С. 35 – 58.
9. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Мат. анализ / Итоги науки и техники. – 1984. – **22**. – С. 175 – 240.
10. *Амбарцумян В. А.* Научные труды. – Ереван, 1960. – Т. 1.
11. *Маслеников М. В.* Проблема Милна с анизотропным рассеянием // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1968. – **97**.
12. *Енгибарян Н. Б., Хачатрян А. Х.* Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа // Мат. моделирование. – 2004. – **16**, № 1. – С. 67 – 74.
13. *Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках, содержащие сингулярные вероятностные распределения // Изв. РАН. Сер. мат. – 1996. – **60**, № 2. – С. 21 – 48.
14. *Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A.* On convolution type nonlinear integral equations, containing singular and discrete probability distributions // Adv. and Appl. Math. Sci. (India). – 2010. – **5**, № 1. – P. 1 – 15.
15. *Khachatryan Kh. A.* On a class of nonlinear integral equation with a noncompact operator // J. Contemp. Math. Anal. – 2011. – **46**, № 2. – P. 89 – 100.
16. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981.

Получено 28.10.13