УДК 517.5

О. В. Поляков, Н. О. Ручаевская (Днепропетр. нац. ун-т)

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ НАИЛУЧШИХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТРИКАХ

We obtain theorems that characterize the degree of the rational function of the best $(\alpha;\beta)$-approximation in the space L_p and conditions under which the value of the best rational $(\alpha;\beta)$-approximation is less than the best $(\alpha;\beta)$-approximation by algebraic polynomials.

Отримано теореми, що характеризують степінь раціональної функції найкращого $(\alpha;\beta)$-наближення у просторі L_p, та умови, при яких величина найкращого раціонального $(\alpha;\beta)$-наближення менша за найкраще $(\alpha;\beta)$-наближення алгебраїчними многочленами.

Пусть $L_p[-1;1]$, $1 \le p < \infty$, — пространство суммируемых в p-й степени функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Через P_n и R_n будем обозначать соответственно подпространство алгебраических многочленов и рациональных функций степени не выше n.

Для $\alpha, \beta > 0$ введем величину $|f|_{\alpha\beta} = \alpha \operatorname{sign} f_+ - \beta \operatorname{sign} f_-$. Обозначим через $E_n^{(\alpha,\beta)}(f)_p$ и $R_n^{(\alpha,\beta)}(f)_p$ наилучшие (α, β)-приближения функции $f \in L_p[-1;1]$ подпространствами соответственно P_n и R_n, т. е.

$$E_n^{(\alpha,\beta)}(f)_p = \inf\left\{ \|\alpha(f - p_n)_+ + \beta(f - p_n)_-\|_p : \ p_n \in P_n \right\},$$
$$R_n^{(\alpha,\beta)}(f)_p = \inf\left\{ \|\alpha(f - r_n)_+ + \beta(f - r_n)_-\|_p : \ r_n \in R_n \right\}, \tag{1}$$

где $g_\pm(x) = \max\{\pm g(x); 0\}$.

Если $\alpha = \beta = 1$, то мы имеем обычные наилучшие приближения функции f. (Свойства (α, β)-приближений см., например, в [1, 2].)

Многочлены и рациональные функции, реализующие точные нижние грани в (1), будем называть соответственно многочленом и рациональной функцией наилучшего (α, β)-приближения и обозначать их $p_n^{(\alpha,\beta)}(f; x)$ и $r_n^{(\alpha,\beta)}(f; x)$.

Теорема 1. *Если функция* $f \in L_p[-1; 1]$, $1 < p < \infty$, *всюду конечна на* $[-1; 1]$ *и не является рациональной функцией степени не выше* n, *то* $r_n^{(\alpha,\beta)}(f; x)$ *имеет точно степень* n.

Доказательство. Пусть $f \in L_p[-1;1]$ и степень $r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ меньше n. Тогда

$$r_n(f;x,\lambda) = r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) + \frac{\lambda}{(x-c)q(x)}$$

для любого $c \notin [-1;1]$ и для любого λ имеет степень не выше n.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\lambda) = \int_{-1}^{1} |f(x) - r_n(f;x,\lambda)|_{\alpha\beta}^{p}\, dx .$$

Покажем, что $\Phi(\lambda)$ дифференцируема при $\lambda = 0$. Положим

$$S(h) = \frac{1}{h}\big(\Phi(h) - \Phi(0)\big).$$

Из теоремы о среднем при $|h| < 1$ и неравенства $t^{p-1} \le t^p + 1$, $t > 0$, $1 < p < \infty$, получаем

$$\frac{1}{|h|}\left|\int_{-1}^{1}\left(|f(x) - r_n(f;x,h)|_{\alpha\beta}^{p} - \left|f(x) - r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)\right|_{\alpha\beta}^{p}\right)dx\right| =$$

$$= p\left|\int_{-1}^{1} |f(x) - r_n(f;x,\theta_x h)|^{p-1}\,(\alpha^p \operatorname{sign}(f(x) - r_n(f;x,\theta_x h))_+ -\right.$$

$$\left. - \beta^p \operatorname{sign}(f(x) - r_n(f;x,\theta_x h))_-)\,\frac{dx}{(x-c)q(x)}\right| =$$

$$= p\left|\int_{-1}^{1}\left|f(x) - r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) - \frac{\theta_x h}{(x-c)q(x)}\right|^{p-1}\left(\alpha^p \operatorname{sign}\left(f(x) - r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) - \frac{\theta_x h}{(x-c)q(x)}\right)_+ -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \beta^p \operatorname{sign}\left(f(x) - r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) - \frac{\theta_x h}{(x-c)q(x)}\right)_-\right)\frac{dx}{(x-c)q(x)}\right| \le$$

$$\le p\left(\alpha^p + \beta^p\right)\left(\left(|f(x)| + \left|r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)\right| + \frac{1}{|x-c||q(x)|}\right)^p + 1\right)\frac{1}{|x-c||q(x)|},$$

$$0 < \theta_x < 1 .$$

Поскольку последнее выражение суммируемо на $[-1;1]$, по теореме Лебега о предельном переходе

$$\lim_{h\to 0} S(h) = \Phi'(0) = p\int_{-1}^{1}\left|f(x) - r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)\right|^{p-1} \times$$

$$\times\left(\alpha^p \operatorname{sign}\left(f(x)-r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)\right)_+ - \beta^p \operatorname{sign}\left(f(x)-r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)\right)_-\right)\frac{1}{(x-c)q(x)}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx,$$

где

$$\varphi(x) = p\left|f(x)-r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)\right|^{p-1}\times$$

$$\times\left(\alpha^p \operatorname{sign}\left(f(x)-r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)\right)_+ - \beta^p \operatorname{sign}\left(f(x)-r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)\right)_-\right)\frac{1}{q(x)}.$$

В работе [3] доказано, что если $f \in L_p[-1;1]$ и для любого $c \notin [-1;1]$ $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{x-c}\,dx = 0$, то $f(x)=0$ почти всюду на $[-1;1]$.

Поскольку $r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)$ — рациональная функция наилучшего (α,β)-приближения, в силу критерия элемента наилучшего (α,β)-приближения [1] $\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx = 0$, а отсюда $\varphi(x)=0$ почти всюду на $[-1;1]$, т. е. $f(x) = r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)$. Получили противоречие.

Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве леммы в [3], и применяя теорему 1, нетрудно установить следующий факт.

Утверждение. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[-1;1]$. *Тогда разность* $f(x) - r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)$ *имеет не менее* $2n+1$ *различных нулей.*

Теорема 2. *Если* $(n+1)$*-я производная* $f^{n+1}(x)$ *имеет на* $[-1;1]$ *не более* $n-1$ *нулей, то*

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(f)_p < E_n^{(\alpha,\beta)}(f)_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Доказательство. Пусть $R_n^{(\alpha,\beta)}(f)_p = E_n^{(\alpha,\beta)}(f)_p$. Это означает, что среди функций $r_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)$ имеется и многочлен $p_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)$. В силу утверждения разность $f(x) - p_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)$ имеет на $[-1;1]$ не менее $2n+1$ различных нулей. Тогда по теореме Ролля $f^{(n+1)}(x)$ имеет на $[-1;1]$ не менее n различных нулей. Получили противоречие.

Заметим, что при $\alpha=\beta=1$ эти теоремы доказаны в [3] и при их доказательстве была использована схема доказательства соответствующих теорем из [3].

1. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 4. – С. 409 – 416.
2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987.
3. *Рамазанов А. К.* О рациональных функциях наилучшего приближения в интегральных метриках // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1982. – № 5. – С. 43 – 48.

Получено 23.04.12