УДК 517.9+531.19

В. І. Герасименко, В. О. Штик (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОЧАТКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛАНЦЮЖКА РІВНЯНЬ БОГОЛЮБОВА КВАНТОВИХ СИСТЕМ ЧАСТИНОК*

We construct cumulant (semi-invariant) representations for a solution of the initial-value problem for the Bogolyubov hierarchy for quantum systems of particles. In the space of sequences of trace-class operators, we prove a theorem on the existence and uniqueness of a solution. We study the equivalence problem for various representations of a solution in the case of the Maxwell – Boltzmann statistics.

Побудовано кумулянтні (семiiнварiантнi) зображення для розв'язку початкової задачi ланцюжка рiвнянь Боголюбова квантових систем частинок. У просторi послiдовностей ядерних операторiв доведено теорему iснування та єдиностi розв'язку. Дослiджено питання еквiвалентностi рiзних зображень розв'язку у випадку статистики Максвелла – Больцмана.

1. Вступ. Одним iз вiдкритих питань широко обговорюваної останнiм часом проблеми виведення квантових кiнетичних рiвнянь [1 – 11] є побудова динамiки квантових нескiнченночастинкових систем, якi описуються ланцюжком квантових рiвнянь Боголюбова [12, 13]. У роботах [1, 3, 9, 14] розв'язок початкової задачi для таких рiвнянь будується у виглядi ряду теорiї збурень (iтерацiй) у просторi послiдовностей ядерних операторiв. Доведено iснування локального за часом розв'язку для потенцiалiв взаємодiї мiж частинками, що є обмеженими функцiями. У роботах [13, 15] побудовано групу еволюцiйних операторiв, яка у просторi ядерних операторiв еквiвалентна ряду iтерацiй квантових рiвнянь Боголюбова, та доведено iснування глобального за часом розв'язку. Зауважимо, що розклад, яким зображується розв'язок ланцюжка рiвнянь Боголюбова, є iнварiантним вiдносно певних перетворень пiд знаком слiду i, отже, виникає можливiсть побудови iнших зображень для розв'язку та задача їх класифiкацiї.

У данiй роботi сформульовано критерiй iснування розв'язку для ланцюжка квантових рiвнянь Боголюбова у формi розкладу по групах (кластерах) частинок, еволюцiя яких описується певного типу еволюцiйними операторами (редукованими кумулянтами). В основу критерiю покладено рекурентнi спiввiдношення (редукованi) — кластернi розклади еволюцiйних операторiв систем скiнченного числа частинок, якими визначаються розв'язки початкової задачi рiвнянь фон Неймана. Це дає змогу побудувати новi кумулянтнi (семiiнварiантнi) зображення для розв'язку та визначити за яким принципом їх можна класифiкувати.

Рiзнi зображення розв'язку ланцюжка рiвнянь Боголюбова для початкових даних iз простору послiдовностей ядерних операторiв, якими описуються стани систем скiнченного середнього числа частинок, є еквiвалентними у вказаному далi сенсi. Для опису еволюцiї станiв нескiнченночастинкових квантових систем необхiдно побудувати розв'язки для початкових даних, наприклад, iз простору послiдовностей обмежених операторiв, якому належать рiвноважнi стани [16, 17]. Розклади для розв'язкiв ланцюжка рiвнянь Боголюбова в цьому просторi складаються з виразiв, що мають розбiжнi значення слiдiв. Тому виникає проблема надання змiсту вiдповiдним виразам. Побудованi в данiй роботi кумулянтнi зображення дають

* Пiдтримано грантами INTAS та Нацiональної академiї наук України для молодих учених (№ 0105U005666).

можливість довести, що доданки з розбіжними значеннями слідів у кожному члені розкладу для розв'язку взаємно компенсуються.

Опишемо структуру статті. У другому пункті розглядається початкова задача для абстрактного ланцюжка еволюційних рівнянь Боголюбова квантових систем частинок у просторі послідовностей ядерних операторів та наводяться необхідні факти про динаміку квантових систем скінченного числа частинок. У третьому пункті доведено критерій існування розкладу, яким визначається розв'язок, побудований у [13, 15] у формі групи еволюційних операторів ланцюжка рівнянь Боголюбова. На основі критерію в наступному пункті визначено загальну структуру кластерних розкладів еволюційних операторів квантових систем скінченного числа частинок та побудовано їх розв'язки. У п'ятому пункті за допомогою цих кластерних розкладів визначено кумулянтне (семіінваріантне) зображення для розв'язку початкової задачі ланцюжка квантових рівнянь Боголюбова та досліджено збіжність побудованого розкладу в просторі послідовностей ядерних операторів. Теорему існування та єдиності кумулянтного зображення розв'язку доведено в шостому пункті. В останньому сьомому пункті досліджено питання еквівалентності різних зображень розв'язку та побудовано деякі нові зображення.

2. Початкова задача для ланцюжка квантових рівнянь Боголюбова. Розглянемо квантову систему не фіксованого (тобто довільного, але скінченного) числа тотожних (безспінових) частинок масою $m = 1$ у просторі $\mathbb{R}^{\nu}$, $\nu \geq 1$. Стан такої системи описується нескінченною послідовністю $F = \big(I, F_1, \ldots, F_n, \ldots\big)$ n-частинкових операторів щільності F_n-позитивних ермітових операторів (I — одиничний оператор), визначених на просторі Фока $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$ над гільбертовим простором $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}$). Вважатимемо, що $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{\nu})$ (координатне зображення). Тоді елемент $\psi \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$ — це послідовність функцій $\psi = \big(\psi_0, \psi_1(q_1), \ldots, \psi_n(q_1, \ldots, q_n), \ldots\big)$ така, що

$$\|\psi\|^2 = |\psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int dq_1 \ldots dq_n |\psi_n(q_1, \ldots, q_n)|^2 < +\infty.$$

Оператор F_n, визначений в n-частинковому гільбертовому просторі $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n} = L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$, будемо позначати $F_n(1, \ldots, n)$. Для системи тотожних частинок, що описуються статистикою Максвелла – Больцмана, якщо $\{i_1, \ldots, i_n\} \in \{1, \ldots, n\}$, справджується рівність $F_n(1, \ldots, n) = F_n(i_1, \ldots, i_n)$.

Будемо розглядати стани системи, що належать простору $\mathfrak{L}^1_{\alpha}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ послідовностей $f = \big(I, f_1, \ldots, f_n, \ldots\big)$ ядерних операторів $f_n = f_n(1, \ldots, n) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, які задовольняють зазначену вище умову симетрії, з нормою

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^1_{\alpha}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \|f_n\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathrm{Tr}_{1,\ldots,n} |f_n(1, \ldots, n)|,$$

де $\alpha > 1$ — дійсне число. Для кожного оператора $f_n \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ існує така функція

$f_n(t, q_1, \ldots, q_n; q'_1, \ldots, q'_n) \in L^2(\mathbb{R}^{\nu n} \times \mathbb{R}^{\nu n})$, що на $\psi_n \in L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$ дія оператора f_n визначається формулою [18]

$$\big(f_n(1, \ldots, n)\psi_n\big)(q_1, \ldots, q_n) =$$
$$= \int f_n(q_1, \ldots, q_n; q'_1, \ldots, q'_n)\psi_n(q'_1, \ldots, q'_n)dq'_1 \ldots dq'_n.$$

Скрізь щільну в $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ множину фінітних послідовностей вироджених операторів із нескінченно диференційовними ядрами, зосередженими на компактах, будемо позначати $\mathfrak{L}^1_{\alpha,0}$. Зауважимо, що простір $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ містить послідовності операторів більш загальні, ніж ті, якими визначаються стани систем частинок.

Для системи частинок, які взаємодіють через парний потенціал взаємодії Φ, що задовольняє умови Като [19], гамільтоніан системи $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$ — самоспряжений оператор, визначений в області $\mathcal{D}(H) = \Big\{\psi \in \mathcal{F}_\mathcal{H} \,\Big|\, \sum_n \|H_n\psi_n\|^2 < +\infty\Big\} \subset$ $\subset \mathcal{F}_\mathcal{H}$, а на нескінченно диференційовних функціях з компактними носіями $\psi_n \in$ $\in L^2_0(\mathbb{R}^{\nu n}) \subset L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$ n-частинковий гамільтоніан H_n діє згідно з формулою $(H_0 = 0)$

$$H_n\psi_n = -\frac{\hbar^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{q_i}\psi_n + \sum_{i<j=1}^{n}\Phi(q_i - q_j)\psi_n.$$

У просторі $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ розглянемо початкову задачу для абстрактного ланцюжка рівнянь Боголюбова квантових систем частинок

$$\frac{d}{dt}F(t) = -\mathcal{N}F(t) + \big[\mathcal{N}, \mathfrak{a}\big]F(t), \tag{1}$$

$$F(t)\,|_{t=0} = F(0). \tag{2}$$

В еволюційному рівнянні (1) введені такі оператори, що діють у просторі $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$: $\mathfrak{a}$ — аналог оператора знищення

$$(\mathfrak{a}f)_n(1, \ldots, n) = \mathrm{Tr}_{n+1}f_{n+1}(1, \ldots, n, n+1), \tag{3}$$

для якого $\|\mathfrak{a}\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha} \leq 1$; для $f \in \mathfrak{L}^1_{\alpha,0} \subset \mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ визначено оператор фон Неймана

$$(\mathcal{N}f)_n = \mathcal{N}_n f_n = -\frac{i}{\hbar}\big[f_n, H_n\big] \equiv -\frac{i}{\hbar}\big(f_nH_n - H_nf_n\big), \tag{4}$$

де $h = 2\pi\hbar$ — стала Планка.

Зауважимо, що еволюційне рівняння (1) у термінах n-частинкових матриць щільності $F_n(t, q_1, \ldots, q_n; q'_1, \ldots, q'_n)$ — ядер n-частинкових операторів щільності F_n (тобто в координатному зображенні) — набирає канонічної форми ланцюжка квантових рівнянь Боголюбова [12]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}F_n(t; q_1, \ldots, q_n; q'_1, \ldots, q'_n) =$$
$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_{q_i} - \Delta_{q'_i}) + \sum_{i<j=1}^{n}\big(\Phi(q_i - q_j) - \Phi(q'_i - q'_j)\big)\right) \times$$

$$\times F_n(t; q_1, \ldots, q_n; q'_1, \ldots, q'_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int dq_{n+1} \big(\Phi(q_i - q_{n+1}) - \Phi(q'_i - q_{n+1})\big) \times$$

$$\times F_{n+1}(t; q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}; q'_1, \ldots, q'_n, q_{n+1}).$$

Для побудови розв'язку початкової задачі (1), (2) потрібно визначити еволюційний оператор, за допомогою якого записується розв'язок початкової задачі для рівняння фон Неймана

$$\frac{d}{dt} D(t) = -\mathcal{N} D(t), \tag{5}$$

$$D(t)|_{t=0} = D(0), \tag{6}$$

де $D(0) = (I, D_1(0), \ldots, D_n(0), \ldots)$ — послідовність операторів щільності (використовується також термін „статистичні оператори”, ядра яких відомі як матриці щільності [18]).

Розв'язок початкової задачі (5), (6) визначається формулою

$$D(t) = \mathcal{U}(-t) D(0) \mathcal{U}^{-1}(-t), \tag{7}$$

де $\mathcal{U}(-t) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(-t)$ та

$$\mathcal{U}_n(-t) = e^{-\frac{i}{\hbar} t H_n},$$

$$\mathcal{U}_n^{-1}(-t) = e^{\frac{i}{\hbar} t H_n}. \tag{8}$$

У просторі $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ відображення (7): $t \rightarrow D(t)$ є сильно неперервною ізометричною групою, яка зберігає ермітовість та позитивність операторів [13, 20]. Для $D(0) \in \mathfrak{L}^1_{\alpha,0} \subset \mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ це сильний (класичний) розв'язок [13], а для довільних початкових даних $D(0) \in \mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ — слабкий (узагальнений) розв'язок. Останнє твердження буде доведено в більш загальному випадку для розв'язку ланцюжка рівнянь Боголюбова (теорема 2).

Зауважимо, що походження позначень (8) для унітарних груп $e^{\pm \frac{i}{\hbar} t H_n}$ пов'язане з принципом відповідності квантових та класичних систем (для останніх в аналогічних термінах визначається еволюційний оператор рівняння Ліувілля для щільності функції розподілу ймовірності) і є наслідком існування двох підходів до опису еволюції систем, що ґрунтуються на описі еволюції спостережуваних або станів.

3. Критерій існування розв'язку початкової задачі для ланцюжка квантових рівнянь Боголюбова. Розв'язок початкової задачі (1), (2) зображується формальним розкладом [13, 15]

$$F_s(t; 1, \ldots, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n} \boldsymbol{U}_{1+n}(t; 1 \cup \ldots \cup s, s+1, \ldots, s+n) \times$$

$$\times F_{s+n}(0; 1, \ldots, s+n), \quad s \geq 1, \tag{9}$$

в якому еволюційний оператор $\boldsymbol{U}_{1+n}(t)$: $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n}) \rightarrow \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})$ визначається виразом

$$\boldsymbol{U}_{1+n}(t;1\cup\ldots\cup s,s+1,\ldots,s+n)F_{s+n}(0;1,\ldots,s+n)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\mathcal{U}_{s+n-k}(-t;1,\ldots,s+n-k)F_{s+n}(0;1,\ldots,s+n)\times$$

$$\times\mathcal{U}^{-1}_{s+n-k}(-t;1,\ldots,s+n-k),\quad n\geq 0,$$

де еволюційні оператори $\mathcal{U}_n(-t),\mathcal{U}_n^{-1}(-t)$ визначаються формулою (8), символ $1\cup\ldots\cup s$ відображає ту обставину, що в даному випадку множина $(1,\ldots,s+n)$ складається з елементів $1\cup\ldots\cup s,s+1,\ldots,s+n$ або, іншими словами, група (кластер) з s частинок еволюціонує подібно до кожної $s+1,\ldots,s+n$ частинки.

Ряд (9) є збіжним у просторі послідовностей ядерних операторів $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ і виконується оцінка

$$\big\|F(t)\big\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})}\leq e^2\big\|F(0)\big\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})}.$$

Еволюційні оператори $\boldsymbol{U}_{1+n}(t)$, $n\geq 0$, якими визначається кожен член розкладу (9) для розв'язку початкової задачі ланцюжка квантових рівнянь Боголюбова, можна визначити за допомогою рекурентних співвідношень, які є певним розкладом відомих еволюційних операторів рівняння фон Неймана.

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Для* $F(0)\in\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ *розв'язок початкової задачі* (1), (2) *визначається розкладами*

$$F_s(t;1,\ldots,s)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\big(\boldsymbol{U}_{1+n}(t)F_{s+n}(0)\big)(1,\ldots,s,s+1,\ldots,s+n),\quad s\geq 1,\qquad (9')$$

де $\boldsymbol{U}_{1+n}(t)$*:* $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})\to\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})$, *тоді і тільки тоді, коли еволюційні оператори* (*редуковані кумулянти*) $\boldsymbol{U}_{1+n}(t)$, $n\geq 0$, *є розв'язками рекурентних співвідношень* (*редукованих кластерних розкладів*)

$$\mathcal{U}_{s+n}(-t;1,\ldots,s+n)F_{s+n}(0;1,\ldots,s+n)\mathcal{U}^{-1}_{s+n}(-t,1,\ldots,s+n)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\big(\mathcal{U}_{1+k}(t)F_{s+n}(0)\big)(1,\ldots,s+n),\quad n\geq 0,\qquad (10)$$

де $\big(\mathcal{U}_{1+k}(t)F_{s+n}(0)\big)(1,\ldots,s+n)\equiv\mathcal{U}_{1+k}(t;1\cup\ldots\cup s,s+1,\ldots,s+k)F_{s+n}(0;$ $1,\ldots,s+n)$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай розклад (9′) є розв'язком початкової задачі (1), (2). Виведемо рекурентні співвідношення (10), з яких визначаються еволюційні оператори $\boldsymbol{U}_{1+n}(t)$, $n\geq 0$. Розв'язки початкової задачі (1), (2) виразимо [13] через розв'язки початкової задачі для рівнянь фон Неймана (5), (6)

$$F_s(t;1,\ldots,s)=\big(e^{\mathfrak{a}}D(0)\big)_0^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}D_{s+n}(t;1,\ldots,s+n),\qquad (11)$$

де згідно з означенням (3) маємо $\big(e^{\mathfrak{a}}D(0)\big)_0=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}D_n(0;1,\ldots,n)$

— нормуючий множник (статистична сума). Оскільки для розв'язку (7) початкової задачі (5), (6) справджується оцінка

$$\|D(t)\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})} \leq \|D(0)\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})},$$

то ряди в формулі (11) є збіжними, наприклад $\left|\big(e^{\mathfrak{a}}D(0)\big)_0\right| \leq \left\|D(0)\right\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})}$ і, отже, для $D(0) \in \mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ праву частину виразу (11) визначено. Формулою (11) визначається зв'язок операторів, що задовольнять відповідно ланцюжок рівнянь Боголюбова (1) та рівняння фон Неймана (5). У літературі (див., наприклад, [13]) формула (11) відома як визначення s-частинкових статистичних операторів у випадку великого канонічного ансамблю (статистика Максвелла – Больцмана). Після підстановки розв'язків (7) рівнянь фон Неймана (5) у рівність (11) отримуємо

$$F_s(t;1,\ldots,s) = \big(e^{\mathfrak{a}}D(0)\big)_0^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\mathcal{U}_{s+n}(-t;1,\ldots,s+n)\times$$
$$\times D_{s+n}(0;1,\ldots,s+n)\,\mathcal{U}^{-1}_{s+n}(-t;1,\ldots,s+n). \tag{12}$$

Згідно із зображенням (12) при $t=0$ для розкладу (9′) маємо

$$F_s(t;1,\ldots,s) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\boldsymbol{U}_{1+n}(t;1\cup\ldots\cup s, s+1,\ldots,s+n)F_{s+n}(0;1,\ldots,s+n) =$$
$$= \big(e^{\mathfrak{a}}D(0)\big)_0^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\boldsymbol{U}_{1+k}(t;1\cup\ldots\cup s,$$
$$s+1,\ldots,s+k)D_{s+n}(0;1,\ldots,s+n).$$

Порівнюючи почленно останній вираз для s-частинкового оператора щільності з виразом (12), отримуємо шукані рекурентні співвідношення (10).

Достатність. Врахувавши розв'язки рекурентних співвідношень (10)

$$\big(\boldsymbol{U}_{1+n}(t)F_{s+n}(0)\big)(1,\ldots,s+n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\mathcal{U}_{s+n-k}(-t;1,\ldots,s+n-k)F_{s+n}(0;1,\ldots,s+n)\times$$
$$\times\mathcal{U}^{-1}_{s+n-k}(-t;1,\ldots,s+n-k), \quad n\geq 0,$$

перетворимо вираз для розкладу (9′) таким чином:

$$F_s(t;1,\ldots,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\times$$
$$\times\mathcal{U}_{s+n-k}(-t;1,\ldots,s+n-k)F_{s+n}(0;1,\ldots,s+n)\times$$
$$\times\mathcal{U}^{-1}_{s+n-k}(-t;1,\ldots,s+n-k) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\mathcal{U}_{s+n}(-t;1,\ldots,s+n)\times$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+k}F_{s+n+k}(0;1,\ldots,s+n+k)\right)\times$$

$$\times\mathcal{U}_{s+n}^{-1}(-t;1,\ldots,s+n).$$

Вираз у правій частині останньої рівності помножимо і поділимо на статистичну суму $\left(e^{\mathfrak{a}}D(0)\right)_0$. Тоді згідно із зображенням (12) при $t=0$ отримаємо вираз (11)

$$F_s(t;1,\ldots,s)=\left(e^{\mathfrak{a}}D(0)\right)_0^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\mathcal{U}_{s+n}(-t;1,\ldots,s+n)\times$$

$$\times\left(\left(e^{\mathfrak{a}}D(0)\right)_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+k}F_{s+n+k}(0;1,\ldots,s+n+k)\right)\times$$

$$\times\mathcal{U}_{s+n}^{-1}(-t;1,\ldots,s+n)=$$

$$=\left(e^{\mathfrak{a}}D(0)\right)_0^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}D_{s+n}(t;1,\ldots,s+n),$$

який є розв'язком початкової задачі (1), (2).

Теорему доведено.

4. Кластерні розклади еволюційних операторів рівняння фон Неймана. Сформулюємо метод побудови розв'язку ланцюжка рівнянь Боголюбова на основі кластерних розкладів еволюційного оператора (7) рівняння фон Неймана. Для цього введемо означення кластерного розкладу в загальному випадку та визначимо кумулянти (семіінваріанти) еволюційних операторів рівнянь фон Неймана (5).

Нехай $Y=(1,\ldots,s), X=(1,\ldots,s+n)$ та $\{Y,X\setminus Y\}=(1\cup\ldots\cup s, s+1,\ldots,s+n)$. Кумулянт $\mathfrak{A}_n(t)$, $n\geq 1$, n-го порядку еволюційних операторів рівнянь фон Неймана (5) визначається як розв'язок таких рекурентних співвідношень (кластерних розкладів еволюційних операторів (7)):

$$\mathcal{U}_{|X|}(-t;Y,X\backslash Y)F_{|X|}(0;Y,X\backslash Y)\mathcal{U}_{|X|}^{-1}(-t;Y,X\backslash Y)=$$

$$=\sum_{\mathrm{P}:\,\{Y,X\backslash Y\}=\bigcup_i X_i}\Big(\mathfrak{A}_{|X_1|}(t;X_1)\ldots\Big(\mathfrak{A}_{|X_{|\mathrm{P}|}|}(t;X_{|\mathrm{P}|})F_{|X|}(0;X)\underbrace{\Big)\ldots\Big)}_{|\mathrm{P}|},\qquad(13)$$

$$|X\backslash Y|\geq 0,$$

де $\sum_{\mathrm{P}}$ — сума за всіма можливими розбиттями P множини $\{Y,X\setminus Y\}=(1\cup\ldots\ldots\cup s,s+1,\ldots,s+n)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $X_i\in\{Y,X\setminus Y\}$, що взаємно не перетинаються. Наприклад,

$$\mathcal{U}_s(-t;Y)F_s(0;Y)\mathcal{U}_s^{-1}(-t;Y)=\mathfrak{A}_1(t;Y)F_s(0;Y),$$

$$\mathcal{U}_{s+1}(-t;Y,s+1)F_{s+1}(0;Y,s+1)\mathcal{U}_{s+1}^{-1}(-t;Y,s+1)=$$

$$=\mathfrak{A}_2(t;Y,s+1)F_{s+1}(0;Y,s+1)+$$

$$+\mathfrak{A}_1(t;Y)\big(\mathfrak{A}_1(t;s+1)F_{s+1}(0;Y,s+1)\big),$$

$$\mathcal{U}_{s+2}(-t;Y,s+1,s+2)F_{s+2}(0)\mathcal{U}_{s+2}^{-1}(-t;Y,s+1,s+2)=$$

$$= \mathfrak{A}_3(t;Y,s+1,s+2)F_{s+1}(0) + \mathfrak{A}_2(t;Y,s+1)\big(\mathfrak{A}_1(t;s+2)F_{s+2}(0)\big)+$$
$$+\,\mathfrak{A}_1(t;Y)\big(\mathfrak{A}_2(t;s+1,s+2)F_{s+2}(0)\big) + \mathfrak{A}_2(t;Y,s+2)\big(\mathfrak{A}_1(t;s+1)F_{s+2}(0)\big)+$$
$$+\mathfrak{A}_1(t;Y)\Big(\mathfrak{A}_1(t;s+1)\big(\mathfrak{A}_1(t;s+2)F_{s+2}(0)\big)\Big).$$

Розв'язуючи попередні співвідношення, отримуємо приклади кумулянтів відповідного порядку еволюційних операторів (7) рівнянь фон Неймана (5):

$$\mathfrak{A}_1(t;Y)F_s(0;Y) = \mathcal{U}_s(-t;Y)F_s(0;Y)\mathcal{U}_s^{-1}(-t;Y),$$
$$\mathfrak{A}_2(t;Y,s+1)F_{s+1}(0;Y,s+1) =$$
$$= \mathcal{U}_{s+1}(-t,Y,s+1)F_{s+1}(0;Y,s+1)\mathcal{U}_{s+1}^{-1}(-t;Y,s+1)-$$
$$-\,\mathcal{U}_s(-t;Y)\mathcal{U}_1(-t;s+1)F_{s+1}(0;Y,s+1)\mathcal{U}_s^{-1}(-t;Y)\mathcal{U}_1^{-1}(-t;s+1),$$
$$\mathfrak{A}_3(t;Y,s+1,s+2)F_{s+2}(0) =$$
$$= \mathcal{U}_{s+2}(-t;Y,s+1,s+2)F_{s+2}(0)\mathcal{U}_{s+2}^{-1}(-t;Y,s+1,s+2)-$$
$$-\,\mathcal{U}_{s+2}(-t;Y,s+1)\mathcal{U}_1(-t;s+2)F_{s+2}(0)\mathcal{U}_{s+1}^{-1}(-t;Y,s+1)\mathcal{U}_1^{-1}(-t;s+2),$$
$$-\,\mathcal{U}_s(-t;Y)\mathcal{U}_2(-t;s+1,s+2)F_{s+2}(0)\mathcal{U}_s^{-1}(-t;Y)\mathcal{U}_2^{-1}(-t;s+1,s+2),$$
$$-\,\mathcal{U}_{s+1}(-t;Y,s+2)\mathcal{U}_1(-t;s+1)F_{s+2}(0)\mathcal{U}_{s+1}^{-1}(-t;Y,s+2)\mathcal{U}_1^{-1}(-t;s+1),$$
$$+\,2!\,\mathcal{U}_s(-t;Y)\mathcal{U}_1(-t;s+1)\mathcal{U}_1(-t;s+2)F_{s+2}(0)\times$$
$$\times\,\mathcal{U}_s^{-1}(-t;Y)\mathcal{U}_1^{-1}(-t;s+1)\mathcal{U}_1^{-1}(-t;s+2).$$

У загальному випадку справедливою є така лема.

Лема 1. *Розв'язки рекурентних співвідношень* (*кластерного розкладу*) (13) *визначаються розкладами*

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t;Y,X\setminus Y)F_{|X|}(0;X) =$$
$$= \sum_{\mathrm{P}:\,\{Y,X\setminus Y\}=\cup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}_{|X_i|}(-t;X_i)F_{|X|}(0;X)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}_{|X_j|}^{-1}(-t;X_j), \quad |X\setminus Y|\geq 0, \tag{14}$$

де еволюційні оператори $\mathcal{U}_{|X_i|}^{\pm 1}(-t)$ *визначаються формулою* (8), $\sum_{\mathrm{P}}$ — *сума за всіма можливими розбиттями* P *множини* $\{Y,X\setminus Y\}$ *на* $|\mathrm{P}|$ *непорожніх підмножин* $X_i\in\{Y,X\setminus Y\}$, *які взаємно не перетинаються.*

Доведення леми аналогічне випадку класичних систем, розглянутому в роботі [21].

Зауважимо, що для кумулянтів має місце також зображення, відмінне від (14). Справді, якщо перегрупувати послідовність дії операторів так, щоб розклад (14) містив явно оператори, які діють на змінні з кластеру $Y=1\cup\ldots\cup s$, то отримаємо

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t;Y,X\setminus Y)F_{|X|}(0;X) = \sum_{Z\subset X\setminus Y}\mathcal{U}_{|Y\cup Z|}(-t;Y\cup Z)\times$$

$$\times\left(\sum_{\mathrm{P}:\,(X\setminus(Y\cup Z))=\cup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}\,|\mathrm{P}|!\prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}_{|X_i|}(-t;X_i)F_{|X|}(0;X)\prod_{j=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}^{-1}_{|X_j|}(-t;X_j)\right)\times$$
$$\times\mathcal{U}^{-1}_{|Y\cup Z|}(-t;Y\cup Z), \tag{15}$$

де $\sum_{Z\subset X\setminus Y}$ — сума за всіма можливими підмножинами Z множини $X\setminus Y$.

5. Кумулянтне зображення розв'язку початкової задачі для ланцюжка квантових рівнянь Боголюбова. В теоремі 1 рекурентні співввідношення (10) було покладено в основу побудови розв'язку початкової задачі (1), (2) у формі розкладу (9$'$). Якщо замість редукованих кластерних розкладів (10) використати загальні кластерні розклади (13) для еволюційних операторів (7) рівнянь фон Неймана, то отримаємо інше зображення для розв'язку ланцюжка рівнянь Боголюбова квантових систем (1), (2), а саме

$$F_s(t,Y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\mathfrak{A}_{1+n}(t;Y,X\setminus Y)F_{s+n}(0;X),\quad s\geq 1, \tag{16}$$

де вираз $\mathfrak{A}_{1+n}(t,Y,X\setminus Y)F_{s+n}(0,X)$ визначається формулою (14). Розклад (16), (14) (або (16), (15)) будемо називати кумулянтним зображенням розв'язку.

Очевидно, для виразу (16) виконується початкова умова (2), оскільки $\mathcal{U}^{\pm1}_{|X_i|}(0)=$ $=I$, та при $n\geq 1$ справджується рівність

$$\mathfrak{A}_{1+n}(0;Y,X\setminus Y)=\sum_{\mathrm{P}:\,(Y,X\setminus Y)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!I=$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\mathrm{s}(n+1,k)(k-1)!I=0,$$

де $\mathrm{s}(n+1,k)$ — числа Стірлінга другого роду.

У просторі ядерних операторів $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})$ кумулянти (14) оцінюються таким чином.

Лема 2. *Якщо $F_{s+n}(0)\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})$, то справедливою є оцінка*

$$\Big\|\mathfrak{A}_{1+n}(t)F_{s+n}(0)\Big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})}\leq n!e^{n+2}\big\|F_{s+n}(0)\big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})}. \tag{17}$$

Доведення. Внаслідок тотожності $\mathrm{Tr}AB=\mathrm{Tr}BA$, справедливої для обмеженого A та ядерного B операторів, маємо

$$\|\mathfrak{A}_{1+n}(t)F_{s+n}(0)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})}=$$
$$=\mathrm{Tr}_{1,\ldots,s+n}\Bigg|\sum_{\mathrm{P}:\,\{Y,X\setminus Y\}=\cup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}_{|X_i|}(-t,X_i)F_{|X|}(0,X)\prod_{j=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}^{-1}_{|X_j|}(-t,X_j)\Bigg|\leq$$
$$\leq\sum_{\mathrm{P}:\,\{Y,X\setminus Y\}=\cup_i X_i}(|\mathrm{P}|-1)!\|F_{s+n}(0)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})}=$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{s}(n+1,k)(k-1)! \|F_{s+n}(0)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})} \leq$$

$$\leq n! e^{n+2} \|F_{s+n}(0)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})}.$$

Оскільки

$$\mathrm{s}(n+1,k) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \geq 1 \\ r_1+\ldots+r_k=n+1}} \frac{(n+1)!}{r_1!\ldots r_k!},$$

то виконуються нерівності

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{s}(n+1,k)(k-1)! =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \geq 1 \\ r_1+\ldots+r_k=n+1}} \frac{(n+1)!}{r_1!\ldots r_k!} \leq \sum_{k=1}^{n+1} k^n \leq n! \sum_{k=1}^{n+1} e^k \leq n! e^{n+2},$$

що і доводить лему.

Внаслідок оцінки (17) для послідовності операторів $F(t) = \big(I, F_1(t), \ldots$ $\ldots, F_n(t), \ldots\big)$, які визначаються розкладами (16), за умови $\alpha > e$ маємо нерівність

$$\|F(t)\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})} \leq c_\alpha \|F(0)\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})}, \tag{18}$$

де $c_\alpha = e^2(1 - \frac{e}{\alpha})^{-1}$ — стала. Тобто ряд (16), яким зображується розв'язок, є збіжним за нормою простору $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ за умови, що $\alpha > e$. Зауважимо, що параметр α можна інтерпретувати як величину, обернену до середнього числа частинок системи в одиниці об'єму в початковий момент.

6. Теорема існування розв'язку. Згідно з оцінкою (18) має місце така теорема.

Теорема 2. *Якщо* $F(0) \in \mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$, *то за умови* $\alpha > e$ *для* $t \in \mathbb{R}^1$ *існує єдиний розв'язок задачі Коші* (1), (2) *який зображується формулою*

$$F_s(t,Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n} \sum_{\mathrm{P}:\, \{Y, X\setminus Y\} = \bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|} \mathcal{U}_{|X_i|}(-t, X_i) F_{s+n}(0,X) \prod_{j=1}^{|\mathrm{P}|} \mathcal{U}^{-1}_{|X_j|}(-t, X_j). \tag{19}$$

Для початкових даних $F(0) \in \mathfrak{L}^1_{\alpha,0} \subset \mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ *це сильний розв'язок, а для довільних початкових даних із простору* $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ *— слабкий.*

Доведення. Для доведення існування класичного (сильного) розв'язку використаємо той факт, що вираз (19) для $t \in \mathbb{R}^1$ визначає однопараметричну групу відображень $t \to e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)F(0) = F(t)$ простору $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ в себе. Позначення $e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)$ для цієї групи в термінах оператора (3) використано з метою підкреслити структуру розкладу (19), так що послідовність $e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)F(0)$ покомпонентно збігається з розкладом (16).

Згідно з оцінкою (18), за умови $\alpha > e$ група $e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)$ визначена у просторі $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ та є обмеженою групою операторів класу C_0. Властивість сильної неперервності за параметром $t \in \mathbb{R}^1$ групи $e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)$ є наслідком [20] сильної неперервності групи (7).

Справді, оскільки при $|X \setminus Y| \geq 1$ має місце тотожність

$$\sum\nolimits_{\mathrm{P}:\,\{Y,X\setminus Y\}=\cup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! = 0,$$

то справджується рівність

$$\big\|e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)f - f\big\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})} = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s \mathrm{Tr}_{1,\ldots,s}|(e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)f)_s - f_s| =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s \mathrm{Tr}_{1,\ldots,s}\Bigg|\mathcal{U}_s(-t)f_s\mathcal{U}_s^{-1}(-t) - f_s +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n} \sum_{\mathrm{P}:\,\{Y,X\setminus Y\}=\bigcup\limits_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\times$$

$$\times\Bigg(\prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}_{|X_i|}(-t,X_i)f_{s+n}\prod_{j=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}^{-1}_{|X_j|}(-t,X_j) - f_{s+n}\Bigg)\Bigg|.$$

Розглянемо цей вираз на скрізь щільній множині $\mathfrak{L}^1_{\alpha,0} \subset \mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ фінітних послідовностей вироджених операторів із нескінченно диференційовними ядрами, зосередженими на компактах. Для $f \in \mathfrak{L}^1_{\alpha,0}$ ряди складаються зі скінченного числа доданків, і можна почленно перейти до границі під знаком сліду. Наслідком властивості неперервності унітарних груп (8) є рівність [20]

$$\lim_{t\to 0}\|\mathcal{U}_n(-t)f_n\mathcal{U}_n^{-1}(-t) - f_n\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)} = 0.$$

Далі, оскільки для множин $X_i \subset \{Y, X\setminus Y\}$, які не перетинаються, виконується також рівність

$$\lim_{t\to 0}\|\prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}_{|X_i|}(-t,X_i)f_{s+n}\prod_{j=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}^{-1}_{|X_j|}(-t,X_j) - f_{s+n}\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})} = 0,$$

для $f \in \mathfrak{L}^1_{\alpha,0} \subset \mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ остаточно маємо

$$\lim_{t\to 0}\|e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)f - f\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})} = 0.$$

Побудуємо генератор групи $e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)$ для кожної $\psi \in \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{F}_\mathcal{H}$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)f - f)_s\psi_s =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}((\mathcal{U}_s(-t)f_s\mathcal{U}_s^{-1}(-t) - f_s) + \mathrm{Tr}_{s+1}\mathfrak{A}_{1+1}(t)f_{s+1} + R_s(t))\psi_s, \qquad (20)$$

де $R_s(t)$ — залишок ряду, $R_s(t) \equiv \sum\nolimits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\mathfrak{A}_{1+n}(t)f_{s+n}$. Для $f \in$

$\in \mathfrak{L}^1_{\alpha,0} \subset \mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ обчислимо границю кожного доданка з правої частини рівності (20). Якщо потенціал взаємодії задовольняє умови Като [19], то для першого доданка маємо [13]

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\|(\mathcal{U}_s(-t)f_s\mathcal{U}_s^{-1}(-t)-f_s)-(-\mathcal{N}_s)f_s\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)}=0. \tag{21}$$

Аналогічно, для другого доданка знаходимо

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mathrm{Tr}_{s+1}\mathfrak{A}_{1+1}(t)f_{s+1})\psi_s =$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\mathrm{Tr}_{s+1}\big((\mathcal{U}_{s+1}(-t)f_{s+1}\mathcal{U}_{s+1}^{-1}(-t)-f_{s+1})-$$

$$-(\mathcal{U}_s(-t)\mathcal{U}_1(-t,s+1)f_{s+1}\mathcal{U}_s^{-1}(-t)\mathcal{U}_1^{-1}(-t,s+1)-f_{s+1})\big)\Big)\psi_s=$$

$$=(\mathrm{Tr}_{s+1}(-\mathcal{N}_{s+1}f_{s+1})-\mathrm{Tr}_{s+1}(-\mathcal{N}_s-\mathcal{N}_1(s+1))f_{s+1})\psi_s=\big([\mathcal{N},\mathfrak{a}]f\big)_s\psi_s,$$

де враховано тотожність $\mathrm{Tr}_{s+1}\mathcal{N}_1(s+1)f_{s+1}\equiv 0$ та використано позначення $\mathcal{N}_s = \mathcal{N}_s(1,\ldots,s)$ для комутатора (4). Остаточно для $f\in\mathfrak{L}^1_{\alpha,0}$ маємо

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\|\mathrm{Tr}_{s+1}\mathfrak{A}_{1+1}(t)f_{s+1}-\big([\mathcal{N},\mathfrak{a}]f\big)_s\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)}=0. \tag{22}$$

Доведемо, що для парного потенціалу взаємодії залишок $R_s(t)$ з формули (20) дорівнює нулю. Враховуючи (15), для $\psi\in\mathcal{D}(H)\subset\mathcal{F}_\mathcal{H}$ отримуємо рівності

$$R_s(t)\equiv\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\mathfrak{A}_{1+n}(t)f_{s+n}=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\Bigg(\sum_{Z\subset X\setminus Y}\mathcal{U}_{|Y\cup Z|}(-t;Y\cup Z)\Bigg(\sum_{\mathrm{P}\colon (X\setminus(Y\cup Z))=\cup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}\,|\mathrm{P}|!\times$$

$$\times\Bigg(\prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}_{|X_i|}(-t;X_i)f_{s+n}\prod_{j=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}^{-1}_{|X_j|}(-t;X_j)\Bigg)-f_{s+n}\Bigg)\mathcal{U}^{-1}_{|Y\cup Z|}(-t;Y\cup Z)+$$

$$+\sum_{Z\subset X\setminus Y}(-1)^{|X\setminus(Y\cup Z)|}\big(\mathcal{U}_{|Y\cup Z|}(-t;Y\cup Z)f_{s+n}\mathcal{U}^{-1}_{|Y\cup Z|}(-t;Y\cup Z)-f_{s+n}\big)\Bigg),$$

де використано тотожності

$$\sum_{\mathrm{P}\colon (X\setminus(Y\cup Z))=\cup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}\,|\mathrm{P}|!=(-1)^{|X\setminus(Y\cup Z)|}$$

та за умови $|X\setminus Y|\geq 2$

$$\sum_{Z\subset X\setminus Y}(-1)^{|X\setminus(Y\cup Z)|}=0.$$

Для $f\in\mathfrak{L}^1_{\alpha,0}$ залишок $R_s(t)$ ряду (20) містить скінченне число доданків і, отже, в попередньому виразі можна перейти до границі

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}R_s(t)\psi_s =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\sum_{Z\subset X\setminus Y}(-1)^{|X\setminus(Y\cup Z)|}(-\mathcal{N}_{|Y\cup Z|}(Y\cup Z))f_{s+n}\psi_s,$$

де враховано тотожність $\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\sum_{Z\subset X\setminus Y}(-\mathcal{N}_{|X_i|}(X_i))f_{s+n}\equiv 0$ для $X_i\subset$ $\subset X\setminus(Y\cup Z)$. В останньому виразі n-й член ряду згідно з означенням (3) та властивістю симетрії статистики Максвелла – Больцмана перетворюється таким чином:

$$\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\sum_{Z\subset X\setminus Y}(-1)^{|X\setminus(Y\cup Z)|}(-\mathcal{N}_{|Y\cup Z|})f_{s+n} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{i_1<\ldots<i_{n-k}=s+1}^{s+n}(-\mathcal{N}_{s+n-k}(Y,i_1,\ldots,i_{n-k}))f_{s+n} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}(\mathfrak{a}^{n-k}(-\mathcal{N})\mathfrak{a}^k f)_s = \Big([\ldots[\mathcal{N},\underbrace{\mathfrak{a}],\ldots,\mathfrak{a}}_{n}]f\Big)_s.$$

У випадку парного потенціалу взаємодії справджується рівність $\big[[\mathcal{N},\mathfrak{a}],\mathfrak{a}\big]f=0$ і, отже, $R_s(t)\equiv 0$.

Згідно з формулами (21) та (22) для сильно неперервної обмеженої групи $e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)$ при $F(0)\in\mathfrak{L}^1_{\alpha,0}\subset\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ виконуються рівності

$$\frac{d}{dt}e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)F(0) = (-\mathcal{N}+\big[\mathcal{N},\mathfrak{a}\big])e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)F(0) = e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)(-\mathcal{N}+\big[\mathcal{N},\mathfrak{a}\big])F(0), \tag{23}$$

тобто для $F(0)\in\mathfrak{L}^1_{\alpha,0}\subset\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ формула (19) визначає класичний розв'язок початкової задачі (1), (2).

Покажемо, що в загальному випадку $F(0)\in\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ формула (19) задає слабкий (узагальнений) розв'язок. Для цього розглянемо функціонал

$$\big(g,F(t)\big) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\,\mathrm{Tr}_{1,\ldots,s}\,g_s(1,\ldots,s)F_s(t,1,\ldots,s), \tag{24}$$

де $g\equiv(0,g_1,\ldots,g_s,\ldots)\in\mathfrak{L}_0(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ — фінітні послідовності вироджених обмежених операторів з нескінченно диференційовними ядрами, які зосереджені на компактах, а послідовність $F(t)=e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)F(0)\in\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ покомпонентно визначається формулою (19). Оскільки g — фінітна послідовність обмежених, а $F(t)$ — послідовність ядерних операторів, то функціонал $\big(g,F(t)\big)$ існує. Перетворимо функціонал (24) таким чином:

$$\big(g,F(t)\big) = \big(g,e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)F(0)\big) = \big(e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)g,F(0)\big), \tag{25}$$

де $(\mathfrak{a}^+g))_n(1,\ldots,n)=\sum_{k=1}^{n}g_{n-1}(1,\ldots,\overset{k}{\vee},\ldots,n)$, символом $e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)$ позначено групу, спряжену до групи $e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)$, яка визначається розкладом

$$(e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)g)_s(Y) = \sum_{n=0}^{s}\sum_{1=j_1<\ldots<j_{s-n}}^{s}\sum_{\mathrm{P}:\,\{Y\setminus X,X\}=\cup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}_{|X_i|}(t,X_i)g_{|Y\setminus X|}(Y\setminus X)\prod_{j=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}^{-1}_{|X_j|}(t,X_j),$$

де $Y\equiv(1,\ldots,s)$ і $\sum_{\mathrm{P}:\,\{Y\setminus X,X\}=\cup_i X_i}$ — сума за всіма можливими розбиттями P множини $\{Y\setminus X,X\}=(j_1\cup\ldots\cup j_{s-n},1,\ldots,\overset{j_1}{\vee},\ldots,\overset{j_{s-n}}{\vee},\ldots,s)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $X_i\in\{Y\setminus X,X\}$, що взаємно не перетинаються.

Оператор $(e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)g)_s(1,\ldots,s)$ диференційовний по t для $\psi\in\mathcal{D}(H)\subset\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$:

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left(e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)g-g\right)_s\psi_s=\left(\left(\mathcal{N}+\left[\mathcal{N},\mathfrak{a}^+\right]\right)g\right)_s\psi_s,$$

де $\mathcal{N}+\left[\mathcal{N},\mathfrak{a}^+\right]$ — інфінітезимальний генератор групи $e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)$,

$$\left(\left[\mathcal{N},\mathfrak{a}^+\right]g\right)_n(1,\ldots,n)=$$
$$=-\frac{i}{\hbar}\sum_{1=i\neq j}^{n}\left(g_{n-1}(1,\ldots,\overset{j}{\vee},\ldots,n)\Phi(i,j)-\Phi(i,j)g_{n-1}(1,\ldots,\overset{j}{\vee},\ldots,n)\right).$$

Зауважимо, що інфінітезимальний генератор $\mathcal{N}+\left[\mathcal{N},\mathfrak{a}^+\right]$ є двоїстим (дуальним) до генератора $\left(-\mathcal{N}+[\mathcal{N},\mathfrak{a}]\right)$ групи $e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}(t)$.

Оскільки оператор $\left(\mathcal{N}+[\mathcal{N},\mathfrak{a}^+]e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)g\right)_s$ є обмеженим, а оператор $\big((\mathcal{N}+$ $+[\mathcal{N},\mathfrak{a}^+])e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)g\big)_sF_s(0)$ — ядерним, то функціонал $\big((\mathcal{N}+[\mathcal{N},\mathfrak{a}^+])e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)g,$ $F(0)\big)$ існує. Послідовність $\frac{1}{t}(e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)g-g)-\left(\mathcal{N}+[\mathcal{N},\mathfrak{a}^+]\right)g$ збігається при $t\to0$ до нуля в сенсі слабкої $*$-топології простору послідовностей обмежених операторів $\mathfrak{L}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ [20], тобто для всіх $F(0)\in\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ виконується рівність

$$\lim_{t\to0}\left(\left(\frac{1}{t}(e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)g-g)-(\mathcal{N}+\left[\mathcal{N},\mathfrak{a}^+\right])g\right),F(0)\right)=0.$$

Отже, в результаті диференціювання по t рівності (25) у вказаному сенсі остаточно отримаємо

$$\frac{d}{dt}\big(g,F(t)\big)=\frac{d}{dt}\big(e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)g,F(0)\big)=$$
$$=\left(e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}^+(t)(\mathcal{N}+\left[\mathcal{N},\mathfrak{a}^+\right])g,F(0)\right)=\left((\mathcal{N}+\left[\mathcal{N},\mathfrak{a}^+\right])g,F(t)\right).\tag{26}$$

Рівності (26) означають, що для довільних початкових даних $F(0)\in\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ формулою (19) визначається слабкий (узагальнений) розв'язок задачі Коші для ланцюжка квантових рівнянь Боголюбова (1), (2).

7. Класифікація зображень розв'язку початкової задачі для ланцюжка рівнянь Боголюбова квантових систем. На основі формули (19) можна побудувати зображення (9) для розв'язку початкової задачі (1), (2). Справді, перегрупуємо доданки у виразі (19) так, щоб явно виділити оператори, які діють на змінну кластера Y, тобто скористаємося розкладом (15):

$$F_s(t,Y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\sum_{Z\subset X\backslash Y}\mathcal{U}_{|Y\cup Z|}(-t;Y\cup Z)\times$$
$$\times\Bigg(\sum_{\mathrm{P}:\,(X\backslash(Y\cup Z))=\cup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}\,|\mathrm{P}|!\prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}_{|X_i|}(-t;X_i)F_{|X|}(0;X)\prod_{j=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}^{-1}_{|X_j|}(-t;X_j)\Bigg)\times$$
$$\times\mathcal{U}^{-1}_{|Y\cup Z|}(-t;Y\cup Z). \tag{27}$$

Якщо $X_i\subset X\backslash Y$, то, оскільки $F_{|X|}(0)$ — ядерний оператор та $\mathcal{U}^{\pm1}_{|X_i|}(-t;X_i)$ — унітарні оператори (8), справджується рівність

$$\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}_{|X_i|}(-t;X_i)F_{|X|}(0;X)\prod_{j=1}^{|\mathrm{P}|}\mathcal{U}^{-1}_{|X_j|}(-t;X_j)=$$
$$=\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}F_{|X|}(0;X).$$

Враховуючи, що

$$\sum_{\mathrm{P}:\,(X\backslash(Y\cup Z))=\cup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}\,|\mathrm{P}|!=(-1)^{|X\backslash(Y\cup Z)|},$$

розклад (27) записуємо у вигляді

$$F_s(t,Y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\sum_{Z\subset X\backslash Y}(-1)^{|X\backslash(Y\cup Z)|}\times$$
$$\times\mathcal{U}_{|Y\cup Z|}(-t;Y\cup Z)F_{|X|}(0;X)\mathcal{U}^{-1}_{|Y\cup Z|}(-t;Y\cup Z). \tag{28}$$

Внаслідок властивості симетрії системи частинок, яка описується статистикою Максвелла – Больцмана, виконуються рівності

$$\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\sum_{Z\subset X\backslash Y}(-1)^{|X\backslash(Y\cup Z)|}\times$$
$$\times\mathcal{U}_{|Y\cup Z|}(-t;Y\cup Z)F_{|X|}(0;X)\mathcal{U}^{-1}_{|Y\cup Z|}(-t;Y\cup Z)=$$
$$=\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{i_1<\ldots<i_{n-k}=s+1}^{s+n}\mathcal{U}_{|Y|+n-k}(-t;Y,i_1,\ldots,i_{n-k})\times$$
$$\times F_{s+n}(0;1,\ldots,s+n)\mathcal{U}^{-1}_{|Y|+n-k}(-t;Y,i_1,\ldots,i_{n-k})=$$
$$=\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\mathcal{U}_{|Y|+n-k}(-t;Y,s+1,\ldots,s+n-k)\times$$
$$\times F_{s+n}(0;1,\ldots,s+n)\mathcal{U}^{-1}_{|Y|+n-k}(-t;Y,s+1,\ldots,s+n-k)$$

і, отже, отримуємо зображення (9). У термінах операторів (3) та (8) розклад (9) набирає вигляду

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\mathfrak{a}^{n-k}\big(\mathcal{U}(-t)\big(\mathfrak{a}^kF(0)\big)\mathcal{U}^{-1}(-t)\big). \tag{29}$$

Зображення (29) для розв'язку вперше отримано в [13, 15] іншими методами у формі групи еволюційних операторів ланцюжка рівнянь Боголюбова

$$F(t) = e^{\mathfrak{a}}\big(\mathcal{U}(-t)\big(e^{-\mathfrak{a}}F(0)\big)\mathcal{U}^{-1}(-t)\big).$$

Таким чином, ми встановили в якому сенсі зображення (9) та (19) є еквівалентними у просторі $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$.

Зауважимо, що з огляду на операторну рівність

$$\frac{d}{d\tau}\big(\mathcal{U}(-t+\tau)\mathfrak{a}\big(\mathcal{U}(-\tau)F(0)\mathcal{U}^{-1}(-\tau)\big)\mathcal{U}^{-1}(-t+\tau)\big) =$$
$$= \mathcal{U}(-t+\tau)\Big(\big[\mathcal{N},\mathfrak{a}\big]\mathcal{U}(-\tau)F(0)\mathcal{U}^{-1}(-\tau)\Big)\mathcal{U}^{-1}(-t+\tau)$$

розклад (29) можна подати у формі ряду ітерацій ланцюжка рівнянь (1)

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, \mathcal{U}(-t+t_1)\Big(\big[\mathcal{N},\mathfrak{a}\big]\ldots\Big(\big[\mathcal{N},\mathfrak{a}\big]\mathcal{U}(-t_{n-1}+t_n)\times$$
$$\times\Big(\big[\mathcal{N},\mathfrak{a}\big]\mathcal{U}(-t_n)F(0)\mathcal{U}^{-1}(-t_n)\Big)\mathcal{U}^{-1}(-t_{n-1}+t_n)\Big)\ldots\Big)\mathcal{U}^{-1}(-t+t_1). \tag{30}$$

Зображення (30) використовується в роботах [1 – 11, 14] для доведення існування розв'язку ланцюжка рівнянь Боголюбова квантових систем (1), (2) у просторі послідовностей ядерних операторів ($\alpha = 1$).

За допомогою кластерних розкладів (13) еволюційних операторів рівнянь фон Неймана можна побудувати й інші зображення для розв'язку ланцюжка рівнянь Боголюбова, тобто рекурентні співвідношення (13) лежать в основі класифікації можливих зображень для розв'язку початкової задачі (1), (2). Наприклад, розв'язуючи рекурентні співвідношення (13) відносно кумулянтів першого та другого порядку, маємо

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t;Y,X\setminus Y)F_{|X|}(0;X) =$$
$$= \sum_{\substack{Z\subset X\setminus Y,\\ Z\neq\emptyset}}\mathfrak{A}_2(t;Y,Z)\sum_{\mathrm{P}:\,(X\setminus(Y\cup Z))=\cup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}\,|\mathrm{P}|!\times$$
$$\times\Big(\mathfrak{A}_1(t;X_1)\ldots\Big(\mathfrak{A}_1(t;X_{|\mathrm{P}|})F_{|X|}(0;X)\underbrace{\Big)\ldots\Big)}_{|\mathrm{P}|}. \tag{31}$$

Підсумовуючи відповідні члени з виразу (31) у розкладі (16) подібно до випадку зображення (28), отримуємо зображення розкладу початкової задачі (1), (2) через кумулянти другого порядку:

$$F_s(t,Y) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\sum_{\substack{Z\subset X\setminus Y,\\ Z\neq\emptyset}}(-1)^{|X\setminus(Y\cup Z)|}\mathfrak{A}_2(t;Y,Z)F_{s+n}(0;X). \tag{32}$$

Для $F(0) \in \mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F_H})$ ряд (32) є збіжним за нормою простору $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F_H})$ і справджується оцінка

$$\|F(t)\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F_H})} \leq 2e^2 \|F(0)\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F_H})}.$$

Твердження про те, що у просторі $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F_H})$ формула (32) визначає розв'язок ланцюжка рівнянь Боголюбова (1), (2) квантових систем, фактично є наслідком еквівалентності різних зображень та теореми 2 про існування розв'язку в кумулянтному вигляді (19).

1. *Benedetto D., Castella F., Esposito R., Pulvirenti M.* Some consideration on the derivation of the nonlinear quantum Boltzmann equation // J. Statist. Phys. – 2004. – **116**, № 1/4. – P. 381 – 410.
2. *Benedetto D., Castella F., Esposito R., Pulvirenti M.* A short review on the derivation of the nonlinear quantum Boltzmann equations // Lect. Notes. Workshop „Math. Meth. in Quant. Mech.”. – Bressanove (Italy), 2005.
3. *Bardos C., Golse F., Mauser N. J.* Weak coupling limit of the N-particle Schrödinger equation // Math. Anal. and Appl. – 2000. – **2**, № 7. – P. 275 – 293.
4. *Bardos C., Golse F., Gottlieb A., Mauser N.* Mean field dynamics of fermions and the time-dependent Hartree – Fock equation // J. math. pures et appl. – 2003. – **82**. – P. 665 – 683.
5. *Golse F.* The mean-field limit for the dynamics of large particle systems // J. equat. aux deriv. part. – 2003. – № 9. – 47 p.
6. *Castella F.* From the von Neumann equation to the quantum Boltzmann equation in a deterministic framework // J. Statist. Phys. – 2001. – **104**, № 1/2. – P. 387 – 447.
7. *Erdös L.* Derivation of macroscopic kinetic equations from microscopic quantum mechanics // Lect. Notes. School Math. Georgiatech. – 2001. – 58 p.
8. *Erdös L., Yau H.-T.* Derivation of the nonlinear Schrödinger equation from a many body Coulomb system // Adv. Theor. and Math. Phys. – 2001. – **5**. – P. 1169 – 1205.
9. *Erdös L., Salmhofer M., Yau H.-T.* On the quantum Boltzmann equation // J. Statist. Phys. – 2004. – **116**, № 116. – P. 367 – 380.
10. *Arnold A.* Self-consistence relaxation-time models in quantum mechanics // Communs Part. Different. Equat. – 1996. – **21**, № 3. – P. 473 – 506.
11. *Spohn H.* Quantum kinetic equations // On Three Levels: Micro-Meso and Macro Approaches in Physics / Eds M. Fannes, C. Maes, A. Verbeure. Nato ASI Ser. B: Physics. – 1994. – **324**. – P. 1 – 10.
12. *Боголюбов Н. Н.* Лекції з квантової статистики. Питання статистичної механіки квантових систем. – Київ: Рад. шк., 1949. – 227 с.
13. *Petrina D. Ya.* Mathematical foundations of quantum statistical mechanics. Continuous systems. – Amsterdam: Kluwer, 1995. – 624 p.
14. *Петрина Д. Я.* О решениях кинетических уравнений Боголюбова. Квантовая статистика // Теорет. и мат. физика. – 1972. – **13**, № 3. – С. 391 – 405.
15. *Петрина Д. Я., Видыбида А. К.* Задача Коши для кинетических уравнений Боголюбова // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **86**. – С. 370 – 378.
16. *Ginibre J.* Some applications of functional integrations in statistical machanics // Statist. Mech. and Quant. Field Theory / Eds C. de Witt, R. Stord. – New York: Gordon and Breach, 1971. – P. 329 – 427.
17. *Ruelle D.* Statistical mechanics. Rigorous results. – New York: Benjamin, 1969. – 314 p.
18. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шредингера. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 392 с.
19. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. – New York: Springer, 1966. – 740 p.
20. *Dautray R., Lions J. L.* Evolution problems // Math. Anal. and Numer. Methods Sci. and Technol. – Berlin: Springer, 2000. – Vol. 5. – 742 p.
21. *Герасименко В. І., Рябуха Т. В.* Кумулянтне зображення розв'язків ланцюжків рівнянь Боголюбова // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 10. – С. 1313 – 1328.

Одержано 28.04.2006