УДК 517.987.1; 517.983.3

Д. Л. Фінкельштейн (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЗГОРТКИ НА ПРОСТОРАХ КОНФІГУРАЦІЙ. I. ПРОСТОРИ СКІНЧЕННИХ КОНФІГУРАЦІЙ*

We consider two types of convolutions ($*$ and $\star$) of functions on spaces of finite configurations (finite subsets of a phase space) and study some of their properties. A relationship between the $*$-convolution and the convolution of measures on spaces of finite configurations is described. Properties of the operators of multiplication and differentiation with respect to the $*$-convolution are investigated. We also present conditions under which the $*$-convolution is positive definite with respect to the $\star$-convolution.

Рассмотрены два типа сверток ($*$ и $\star$) функций на пространствах конечных конфигураций (конечных подмножеств фазового пространства), исследованы некоторые их свойства. Показана связь $*$-свертки со сверткой мер на пространствах конечных конфигураций. Изучены свойства операторов умножения и дифференцирования относительно $*$-свертки. Найдены условия, при которых $*$-свертка функций положительно определена относительно $\star$-свертки.

1. Вступ. Простори конфігурацій (дискретних підмножин деякого фазового простору) як окремий математичний об'єкт стали предметом досліджень починаючи з 60-х років минулого століття у різних областях математики: функціональному аналізі, математичній фізиці, теорії ймовірностей, топології. Скінченні та локально скінченні підмножини фазового простору є зручними об'єктами для вивчення математичних моделей різних систем у застосуваннях: фізичних, хімічних, біологічних, економічних, соціальних тощо. Відповідно, елементи цих дискретних підмножин інтерпретуються як молекули, індивіди, агенти і т. д. Фазовий простір, в свою чергу, може бути дискретною множиною, наприклад ґраткою, чи, більш загально, графом, скажімо, в евклідовому просторі. Ґратчасті системи широко вивчались у літературі і залишаються об'єктом постійних досліджень (див., наприклад, монографії [10, 11, 15 – 17]). Якщо ж фазовий простір є континуальною множиною, наприклад евклідовим простором або, більш загально, топологічним простором (скажімо, многовидом), то системи, що описуються відповідним простором конфігурацій, називають „неперервними”.

Математичний опис задач статистичної фізики, в яких фізична система моделюється за допомогою великої або взагалі нескінченної множини континуального фазового простору, розпочався ще в XIX ст. в роботах Л. Больцмана та його послідовників (див., наприклад, [6, 7]). У XX ст. ця тематика бурхливо розвивалась, починаючи з фундаментальних праць Дж. В. Гіббса (див. [4]), які започаткували сучасну теорію гіббсівських мір на просторах конфігурацій. Починаючи з 40-х років XX ст. математичні моделі теорії неперервних систем у статистичній фізиці активно досліджувались М. М. Боголюбовим (див., наприклад, [1]) та його учнями і послідовниками. В 60-х роках стала зрозумілою необхідність строгого математичного опису просторів локально скінченних конфігурацій та станів (імовірнісних мір) на них. Відповідні дослідження було розпочато в роботах Р. Л. Добрушина і, незалежно, О. Ленфорда та Д. Рюеля (див., наприклад, огляд [5] і наведену в ньому бібліографію). Детальне вивчення аналізу на просторах конфігурацій бере свій початок, мабуть, у роботі А. М. Вершика, І. М. Гельфанда та М. І. Граєва [2]. Сучасного вигляду аналіз на просторах конфігурацій набув

*Частково підтримано стипендією Президента України для молодих вчених.

у роботах С. Альбеверіо, Ю. Г. Кондратьєва, М. Рьокнера та їхніх учнів (див., наприклад, [8, 9, 14, 18]).

Актуальна на сьогодні бібліографія робіт, що стосуються просторів конфігурацій над континуальним фазовим простором, сама по собі, мабуть, може стати повноцінною науковою статтею, принаймні, за обсягом. Ми обмежимося лише переліком основних областей, в яких дослідження мають велику історію і продовжуються в наш час, а саме: вивчення топологічних, метричних, вимірних та алгебраїчних структур на просторах конфігурацій; теорія міри, зокрема вивчення гіббсівських, детермінантних та перманентних мір, мір Кокса; диференціальне числення та диференціальна геометрія, а також гармонічний аналіз на просторах конфігурацій; динамічні системи, детерміновані та стохастичні, ергодичні та інваріантні міри; марковські еволюції, рівноважні та нерівноважні стохастичні динаміки, зокрема дифузійні, народження-загибелі, стрибків; гамільтонова динаміка; різноманітні перешкалювання цих динамік, гідродинамічні та кінетичні рівняння тощо.

Дослідження у цій статті присвячено різним згорткам на просторах конфігурацій (як між функціями, так і між мірами), що розглядались у літературі. Ці питання, з одного боку, є важливими для побудови розвиненого аналізу на просторах конфігурацій, а з іншого — відповідні згортки активно використовуються при подальших дослідженнях, зокрема при вивченні стохастичних динамік на цих просторах. Внаслідок достатньо великого обсягу матеріалу статтю розбито на дві частини. Першу частину присвячено згорткам на просторах скінченних конфігурацій, тобто підмножин континуального фазового простору, що містять довільну, але скінченну кількість точок. Зазначимо, що навіть простори скінченних конфігурацій є об'єктом дослідження нескінченновимірного аналізу. Крім того, простори локально скінченних конфігурацій не є простим узагальненням просторів скінченних конфігурацій. Більш точно їх взаємозв'язок описує аналогія з співвідношенням гільбертових просторів та простору l_2 квадратично сумовних послідовностей, який можна розглянути як відповідний простір коефіцієнтів Фур'є. Цей підхід до гармонічного аналізу на просторах локально скінченних конфігурацій уперше було використано у [12] і застосовано у багатьох публікаціях останніх років.

Опишемо коротко будову першої частини цієї роботи. У другому пункті наведено основні структури на просторах скінченних конфігурацій, які будуть використовуватися в обох частинах роботи, а також розглянуто деякі їхні властивості. У третьому пункті розглянуто так зване $*$-числення Рюеля, введене за допомогою згортки Рюеля [19], яка досить часто використовується в дослідженнях. Проте деякі аналітичні питання про згортку Рюеля залишались невивченими. Четвертий пункт присвячено оператору множення відносно згортки Рюеля в деяких функціональних просторах. В останньому пункті розглянуто низку наступних питань: побудова згортки мір на просторах скінченних конфігурацій, зв'язок згортки мір із згорткою Рюеля функцій, властивості твірного функціонала (так званого функціонала Боголюбова (детальніше див., наприклад, [13])), властивості оператора диференціювання відносно згортки Рюеля, зв'язок згортки Рюеля із згорткою, введеною Ю. Г. Кондратьєвим та Т. Куною [12].

2. Простори скінченних конфігурацій. Нехай X — зв'язний орієнтовний некомпактнийріманів C^∞-многовид, $\mathcal{O}(X)$ — клас усіх відкритих множин з X, $\mathcal{B}(X)$ — відповідна борелівська

σ-алгебра. Класи всіх відкритих та борелівських множин з X з компактними замиканнями позначимо $\mathcal{O}_{\mathrm{c}}(X)$ та $\mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ відповідно. Будемо вважати, що на X задано неатомарну міру Радона m, тобто $m(\Lambda) < \infty$, $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ і $m(\{x\}) = 0$, $x \in X$. Припустимо також, що існує послідовність $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ така, що $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ і $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n = X$.

Для довільних $Y \in \mathcal{B}(X)$ та $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ простором усіх n-точкових конфігурацій над множиною Y будемо називати множину

$$\Gamma_Y^{(n)} := \left\{\eta \subset Y \;\middle|\; |\eta| = n\right\}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \Gamma_Y^{(0)} := \{\varnothing\}.$$

Тут і далі символ $|\cdot|$ позначає кількість точок у дискретній множині. Для довільної $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$, $\Lambda \subset Y$ покладемо $\eta_\Lambda := \eta \cap \Lambda$ і розглянемо відображення $N_\Lambda \colon \Gamma_{0,Y}^{(n)} \to \mathbb{N}_0$, задане формулою $N_\Lambda(\eta) := |\eta_\Lambda|$. Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\widetilde{Y^n} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in Y^n \;\middle|\; x_k \neq x_l, \;\text{ якщо }\; k \neq l\right\}.$$

Розглянемо також відображення $\mathrm{sym}_{Y,n} \colon \widetilde{Y^n} \to \Gamma_Y^{(n)}$, $\mathrm{sym}_{Y,n}\left((x_1, \ldots, x_n)\right) := \{x_1, \ldots, x_n\}$. Воно дає змогу ототожнити простір n-точкових конфігурацій $\Gamma_Y^{(n)}$ з симетризацією множини $\widetilde{Y^n}$, тобто з множиною $\widetilde{Y^n}/S_n$, де S_n — група перестановок над множиною $\{1, \ldots, n\}$. Це дозволяє визначити у просторі $\Gamma_Y^{(n)}$ сім'ю відкритих множин $\mathcal{O}\left(\Gamma_{0,Y}^{(n)}\right) := \mathrm{sym}_{Y,n}^{-1}\left(\mathcal{O}(\widetilde{Y^n})\right)$. Базу топології складатиме система множин

$$U_1 \widehat{\times} \ldots \widehat{\times} U_n := \left\{\eta \in \Gamma_{0,Y}^{(n)} \;\middle|\; N_{U_1}(\eta) = 1, \ldots, N_{U_n}(\eta) = 1\right\},$$

де $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}_c(X)$, $U_1, \ldots, U_n \subset Y$ та $U_i \cap U_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Побудована за $\mathcal{O}\left(\Gamma_{0,Y}^{(n)}\right)$ борелівська σ-алгебра $\mathcal{B}\left(\Gamma_Y^{(n)}\right)$ збігатиметься з σ-алгеброю, породженою сім'єю відображень N_Λ, $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$, $\Lambda \subset Y$ (див., наприклад, [8]).

Простором скінченних конфігурацій над множиною $Y \in \mathcal{B}(X)$ називається диз'юнктне об'єднання

$$\Gamma_{0,Y} := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \Gamma_Y^{(n)}. \tag{2.1}$$

Структура диз'юнктного об'єднання дозволяє визначити на $\Gamma_{0,Y}$ топологію $\mathcal{O}(\Gamma_{0,Y})$. Відповідну борелівську σ-алгебру будемо позначати $\mathcal{B}(\Gamma_{0,Y})$. У випадку $Y = X$ будемо нехтувати нижнім індексом, тобто $\Gamma^{(n)} := \Gamma_X^{(n)}$, $\Gamma_0 := \Gamma_{0,X}$.

Множину $B \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$ називатимемо обмеженою, якщо існують такі $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ та $N \in \mathbb{N}$, що $B \subset \bigsqcup_{n=0}^{N} \Gamma_\Lambda^{(n)}$. Клас усіх обмежених множин з $\mathcal{B}(\Gamma_0)$ будемо позначати $\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$. Міру ρ на $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$ будемо називати локально скінченною, якщо $\rho(B) < \infty$ для довільної множини $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$. Клас усіх локально скінченних мір на $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$ позначимо $\mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$. Важливим прикладом локально скінченної міри на Γ_0 є міра Лебега – Пуассона, яку ми зараз визначимо. Міра $m^{(n)}$ на $\mathcal{B}(\Gamma^{(n)})$ визначається як образ продакт-міри $m^{\otimes n}$ на $\widetilde{(X)^n}$ під дією відображення $\mathrm{sym}_{X,n}$. Це означення є коректним, оскільки $m^{\otimes n}\left((X)^n \setminus \widetilde{(X)^n}\right) = 0$. При $n = 0$ покладемо $m^{(0)}(\{\varnothing\}) := 1$. Нехай число $z > 0$ задано. Міра Лебега – Пуассона λ_z на $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$ визначається відповідно до розкладу (2.1) таким чином:

$$\lambda_z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} m^{(n)}. \tag{2.2}$$

Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$ звуження міри λ_z на $\Gamma_{0,\Lambda}$ будемо також позначати λ_z. Невід'ємне число z називається інтенсивністю міри λ_z або її параметром активності. При $z = 1$ будемо нехтувати індексом, тобто $\lambda := \lambda_1$. У [14] показано, що для довільної множини $A \in \mathcal{B}(X)$ такої, що $m(A) = 0$, виконується рівність

$$\lambda\left(\{\eta \in \Gamma_{0,Y} \mid \eta \cap A \neq \varnothing\}\right) = 0, \quad Y \in \mathcal{B}(X).$$

Зокрема, можна покласти $Y = X$. Маємо очевидний наслідок: для довільних $\xi \in \Gamma_0$, $x \in X$

$$\lambda\left(\{\eta \in \Gamma_0 \mid x \in \eta\}\right) = \lambda\left(\{\eta \in \Gamma_0 \mid \xi \cap \eta \neq \varnothing\}\right) = 0. \tag{2.3}$$

Розглянемо деякі класи дійснозначних функцій на Γ_0. Під вимірною функцією на Γ_0 завжди будемо розуміти $\mathcal{B}(\Gamma_0)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-вимірну функцію. Клас усіх вимірних функцій на Γ_0 позначимо $L^0(\Gamma_0)$. Відповідно до розкладу (2.1) кожна функція $G \in L^0(\Gamma_0)$ задається системою своїх звужень $G^{(n)} := G \restriction_{\Gamma^{(n)}}$. Для симетричної функції $G^{(n)} \circ \mathrm{sym}_{X,n}^{-1} \colon \widetilde{(X)^n} \to \mathbb{R}$ будемо використовувати те саме позначення $G^{(n)}$, крім випадків, коли це призведе до непорозуміння. Будемо казати, що $G \in L^0(\Gamma_0)$ має локальний носій, якщо існує $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$ таке, що $G \restriction_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_{0,\Lambda}} = 0$. Множину всіх вимірних функцій на Γ_0, що мають локальний носій, позначимо $L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$. Аналогічно, будемо казати, що $G \in L^0(\Gamma_0)$ має обмежений носій, якщо існує $B \in \mathcal{B}_b(\Gamma_0)$ таке, що $G \restriction_{\Gamma_0 \setminus B} = 0$. Множину всіх обмежених вимірних функцій на Γ_0, що мають обмежений носій, позначимо $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$.

Для довільної $\mathcal{B}(X)$-вимірної функції $f \colon X \to \mathbb{R}$ визначимо експоненту Лебега – Пуассона, як функцію на Γ_0, задану таким чином:

$$e_\lambda(f,\eta) := \prod_{x \in \eta} f(x), \qquad \eta \in \Gamma_0 \setminus \{\varnothing\}, \quad e_\lambda(f,\varnothing) := 1. \tag{2.4}$$

3. $*$-Числення. Введемо наступну згортку між функціями $G_1, G_2 \in L^0(\Gamma_0)$ на Γ_0 (див., наприклад, [19]):

$$(G_1 * G_2)(\eta) := \sum_{\xi \subset \eta} G_1(\xi)\, G_2(\eta \setminus \xi). \tag{3.1}$$

Наприклад, для довільних вимірних $f, g \colon X \to \mathbb{R}$

$$e_\lambda(f) * e_\lambda(g) = e_\lambda(f+g), \tag{3.2}$$

що безпосередньо випливає з (2.4) та (3.1).

Твердження 3.1 (див., наприклад, [14]). *Для довільних H, G_1, $G_2 \in L^0(\Gamma_0)$ справджується тотожність*

$$\int_{\Gamma_0} H(\eta)(G_1 * G_2)(\eta) d\lambda(\eta) = \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_0} H(\eta \cup \xi) G_1(\eta) G_2(\xi) d\lambda(\xi) d\lambda(\eta), \tag{3.3}$$

якщо принаймні один з інтегралів має сенс.

Нехай $C > 0$ та $\delta \geq 0$. Розглянемо банаховий простір

$$\mathcal{K}_{C,\,\delta} = \left\{ k\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R} \;\middle|\; |k(\eta)| \leq \mathrm{const} \cdot C^{|\eta|}(|\eta|!)^{\delta} \;\text{ для }\; \lambda\text{-м. в. }\; \eta \in \Gamma_0 \right\}$$

з нормою $\|k\|_{C,\,\delta} := \operatorname{ess\,sup}_{\eta\in\Gamma_0} \dfrac{|k(\eta)|}{C^{|\eta|}(|\eta|!)^{\delta}}$. Очевидно, при $C' \geq C$, $\delta' \geq \delta$ має місце включення $\mathcal{K}_{C,\,\delta} \subset \mathcal{K}_{C',\,\delta'}$. При $\delta = 0$ будемо нехтувати цим індексом, тобто $\mathcal{K}_C := \mathcal{K}_{C,0}$.

Твердження 3.2. *Нехай $C_1, C_2 > 0$, $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ і функції $k_i \in \mathcal{K}_{C_i,\,\delta_i}$, $i = 1, 2$. Тоді функція $k := k_1 * k_2$ належить простору $\mathcal{K}_{C,\,\delta}$, де $C = C_1 + C_2$, $\delta = \max\{\delta_1,\, \delta_2\}$. Крім того, виконується нерівність типу Юнга*

$$\|k_1 * k_2\|_{C,\,\delta} \leq \|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2}. \tag{3.4}$$

Якщо $\delta \geq 1$, $C_1 \neq C_2$, то функція $k_1 * k_2$ належить більш вузькому простору $\mathcal{K}_{\bar{C},\,\delta}$, де $\bar{C} = \max\{C_1,\, C_2\}$, до того ж виконується нерівність

$$\|k_1 * k_2\|_{\bar{C},\,\delta} \leq \frac{\bar{C}}{|C_1 - C_2|}\|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2}. \tag{3.5}$$

Якщо $\delta \geq 1$, $C_1 = C_2$, то функція $k_1 * k_2$ належить простору $\mathcal{K}_{C',\,\delta}$ для довільного $C' > C_1$, причому

$$\|k_1 * k_2\|_{C',\,\delta} \leq \frac{C'}{eC_1 \ln \dfrac{C'}{C_1}}\|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2}. \tag{3.6}$$

Якщо $k_1 \in \mathcal{K}_{C_1,\delta_1}$, $C_1 > 1$, $\delta_1 \geq 1$ і $k_2 \in L^\infty(\Gamma_0) := L^\infty(\Gamma_0, d\lambda)$, то $k_1 * k_2 \in \mathcal{K}_{C_1,\delta_1}$, до того ж

$$\|k_1 * k_2\|_{C_1,\,\delta_1} \leq \frac{C_1}{C_1 - 1}\|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{L^\infty(\Gamma_0)}. \tag{3.7}$$

Якщо $k_1, k_2 \in L^\infty(\Gamma_0)$, то $k_1 * k_2 \in \mathcal{K}_{C,0}$ для всіх $C \geq 2$ і $k_1 * k_2 \in \mathcal{K}_{C,\delta}$ для всіх $\delta > 0$, $C > 0$, зокрема,

$$\|k_1 * k_2\|_{C,0} \leq \|k_1\|_{L^\infty(\Gamma_0)}\|k_2\|_{L^\infty(\Gamma_0)}, \quad C \geq 2. \tag{3.8}$$

Доведення. Для λ-м. в. $\eta \in \Gamma_0$ маємо

$$C^{-|\eta|}(|\eta|!)^{-\delta}|k(\eta)| \leq C^{-|\eta|}(|\eta|!)^{-\delta}\sum_{\xi\subset\eta}|k_1(\xi)||k_2(\eta\setminus\xi)| =$$

$$= C^{-|\eta|}(|\eta|!)^{-\delta}\sum_{\xi\subset\eta} C_1^{|\xi|}(|\xi|!)^{\delta_1}\frac{|k_1(\xi)|}{C_1^{|\xi|}(|\xi|!)^{\delta_1}}\frac{|k_2(\xi)|}{C_2^{|\eta\setminus\xi|}(|\eta\setminus\xi|!)^{\delta_2}}C_2^{|\eta\setminus\xi|}(|\eta\setminus\xi|!)^{\delta_2} \leq$$

$$\leq \|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2}C^{-|\eta|}\sum_{k=0}^{|\eta|}\frac{|\eta|!}{k!(|\eta|-k)!}\frac{C_1^k(k!)^{\delta_1}}{(|\eta|!)^{\delta}}C_2^{|\eta|-k}((|\eta|-k)!)^{\delta_2} \leq$$

$$\leq \|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2}C^{-|\eta|}\sum_{k=0}^{|\eta|}\left(\frac{|\eta|!}{k!(|\eta|-k)!}\right)^{1-\delta}C_1^kC_2^{|\eta|-k} \leq$$

$$\leq \|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2} C^{-|\eta|}\sum_{k=0}^{|\eta|}\frac{|\eta|!}{k!(|\eta|-k)!}C_1^k C_2^{|\eta|-k} =$$

$$= \|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2}, \tag{3.9}$$

що доводить перше твердження.

У випадку, якщо $\delta \geq 1$, з (3.9) маємо

$$\bar{C}^{-|\eta|}(|\eta|!)^{-\delta}|k(\eta)| \leq \|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2} C^{-|\eta|}\sum_{k=0}^{|\eta|} C_1^k C_2^{|\eta|-k} =$$

$$= \|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2}\bar{C}^{-|\eta|}\frac{C_1^{|\eta|+1}-C_2^{|\eta|+1}}{C_1-C_2}.$$

Нехай, для визначеності, $\bar{C} = \max\{C_1, C_2\} = C_1$. Тоді

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\eta\in\Gamma_0} C^{-|\eta|}\frac{C_1^{|\eta|+1}-C_2^{|\eta|+1}}{C_1-C_2} = \operatorname*{ess\,sup}_{\eta\in\Gamma_0}\frac{C_1-\left(\dfrac{C_2}{C_1}\right)^{|\eta|}C_2}{C_1-C_2} = \frac{C_1}{C_1-C_2},$$

що доводить друге твердження.

Якщо ж $C_1 = C_2$, то

$$(C')^{-|\eta|}(|\eta|!)^{-\delta}|k(\eta)| \leq \|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2}(C')^{-|\eta|}\sum_{k=0}^{|\eta|} C_1^{|\eta|} =$$

$$= \|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2}\left(\frac{C_1}{C'}\right)^{|\eta|}|(\eta|+1),$$

і результат випливає з властивості елементарної функції

$$\max_{x\geq 1}(x+1)a^x = -\frac{1}{ae\ln a}, \quad a\in(0;1).$$

Нехай тепер $k_2 \in L^\infty(\Gamma_0)$. Тоді

$$C_1^{-|\eta|}(|\eta|!)^{-\delta_1}\sum_{\xi\subset\eta}|k_1(\xi)||k_2(\eta\setminus\xi)| \leq \|k_2\|_{L^\infty(\Gamma_0)}\|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}C_1^{-|\eta|}(|\eta|!)^{-\delta_1}\sum_{\xi\subset\eta}C_1^{|\xi|}(|\xi|!)^{\delta_1} =$$

$$= \|k_2\|_{L^\infty(\Gamma_0)}\|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}C_1^{-|\eta|}(|\eta|!)^{-\delta_1}\sum_{k=0}^{|\eta|}\frac{|\eta|!}{k!(|\eta|-k)!}C_1^k(k!)^{\delta_1} \leq$$

$$\leq \|k_2\|_{L^\infty(\Gamma_0)}\|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}C_1^{-|\eta|}\sum_{k=0}^{|\eta|}C_1^k = \|k_2\|_{L^\infty(\Gamma_0)}\|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\frac{C_1-C_1^{-|\eta|}}{C_1-1},$$

і при $C_1 > 1$ маємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\eta\in\Gamma_0} \frac{C_1 - C_1^{-|\eta|}}{C_1 - 1} = \frac{C_1}{C_1 - 1},$$

що доводить (3.7).

Останнє твердження випливає з рівностей $\sum_{\xi\subset\eta} 1 = 2^{|\eta|}$ і $\operatorname{ess\,sup}_{\eta\in\Gamma_0} \left(\frac{2}{C}\right)^{|\eta|} = 1$ при $C \geq 2$.

Твердження 3.2 доведено.

***Наслідок* 3.1.** *Нехай* $k \in \mathcal{K}_{C,\delta}$, $C > 0$, $\delta \geq 0$. *Тоді при* $\delta \in [0;1)$ $\quad k^{*n} \in \mathcal{K}_{nC,\delta}$, $n \in \mathbb{N}$, *і* $\|k^{*n}\|_{nC,\delta} \leq \|k\|^n_{C,\delta}$. *Якщо* $\delta \geq 1$, *то для довільного* $C' > C$ $\quad k^{*n} \in \mathcal{K}_{C',\delta}$, $n \geq 2$, *до того ж*

$$\|k^{*n}\|_{C',\delta} \leq \left(\frac{C'}{C' - C}\right)^{n-2} \frac{C'}{eC \ln \dfrac{C'}{C}} \|k\|^n_{C,\delta}, \quad n \geq 2.$$

Якщо ж $k \in L^\infty(\Gamma_0)$, *то* $k^{*n} \in \mathcal{K}_{C,0}$ *для всіх* $C \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, *причому*

$$\|k^{*n}\|_{C,0} \leq \left(\frac{C}{C-1}\right)^{n-2} \|k\|^n_{L^\infty(\Gamma_0)}, \quad n \geq 2.$$

Подальші результати цього пункту є, в певному сенсі, „фольклорними”. Вони або наводяться в літературі без доведень, як у [19], або випливають з не повністю обґрунтованих загальних конструкцій, як у [20 – 22]. Тому, для зручності читача, всі ці результати наведено з повними доведеннями.

Для довільного $c \in \mathbb{R}$ розглянемо множину $\mathcal{I}_c$ вимірних функцій на Γ_0 таких, що $u(\varnothing) = c$. Зауважимо, що оскільки $(u_1 * u_2)(\varnothing) = u_1(\varnothing)u_2(\varnothing)$, то множина $\mathcal{I}_0$ є ідеалом в алгебрі $L^0(\Gamma_0)$ з добутком $*$. Одиницею цієї алгебри є функція

$$u^{*0}(\eta) := 1^*(\eta) := 0^{|\eta|}.$$

Для довільної $u \in L^0(\Gamma_0)$ і $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$u^{*n}(\eta) = (\underbrace{u * \ldots * u}_{n})(\eta) = \sum_{\eta_1 \sqcup \ldots \sqcup \eta_n = \eta} u(\eta_1) \ldots u(\eta_n), \quad \eta \in \Gamma_0,$$

звідки для $u \in \mathcal{I}_0$ отримуємо

$$u^{*n}(\eta) = 0, \quad n > |\eta|.$$

Отже, для довільної гладкої функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка розкладається в ряд у деякій області $D \subset \mathbb{R}$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad t \in D,$$

можна визначити для довільної $u \in \mathcal{I}_0$ такої, що $u(\Gamma_0) \subset D$, наступну функцію на Γ_0:

$$(f^* u)(\eta) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^{*n}(\eta), \qquad \eta \in \Gamma_0. \tag{3.10}$$

Дійсно, для всіх $\eta \in \Gamma_0$ права частина (3.10) є скінченною. Зазначимо, що $(f^* u)(\varnothing) = a_0$.

Зокрема, для $f(t)=e^t$ можна розглянути для всіх $u\in\mathcal{I}_0$

$$\exp^* u(\eta) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}u^{*n}(\eta) = 1^*(\eta) + \sum_{\bigsqcup_i \eta_i=\eta}\prod_i u(\eta_i), \tag{3.11}$$

де підсумовування проводиться по всіх розбиттях конфігурації η на непорожні підмножини. Зрозуміло, що $k:=\exp^* u\in\mathcal{I}_1$. Будемо казати, що функція u є кумулянтом функції k.

Для довільної $k\in\mathcal{I}_1$ можна розглянути функцію $\bar{k}=k-1^*\in\mathcal{I}_0$. Тоді якщо функція f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ допускає розклад

$$f(1+t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n, \quad t\in D\subset\mathbb{R},$$

то ми можемо визначити

$$(f^*k)(\eta):=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\bar{k}^{*n}(\eta), \qquad \eta\in\Gamma_0.$$

Знову зауважимо, що для кожного $\eta\in\Gamma_0$ ряд перетворюється на скінченну суму.

Наведемо два приклади таких функцій.

Твердження 3.3. *Нехай $k\in\mathcal{I}_1$, тоді існує функція*

$$k^{*\,-1}(\eta):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\bar{k}^{*n}(\eta), \quad \eta\in\Gamma_0, \tag{3.12}$$

така, що $k^{*\,-1}\in\mathcal{I}_1$ і

$$k*k^{*\,-1}=1^*.$$

Доведення. Включення $k^{*\,-1}\in\mathcal{I}_1$ випливає безпосередньо з (3.12). Далі,

$$\left(k*k^{*\,-1}\right)(\eta)=\sum_{\xi\sqcup\zeta=\eta}k(\xi)\,k^{*\,-1}(\zeta)=\sum_{\xi\sqcup\zeta=\eta}k(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\bar{k}^{*\,n}(\zeta)=$$

$$=\sum_{\xi\sqcup\zeta=\eta}1^*(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\bar{k}^{*\,n}(\zeta)+\sum_{\xi\sqcup\zeta=\eta}\bar{k}(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\bar{k}^{*\,n}(\zeta)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\bar{k}^{*\,n}(\eta)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{\xi\sqcup\zeta=\eta}\bar{k}(\xi)\,\bar{k}^{*\,n}(\zeta)=$$

$$=k^{*\,-1}(\eta)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\bar{k}^{*\,(n+1)}(\eta)=$$

$$=k^{*\,-1}(\eta)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\bar{k}^{*\,n}(\eta)=k^{*\,-1}(\eta)-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\bar{k}^{*\,n}(\eta)=$$

$$= k^{*\,-1}(\eta) - \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \, \bar{k}^{*\,m}(\eta) - 1^*(\eta) \right) = 1^*(\eta),$$

що доводить твердження 3.3.

Для того щоб вивчити властивості другої функції, розглянемо для довільного $x \in X$ вимірне відображення

$$(\mathcal{D}_x G)(\eta) := G(\eta \cup x), \quad G \in L^0(\Gamma_0). \tag{3.13}$$

Як легко бачити, це відображення задовольняє „ланцюгове правило”:

$$\mathcal{D}_x(G_1 * G_2) = (\mathcal{D}_x G_1) * G_2 + G_1 * (\mathcal{D}_x G_2), \quad x \in X, \tag{3.14}$$

для довільних $G_1, G_2 \in L^0(\Gamma_0)$. Зазначимо, що $\mathcal{D}_x 1^* = 0$. Отже, з (3.11) випливає, що

$$\mathcal{D}_x \exp^* u = \mathcal{D}_x u * \exp^* u, \quad u \in \mathcal{I}_0. \tag{3.15}$$

Твердження 3.4. *Нехай $k \in \mathcal{I}_1$, тоді існує функція*

$$(\ln^* k)(\eta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \bar{k}^{*n}(\eta), \qquad \eta \in \Gamma_0,$$

така, що $\ln^* k \in \mathcal{I}_0$, до того ж

$$\ln^* \exp^* u = u, \qquad u \in \mathcal{I}_0, \quad \exp^* \ln^* k = k, \quad k \in \mathcal{I}_1.$$

Доведення. Включення $\ln^* k \in \mathcal{I}_0$ є очевидним. Далі, з (3.14) і (3.12) отримуємо, що для всіх $\eta \in \Gamma_0$, $x \in X \setminus \eta$

$$\mathcal{D}_x \ln^* k(\eta) = \mathcal{D}_x k * k^{*\,-1},$$

де враховано, що $\mathcal{D}_x \bar{k} = \mathcal{D}_x k$. Таким чином, використовуючи (3.15), дістаємо

$$\mathcal{D}_x \ln^* \exp^* u = \mathcal{D}_x \exp^* u * (\exp^* u)^{*\,-1} = \mathcal{D}_x u * \exp^* u * (\exp^* u)^{*\,-1} = \mathcal{D}_x u.$$

Але якщо для $u_1, u_2 \in \mathcal{I}_0$

$$\mathcal{D}_x u_1(\eta) = u_1(\eta \cup x) = \mathcal{D}_x u_2(\eta) = u_2(\eta \cup x), \quad \eta \in \Gamma_0, \quad x \in X \setminus \eta,$$

то $u_1 = u_2$. Отже, $\ln^* \exp^* u = u$.

Навпаки, нехай $k \in \mathcal{I}_1$. Покладемо $\exp^* \ln^* k = k_0$, тоді $k_0 \in \mathcal{I}_1$ і з попередніх міркувань маємо

$$\ln^* k_0 = \ln^* \exp^* \ln^* k = \ln^* k. \tag{3.16}$$

Доведемо, що з цього випливає рівність $k = k_0$. Насамперед зауважимо, що для довільних $k_1, k_2 \in \mathcal{I}_1$ виконується $k_1 * k_2 \in \mathcal{I}_1$ і

$$(k_1 * k_2)^{*\,-1} = (k_1)^{*\,-1} * (k_1)^{*\,-1},$$

оскільки $(k_1)^{*\,-1} * (k_1)^{*\,-1} * k_1 * k_2 = 1^* * 1^* = 1^*$. Далі, одержуємо

$$\mathcal{D}_x \ln^*(k_1 * k_2) = (k_1 * k_2)^{*\,-1} * \mathcal{D}_x(k_1 * k_2) =$$

$$= k_1^{*\,-1} * k_2^{*\,-1} * \mathcal{D}_x k_1 * k_2 + k_1^{*\,-1} * k_2^{*\,-1} * k_1 * \mathcal{D}_x k_2 =$$

$$= k_1^{*\,-1} * \mathcal{D}_x k_1 + k_2^{*\,-1} * \mathcal{D}_x k_2 = \mathcal{D}_x \ln^* k_1 + \mathcal{D}_x \ln^* k_2.$$

Таким чином, $\ln^*(k_1 * k_2) = \ln^* k_1 + \ln^* k_2$. Отже,

$$0 = \ln^* 1^* = \ln^*(k_2 * k_2^{*\,-1}) = \ln^* k_2 + \ln^* k_2^{*\,-1}, \quad \ln^* k_2^{*\,-1} = -\ln^* k_2,$$

звідки випливає, що $\ln^*(k_1 * k_2^{*\,-1}) = \ln^* k_1 - \ln^* k_2$, і в результаті з (3.16) дістаємо

$$\ln^*(k * k_0^{*\,-1}) = 0. \tag{3.17}$$

Але ж для довільного $k_3 \in \mathcal{I}_1$ з умови $\ln^* k_3 = 0$ випливає, що

$$0 = \mathcal{D}_x \ln^* k_3 = k_3^{*\,-1} * \mathcal{D}_x k_3,$$

звідки $0 = \mathcal{D}_x k_3(\eta) = k_3(\eta \cup x)$, $k_3 = 1^*$. Тоді з (3.17) отримуємо $k * k_0^{*\,-1} = 1^*$, $k_0 = k$, що доводить твердження 3.4.

4. Оператор множення відносно $*$-згортки. Нехай $a \in \mathcal{K}_{C_a,\delta_a}$ для деяких $C_a > 0$, $\delta_a \geq 0$. Тоді, за твердженням 3.2, для довільного $C > C_a$, $\delta \geq \delta_a$ можна розглянути відображення $A\colon \mathcal{K}_{C-C_a,\delta} \to \mathcal{K}_{C,\delta}$, що задане рівністю

$$(Ak)(\eta) = (a * k)(\eta), \quad \eta \in \Gamma_0. \tag{4.1}$$

Твердження 4.1. *Оператор A з областю визначення $\mathcal{K}_{C-C_a,\delta}$ допускає замикання у банаховому просторі $\mathcal{K}_{C,\delta}$.*

***Зауваження* 4.1.** Як легко бачити, оператор A не є щільно заданим у $\mathcal{K}_{C,\delta}$.

Доведення. Нехай $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_{C-C_a,\delta}$ і $\|k_n\|_{C,\delta} \to 0$, $n \to \infty$. Припустимо, що існує $b \in \mathcal{K}_{C,\delta}$ таке, що $\|a * k_n - b\|_{C,\delta} \to 0$. Тоді за твердженням 3.2 і нерівністю між нормами в $\mathcal{K}_{C,\delta}$ і $\mathcal{K}_{C+C_a,\delta} \supset \mathcal{K}_{C,\delta} \ni b$ маємо

$$\|b\|_{C+C_a,\delta} \leq \|a * k_n\|_{C+C_a,\delta} + \|a * k_n - b\|_{C+C_a,\delta} \leq$$

$$\leq \|a\|_{C_a,\delta_a} \|k_n\|_{C,\delta} + \|a * k_n - b\|_{C,\delta} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Звідси $b = 0$ в $\mathcal{K}_{C+C_a,\delta}$, звідки $b(\eta) = 0$ для λ-м. в. $\eta \in \Gamma_0$, а отже, $b = 0$ і в $\mathcal{K}_{C,\delta}$.

Твердження 4.1 доведено.

Зазначимо, що якщо $a \in L^\infty(\Gamma_0)$, то, як випливає з твердження 3.2, оператор (4.1) визначений на всьому просторі $\mathcal{K}_{C,\delta}$ для довільного $C > 1$, $\delta \geq 1$, а отже, він є обмеженим на цьому просторі.

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} k_t = A k_t, \quad k\big|_{t=0} = k_0. \tag{4.2}$$

Очевидно, що формальним розв'язком цього рівняння буде функція

$$k_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} a^{*n} * k_0 = \exp^*(ta) * k_0. \tag{4.3}$$

Якщо $a \in \mathcal{I}_0$, то $\exp^*(ta)$ визначено поточково (див. (3.11)) і (4.3) задає поточковий розв'язок рівняння (4.2).

Якщо $a \in L^\infty(\Gamma_0)$, то за наслідком 3.1 $a^{*n} \in \mathcal{K}_{C,0}$ для довільного $C \geq 2$, до того ж

$$\|\exp^*(ta)\|_{C,0} \leq 1 + t\|a\|_{L^\infty(\Gamma_0)} + \sum_{n=2} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{C}{C-1}\right)^{n-2} \|a\|^n_{L^\infty(\Gamma_0)} < \exp\left(\frac{Ct}{C-1}\|a\|_{L^\infty(\Gamma_0)}\right),$$

тобто $\exp^*(ta) \in \mathcal{K}_{C,0}$, $C \geq 2$. Тоді розв'язність рівняння (4.2) у просторах $\mathcal{K}_{C,\delta}$, $\delta \geq 0$, безпосередньо випливає з твердження 3.2.

Якщо ж ми розглядаємо розв'язок рівняння (4.2) в більш широких просторах, коли $\delta \geq 1$, то можна допустити, що $a \in \mathcal{K}_{C_a,\delta_a}$, $\delta_a \geq 1$. Тоді за наслідком 3.1 $a^{*n} \in \mathcal{K}_{C,\delta_a}$ для довільного $C > C_a$ і ряд у (4.3) збігається в $\mathcal{K}_{C,\delta_a}$. Далі, знов-таки, за твердженням 3.2 маємо, що якщо, наприклад, $k_0 \in \mathcal{K}_{C_0,\delta_a}$, $C_0 < C$, то $k_t \in \mathcal{K}_{C,\delta_a}$.

Розглянемо банахів простір $\mathcal{L}_{C,\delta} := L^1\left(\Gamma_0, C^{|\eta|}(|\eta|!)^\delta \, d\lambda(\eta)\right)$, $C > 0$, $\delta \geq 0$, з нормою

$$\|G\|_{\mathcal{L}_{C,\delta}} := \int_{\Gamma_0} |G(\eta)| C^{|\eta|} (|\eta|!)^\delta \, d\lambda(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{(n!)^{1-\delta}} \int_{X^n} |G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)| dm(x_1) \ldots dm(x_n).$$

Зрозуміло, що $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0) \subset \mathcal{L}_{C,\delta}$ при всіх $C > 0$, $\delta \geq 0$, причому вкладення є щільним, а також $e_\lambda(f) \in \mathcal{L}_{C,\delta}$ при всіх $C > 0$, $\delta \in [0;1)$, $f \in L^1(X, dm)$.

Простір $\mathcal{K}_{C,\delta}$ є реалізацією топологічно дуального простору до $\mathcal{L}_{C,\delta}$, тобто можна говорити про дуальність між цими просторами, задану спаренням

$$\langle\!\langle G, k \rangle\!\rangle := \int_{\Gamma_0} G(\eta) k(\eta) d\lambda(\eta), \qquad G \in \mathcal{L}_{C,\delta}, \quad k \in \mathcal{K}_{C,\delta}.$$

Нехай оператор A' у просторі $\mathcal{L}_{C,\delta}$ задано виразом

$$(A'G)(\eta) := \int_{\Gamma_0} G(\eta \cup \xi) a(\xi) \, d\lambda(\xi), \quad G \in D(A'),$$

де $D(A')$ складається з усіх $G \in \mathcal{L}_{C,\delta}$ таких, що $A'G \in \mathcal{L}_{C,\delta}$. Зрозуміло, що так заданий оператор з максимальною областю визначення є замкненим. Оскільки за тотожністю (3.3)

$$\int_{\Gamma_0} |A'G(\eta)| C^{|\eta|} (|\eta|!)^\delta \, d\lambda(\eta) \leq \int_{\Gamma_0} \big|G(\eta)\big| (|a| * C^{|\cdot|}(|\cdot|!)^\delta)(\eta) \, d\lambda(\eta),$$

то з твердження 3.2 випливає, що для довільного $a \in \mathcal{K}_{C_a,\delta_a}$, $C_a > 0$, $\delta_a \geq 0$, має місце включення $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0) \subset D(A')$ при $C > 0$, $\delta \geq 0$. Отже, A' є щільно заданим. Більш того, при $\delta_a \leq \delta$ виконується включення $\mathcal{L}_{C+C_a,\delta} \subset D(A')$. Нарешті, якщо $\max\{1, \delta_a\} \leq \delta$, $C_a < C$, то $D(A') = \mathcal{L}_{C,\delta}$, тобто оператор A' є обмеженим в $\mathcal{L}_{C,\delta}$.

З (3.3) маємо, що для довільного $G \in D(A') \subset \mathcal{L}_{C,\delta}$, $C > 0$, $\delta \geq 0$, і довільного $k \in \mathcal{K}_{C,\delta}$ такого, що $Ak \in \mathcal{K}_{C,\delta}$, випливає

$$\langle\!\langle A'G, k\rangle\!\rangle = \langle\!\langle G, Ak\rangle\!\rangle.$$

Оператор A' будемо називати передуальним до A.

Твердження 4.2. *Нехай $a \in \mathcal{K}_{C_a,\delta_a}$, $C_a > 0$, $\delta_a \geq 0$, $C > C_a$, $\delta \geq \max\{\delta_a, 1\}$. Тоді існує $z_0 > 0$ таке, що для всіх $z > z_0$ резольвента оператора A' у просторі $\mathcal{L}_{C,\delta}$ має вигляд*

$$\big(R_z(A')G\big)(\eta) := \big((z1\!\!1 - A')^{-1}G\big)(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int\limits_{\Gamma_0} G(\eta\cup\xi)a^{*n}(\xi)\, d\lambda(\xi). \tag{4.4}$$

Доведення. Покажемо, що права частина (4.4) є рядом Неймана. Дійсно, $(z1\!\!1 - A')^{-1} = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(A')^n}{z^n}$ і, з урахуванням (3.3), $(A')^nG(\eta) = \displaystyle\int_{\Gamma_0} G(\eta\cup\xi)a^{*n}(\xi)\, d\lambda(\xi)$. Оскільки A' є обмеженим оператором в $\mathcal{L}_{C,\delta}$, твердження 4.2. доведено.

***Зауваження* 4.2.** Нехай $a \in \mathcal{I}_0$. Тоді для довільного $z \in \mathbb{R}$ і довільного $k \in L^0(\Gamma_0)$ існує

$$(z1\!\!1 - A)^{-1}k = \frac{1}{z}\Big(1^* - \frac{a}{z}\Big)^{*-1} * k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} a^{*n} * k,$$

причому ряд є визначеним поточково.

Розглянемо три простих, але важливих приклади оператора A, в яких $a \in L^\infty(\Gamma_0)$. Нехай $a(\eta) = 1$, $\eta \in \Gamma_0$. Тоді $Ak = K_0k$, де

$$(K_0k)(\eta) = \sum_{\xi\subset\eta} k(\xi), \quad \eta \in \Gamma_0$$

(сенс позначення K_0 буде зрозумілий з другої частини роботи). Передуальним до K_0 буде так званий оператор Майєра

$$(DG)(\eta) := (K_0'G)(\eta) = \int\limits_{\Gamma_0} G(\eta\cup\xi)\, d\lambda(\xi), \quad \eta \in \Gamma_0.$$

Оскільки $1 = e_\lambda(1)$, то з рівності (3.2) випливає, що в цьому випадку $a^{*n}(\eta) = n^{|\eta|}$, $\eta \in \Gamma_0$, тобто формальний розв'язок еволюційного рівняння (4.2) має вигляд

$$k_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{|\cdot|}t^n}{n!} * k_0,$$

причому ряд є, очевидно, збіжним поточково.

У другому прикладі $a(\eta) = -1$, $\eta \in \Gamma_0$, що визначає обернений оператор

$$(K_0^{-1}k)(\eta) = \sum_{\xi\subset\eta} (-1)^{|\eta\setminus\xi|}k(\xi), \quad \eta \in \Gamma_0,$$

оскільки $(1 * (-1))(\eta) = \sum_{\xi\subset\eta} (-1)^{|\eta\setminus\xi|} = 0^{|\eta|} = 1^*(\eta)$. Передуальним у цьому випадку буде оператор

$$(D^{-1}G)(\eta) := ((K_0^{-1})'G)(\eta) = \int\limits_{\Gamma_0} (-1)^{|\xi|}G(\eta\cup\xi)\, d\lambda(\xi), \quad \eta \in \Gamma_0,$$

розв'язок рівняння (4.2) записується аналогічно, з урахуванням того, що $(-1)^{*n}(\eta) = (-1)^n n^{|\eta|}$, $\eta \in \Gamma_0$.

І, нарешті, нехай $\sigma \colon X \to \mathbb{R}$ — вимірна функція і

$$a(\eta) = \begin{cases} \sigma(x), \eta = \{x\}, \\ 0, |\eta| \neq 1, \end{cases}$$

$\eta \in \Gamma_0$. Тоді

$$(Ak)(\eta) = \sum_{x\in\eta} \sigma(x) k(\eta \setminus x), \quad \eta \in \Gamma_0.$$

З означення згортки випливає (індукцією по n), що $a^{*n}(\eta) = n! 1\!\!1_{\Gamma^{(n)}}(\eta) \prod_{x\in\eta} \sigma(x)$, $\eta \in \Gamma_0$, $n \in \mathbb{N}$. Звідси

$$\exp^*(ta)(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} 1\!\!1_{\Gamma^{(n)}}(\eta) t^n \prod_{x\in\eta} \sigma(x) = e_\lambda(t\sigma, \eta), \quad \eta \in \Gamma_0.$$

Отже, поточковим розв'язком еволюційного рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} k_t(\eta) = \sum_{x\in\eta} \sigma(x) k_t(\eta \setminus x), \quad k\big|_{t=0} = k_0, \quad \eta \in \Gamma_0, \tag{4.5}$$

є функція $k_t = e_\lambda(t\sigma) * k_0$. Зазначимо, що якщо $k_0 = e_\lambda(C) \in \mathcal{K}_{C,0}$, $C > 0$, то з (3.2) маємо $k_t(\eta) = e_\lambda(C + t\sigma, \eta)$, $\eta \in \Gamma_0$. Отже, якщо, наприклад, $\sigma \in L^\infty(X, dm)$, $q = \|\sigma\|_{L^\infty(X)}$, то $k_t \in \mathcal{K}_{C+tq,0}$, $t \geq 0$, тобто для будь-якого $C' > C$ розв'язок (4.5) належить простору $\mathcal{K}_{C',0}$ тільки на скінченному проміжку часу. Проте, як легко бачити, для довільних $C' > 0$, $\delta > 0$, $t \geq 0$ має місце включення $k_t \in \mathcal{K}_{C',\delta}$. Аналогічно можна показати, що якщо $k_0 \in \mathcal{K}_{C,\delta}$, $C > 0$, $\delta > 0$, то $k_t \in \mathcal{K}_{C,\delta+\varepsilon}$ для довільного $\varepsilon > 0$ і для всіх $t \geq 0$.

***Зауваження* 4.3.** Нехай $\delta \in [0; 1)$. В останньому прикладі вдається показати еволюцію $\mathcal{K}_{C,\delta} \ni k_0 \mapsto k_t \in \mathcal{K}_{C,\delta+\varepsilon}$ для довільного $\varepsilon > 0$, лише враховуючи явне зображення для $\exp^*(ta)$. Якщо ж намагатись отримати для загального a оцінку на $\exp^*(ta)$ через ряд, то ми зіткнемося з необхідністю розглядати $\varepsilon \geq 1$. Річ у тім, що якщо ми захочемо вкласти $a^{*n} \in \mathcal{K}_{Cn,\delta}$ у простір $\mathcal{K}_{C,\delta+\varepsilon}$, де ε не залежить від n, то норма a^{*n} в $\mathcal{K}_{C,\delta+\varepsilon}$ буде зростати по n в залежності від ε. На жаль, поки що відома лише оцінка зверху виразом $\|a\|^n_{C,\delta} \exp\left\{\varepsilon n^{1/\varepsilon}\right\}$, звідки випливає достатність умови $\varepsilon \geq 1$ для збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} a^{*n}$ в $\mathcal{K}_{C,\delta+\varepsilon}$. Точна асимптотика оператора вкладення по n та ε наразі невідома.

***Зауваження* 4.4.** Нехай $\mathcal{D}(\Gamma_0)$ — деякий лінійний топологічний простір вимірних функцій на Γ_0, який є неперервно вкладеним у $\mathcal{L}_{C,\delta}$ для деяких $C > 0$, $\delta \geq 0$. Оскільки для довільного $k \in \mathcal{K}_{C,\delta}$ відображення $G \mapsto \int_{\Gamma_0} Gk\, d\lambda$ задає лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{L}_{C,\delta}$, то воно буде задавати лінійний неперервний функціонал і на $\mathcal{D}(\Gamma_0)$. Отже, k можна розглядати як регулярну узагальнену функцію на $\mathcal{D}(\Gamma_0)$. Рівність (3.3) тоді можна розуміти як спосіб визначення згортки регулярних узагальнених функцій (пор., наприклад, з [3, с. 135]). Внаслідок асоціативності $*$-згортки оператор A має наступну властивість: $A(k_1 * k_2) = (Ak_1) * k_2 = k_1 * (Ak_2)$. Цю ж властивість має довільний оператор диференціювання на узагальнених функціях над $(\mathbb{R}^d)^n$, (див., наприклад, [3, с. 137]). Проте оператор A не задовольняє „ланцюгове правило” в алгебрі функцій з $L^0(\Gamma_0)$ з множенням, заданим $*$-згорткою. Оператори, що є диференціюванням відносно $*$-згортки, розглянуто нижче.

5. Додаткові конструкції. ***5.1. Згортка мір на*** $\mathbf{\Gamma_0}$**.** У подальшому нам будуть потрібні простори конфігурацій двох різних типів, які ми позначимо «+» та «–». А саме, для довільних $Y^\pm \in \mathcal{B}(X)$, $n^\pm \in \mathbb{N}$ розглянемо $\Gamma_{0,Y^\pm}^{\pm,(n^\pm)} := \Gamma_{0,Y^\pm}^{(n^\pm)}$, $\Gamma_{0,Y^\pm}^{\pm} := \Gamma_{0,Y^\pm}$, $\Gamma_0^\pm := \Gamma_0$ та покладемо $\Gamma_{0,Y^+,Y^-}^{2,(n^+,n^-)} := \Gamma_{0,Y^+}^{+,(n^+)} \times \Gamma_{0,Y^-}^{-,(n^-)}$, $\Gamma_{0,Y^+,Y^-}^{2} := \Gamma_{0,Y^+}^{+} \times \Gamma_{0,Y^-}^{-}$, $\Gamma_0^2 := \Gamma_0^+ \times \Gamma_0^-$. У випадку, коли $Y^+ = Y^- = Y \in \mathcal{B}(X)$, $n^+ = n^- = n \in \mathbb{N}$, будемо писати $\Gamma_{0,Y}^{2,(n)} = \Gamma_{0,Y}^{+,(n)} \times \Gamma_{0,Y}^{-,(n)}$, $\Gamma_{0,Y}^2 = \Gamma_{0,Y}^+ \times \Gamma_{0,Y}^-$. На всіх цих просторах можна ввести продакт-топологію, і ці топології будуть узгоджені з розкладами типу $\Gamma_{0,Y}^2 = \bigsqcup_{n^+,n^-\in\mathbb{N}_0} \Gamma_{0,Y}^{+,(n^+)} \times \Gamma_{0,Y}^{-,(n^-)}$. Очевидно, що відповідні борелівські σ-алгебри будуть мінімальними σ-алгебрами, що породжені декартовими добутками борелівських множин із просторів конфігурацій одного типу. Як і раніше, якщо $Y = \Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$, будемо нехтувати 0 у нижньому індексі.

Визначимо тепер ще деякі поняття, аналогічні до розглянутих вище на просторах конфігурацій одного типу. Функція $G\colon \Gamma_0^2 \to \mathbb{R}$ має локальний носій, якщо існує $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ таке, що $G \restriction_{\Gamma_0^2 \setminus (\Gamma_\Lambda^+ \times \Gamma_\Lambda^-)} = 0$. Клас усіх вимірних функцій на Γ_0^2 із локальним носієм позначимо $L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0^2)$. Множина $B \in \mathcal{B}(\Gamma_0^2)$ називається обмеженою, якщо існують $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ та $N \in \mathbb{N}$ такі, що $B \subset \left(\bigsqcup_{n=0}^N \Gamma_\Lambda^{+,(n)}\right) \times \left(\bigsqcup_{n=0}^N \Gamma_\Lambda^{-,(n)}\right)$. Клас усіх обмежених множин в $\mathcal{B}(\Gamma_0^2)$ позначимо $\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$. Функція $G\colon \Gamma_0^2 \to \mathbb{R}$ має обмежений носій, якщо існує $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$ така, що $G \restriction_{\Gamma_0^2 \setminus \widetilde{B}} = 0$. Клас усіх обмежених функцій з обмеженим носієм позначимо $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0^2)$. Міра ρ на $\left(\Gamma_0^2, \mathcal{B}(\Gamma_0^2)\right)$ називається локально скінченною, якщо $\rho(B) < \infty$ для всіх $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$. Клас усіх таких мір позначимо $\mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0^2)$.

Для вимірної функції $G\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ розглянемо вимірну функцію $\widetilde{G}\colon \Gamma_0^2 \to \mathbb{R}$, визначену рівністю

$$\widetilde{G}(\eta^+, \eta^-) = G(\eta^+ \cup \eta^-), \quad (\eta^+, \eta^-) \in \Gamma_0^2. \tag{5.1}$$

Для $\rho_i \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$, $i = 1, 2$, розглянемо міру $\widehat{\rho}$ на $\left(\Gamma_0^2, \mathcal{B}(\Gamma_0^2)\right)$, визначену рівністю $d\widehat{\rho}(\eta^+, \eta^-) = d\rho_1(\eta^+)\, d\rho_2(\eta^-)$, тобто $\widehat{\rho} = \rho_1 \otimes \rho_2$. Очевидно, що $\widehat{\rho} \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0^2)$.

Означення 5.1. *Нехай* ρ_i, $i = 1, 2$, *— міри на просторі* $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$. *Згорткою цих мір називається міра* ρ *на* $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$ *така, що для довільної вимірної* $G\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}$, *для якої* $\widetilde{G} \in L^1(\Gamma_0^2, d\widehat{\rho})$, *виконується рівність*

$$\int\limits_{\Gamma_0} G(\eta) d\rho(\eta) = \int\limits_{\Gamma_0^2} \widetilde{G}(\eta^+, \eta^-)\, d\widehat{\rho}(\eta^+, \eta^-) = \int\limits_{\Gamma_0^+} \int\limits_{\Gamma_0^-} G(\eta^+ \cup \eta^-)\, d\rho_1(\eta^+)\, d\rho_2(\eta^-). \tag{5.2}$$

Позначення: $\rho = \rho_1 * \rho_2$.

Твердження 5.1. *Нехай* $\rho_{1,2} \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$, $\rho = \rho_1 * \rho_2$. *Тоді* $\rho \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$.

Доведення. Нехай $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$, тобто існують $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ та $N \in \mathbb{N}$ такі, що $B \subset A_N := \bigsqcup_{n=0}^N \Gamma_\Lambda^{(n)}$. Тоді

$$\rho(B) = \int\limits_{\Gamma} 1\!\!1_B(\eta)\, d\rho(\eta) = \int\limits_{\Gamma_0^+}\int\limits_{\Gamma_0^-} 1\!\!1_B(\eta^+ \cup \eta^-)\, d\rho_1(\eta^+)\, d\rho_2(\eta^-) \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Gamma_0^+}\int\limits_{\Gamma_0^-} 1\!\!1_{A_N}(\eta^+ \cup \eta^-)\, d\rho_1(\eta^+)\, d\rho_2(\eta^-) \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Gamma_0^+}\int\limits_{\Gamma_0^-} 1\!\!1_{A_N}(\eta^+) 1\!\!1_{A_N}(\eta^-)\, d\rho_1(\eta^+)\, d\rho_2(\eta^-) = \rho_1(A_N)\rho_2(A_N) < \infty.$$

Твердження 5.1 доведено.

Позначення $*$ для згортки мір збігається з позначенням для $*$-згортки функцій, заданим у (3.1). Це вмотивовано наступним твердженням.

Твердження 5.2. *Нехай* $\rho_i \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$, $i = 1, 2$, *та існують похідні Радона – Нікодима відносно міри Лебега – Пуассона*: $k_i = \dfrac{d\rho_i}{d\lambda}$, $i = 1, 2$. *Тоді згортка мір* $\rho = \rho_1 * \rho_2$ *також має похідну Радона – Нікодима відносно міри Лебега – Пуассона* $k = \dfrac{d\rho}{d\lambda}$ *і при цьому* $k = k_1 * k_2$.

Доведення. Нехай $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$. Тоді, враховуючи умову, з (5.2) отримуємо

$$\int\limits_{\Gamma_0} G(\eta)\, d\rho(\eta) = \int\limits_{\Gamma_0^+}\int\limits_{\Gamma_0^-} G(\eta^+ \cup \eta^-)\, d\rho_1(\eta^+)\, d\rho_2(\eta^-) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_0^+}\int\limits_{\Gamma_0^-} G(\eta^+ \cup \eta^-) k_1(\eta^+) k_2(\eta^-)\, d\lambda(\eta^+) = \int\limits_{\Gamma_0} G(\eta)(k_1 * k_2)(\eta)\, d\lambda(\eta),$$

де ми використали (3.3).

Твердження 5.2 доведено.

5.2. Твірний функціонал. Твірні функціонали, або функціонали Боголюбова, було введено в [1] (більш сучасні результати див., наприклад, у [13]). Властивості твірних функціоналів тісно пов'язані з властивостями ймовірнісних мір на просторах локально скінченних конфігурацій. Тому в першій частині роботи обмежимося вивченням лише деяких окремих властивостей таких функціоналів у термінології просторів скінченних конфігурацій.

Нехай $k \in \mathcal{K}_{C,\delta}$, $C > 0$, $\delta \in [0; 1)$. Тоді функціонал (пор. з [13], формула (9))

$$B_k(f) := \int\limits_{\Gamma_0} e_\lambda(f, \eta) k(\eta)\, d\lambda(\eta), \quad f \in L^1 := L^1, (X, dm),$$

є коректно визначеним, оскільки

$$\big| B_k(f) \big| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{1-\delta}} \left(C \|f\|_{L^1} \right)^n < \infty.$$

З (3.3) та твердження 3.2 маємо, що якщо $k_i \in \mathcal{K}_{C_i,\delta_i}$, $C_i > 0$, $\delta_i \in [0; 1)$, $i = 1, 2$, то $k_1 * k_2 \in \mathcal{K}_{C,\delta}$, де $C = C_1 + C_2$, $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ і

$$B_{k_1 * k_2}(f) = B_{k_1}(f) B_{k_2}(f), \quad f \in L^1.$$

***Зауваження* 5.1.** Цю процедуру можна узагальнити на випадок мір на Γ_0. А саме, нехай $\rho \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$ така, що $e_\lambda(f) \in L^1(\Gamma_0, d\rho)$ для всіх $f \in L^1$. Тоді можна визначити функціонал

$$\tilde{B}_\rho(f) := \int_{\Gamma_0} e_\lambda(f, \eta)\, d\rho(\eta), \quad f \in L^1.$$

З (5.2) отримуємо, що $\tilde{B}_{\rho_1 * \rho_2}(f) = \tilde{B}_{\rho_1}(f)\tilde{B}_{\rho_2}(f)$, $f \in L^1$. Зрозуміло, що якщо існує $k = \dfrac{d\rho}{d\lambda} \geq$ ≥ 0, то $B_k = \tilde{B}_\rho$.

Твердження 5.3. *Нехай $u \in \mathcal{I}_0$ та існують $C, C' > 0$, $\delta, \delta' \in [0; 1)$ такі, що $u \in \mathcal{K}_{C,\delta}$, $\exp^* |u| \in \mathcal{K}_{C',\delta'}$. Тоді $B_k(f) > 0$ для $k = \exp^* u$ і для довільного $f \in L^1$.*

Доведення. Оскільки $u \in \mathcal{K}_{C,\delta}$, то $|B_u(f)| \leq B_{|u|}(|f|) < \infty$. Тоді внаслідок (3.3) дістанемо

$$\int_{\Gamma_0} e_\lambda(|f|)|u|^{*n}\, d\lambda = \left(B_{|u|}(|f|)\right)^n < \infty.$$

Отже,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Gamma_0} e_\lambda(f) u^{*n}\, d\lambda\right| \leq \exp\left(B_{|u|}(|f|)\right) < \infty. \tag{5.3}$$

Покладемо $g_N := \sum_{n=0}^{N} \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{\Gamma_0} e_\lambda(f) u^{*n}\, d\lambda \in \mathbb{R}$. З (5.3) маємо, що $\lim_{N\to\infty} g_N$ існує і є скінченним. Далі, послідовність $U_N := \sum_{n=0}^{N} \dfrac{1}{n!} e_\lambda(f) u^{*n}$ має інтегровну мажоранту $e_\lambda(|f|) \exp^* |u|$ у просторі $L^1(\Gamma_0, d\lambda)$, оскільки $\exp^* |u| \in \mathcal{K}_{C',\delta'}$. Отже, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$B_k(f) = \int_{\Gamma_0} e_\lambda(f, \eta)\, k(\eta)\, d\lambda(\eta) = \int_{\Gamma_0} e_\lambda(f, \eta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{*n} d\lambda(\eta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Gamma_0} e_\lambda(f, \eta)\, u^{*n}(\eta)\, d\lambda(\eta) = \exp\left\{\int_{\Gamma_0} e_\lambda(f, \eta)\, u(\eta)\, d\lambda(\eta)\right\} > 0,$$

що доводить твердження 5.3.

***Зауваження* 5.2.** Для довільного $k \in \mathcal{I}_1$ існує $u \in \mathcal{I}_0$ таке, що $k = \exp^* u$. Таким чином, B_k завжди буде додатним функціоналом, якщо тільки виконуються потрібні оцінки на зростання $|u|$ та $\exp^* |u|$.

5.3. Оператор диференціювання відносно $*$-згортки. Як вже зазначалось, оператор D_x, заданий у (3.13), задовольняє „ланцюгове правило” відносно $*$-згортки (див. (3.14)). Наведемо ще один приклад такого оператора. Нехай $(Nk)(\eta) = |\eta| k(\eta)$, $k \in L^0(\Gamma_0)$, $\eta \in \Gamma_0$, тоді

$$\left(N(k_1 * k_2)\right)(\eta) = |\eta| \sum_{\xi \subset \eta} k_1(\xi) k_2(\eta \setminus \xi) = \sum_{\xi \subset \eta} |\xi| k_1(\xi) k_2(\eta \setminus \xi) + \sum_{\xi \subset \eta} k_1(\xi) |\eta \setminus \xi| k_2(\eta \setminus \xi) =$$

$$= \left((Nk_1) * k_2\right)(\eta) + \left(k_1 * (Nk_2)\right)(\eta)$$

для всіх $k_1, k_2 \in L^0(\Gamma_0)$, $\eta \in \Gamma_0$.

Означення 5.2. *Оператор B на $L^0(\Gamma_0)$ будемо називати оператором диференціювання, якщо $B1^* = 0$ та*

$$(B(k_1 * k_2))(\eta) = ((Bk_1) * k_2)(\eta) + (k_1 * (Bk_2))(\eta) \tag{5.4}$$

для λ-м. в. $\eta \in \Gamma_0$.

Зауважимо, що поки що всі оператори розуміємо визначеними поточково, безвідносно до якихось банахових просторів.

Отже, оператори $\mathcal{D}_x$ та N є операторами диференціювання (рівності $D_x 1^* = N1^* = 0$ випливають з означень цих операторів). Низку інших прикладів операторів диференціювання ми розглянемо у другій частині роботи.

За індукцією маємо $Bu^{*n} = n(Bu) * u^{*(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$, $u \in L^0(\Gamma_0)$. Тоді для довільного $u \in \mathcal{I}_0$ виконується (поточкова) рівність, аналогічна до (3.15):

$$B \exp^* u = B\left(1^* + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{*n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n(Bu) * u^{*(n-1)} = (Bu) * \exp^* u. \tag{5.5}$$

Рівність (5.5) має важливий наслідок. Нехай B є оператором диференціювання і розглядається еволюційне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} k_t = Bk_t, \quad k\big|_{t=0} = k_0.$$

Припустимо, що $k_t(\varnothing) = 1$, $t \geq 0$, тобто $k_t \in \mathcal{I}_1$. Тоді за твердженням 3.4 для довільного $t \geq 0$ існує $u_t \in \mathcal{I}_0$ таке, що $k_t = \exp^* u_t$. Звідси, враховуючи (5.5), отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t} k_t = B \exp^* u_t = (Bu_t) * k_t, \tag{5.6}$$

але, з іншого боку, безпосередньо з (3.11) випливає, що аналогічно до (5.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} k_t = \frac{\partial}{\partial t} \exp^* u_t = \frac{\partial}{\partial t} u_t * \exp^* u_t = \frac{\partial}{\partial t} u_t * k_t. \tag{5.7}$$

Оскільки за припущенням $k_t \in \mathcal{I}_1$, то за твердженням 3.3, існує $k_t^{*-1} \in \mathcal{I}_1$. Тоді, прирівнявши праві частини (5.6) і (5.7) і домноживши (в сенсі $*$-згортки) їх на k_t^{*-1}, дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial t} u_t = Bu_t.$$

Таким чином, рівняння для кумулянтів u_t збігається з рівнянням для функцій k_t.

Твердження 5.4. *Нехай $(B, D(B))$ є оператором в $\mathcal{K}_{C,\delta}$, $C > 0$, $\delta \geq 0$, з максимальною областю визначення. Нехай $(B', D(B'))$ є замкненим щільно заданим оператором у $\mathcal{L}_{C,\delta}$ таким, що $\langle\langle B'G, k \rangle\rangle = \langle\langle G, Bk \rangle\rangle$ для довільних $G \in D(B')$, $k \in D(B)$. Припустимо також, що $G(\cdot \cup \eta) \in D(B')$ для λ-м. в. $\eta \in \Gamma_0$ і для всіх $G \in D(B')$, причому для λ-м. в. $\eta, \xi \in \Gamma_0$ виконується рівність*

$$(B'G)(\eta \cup \xi) = \big((B'G)(\cdot \cup \xi)\big)(\eta) + \big((B'G)(\cdot \cup \eta)\big)(\xi). \tag{5.8}$$

Тоді для довільних $k_1, k_2 \in D(B)$ таких, що $k_1 * k_2 \in D(B)$, $k_1 * (Ak_2), (Ak_1) * k_2 \in \mathcal{K}_{C,\delta}$, виконується рівність (5.4).

Доведення. Для довільних G, k_1, k_2 з умови, внаслідок (3.3) та (5.8), отримуємо

$$\int\limits_{\Gamma_0} G(\eta)\left(B(k_1 * k_2)\right)(\eta)d\lambda(\eta) = \int\limits_{\Gamma_0} (B'G)(\eta)(k_1 * k_2)(\eta)d\lambda(\eta) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_0}\int\limits_{\Gamma_0} (B'G)(\eta\cup\xi)k_1(\eta)k_2(\xi)d\lambda(\eta)d\lambda(\xi) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_0}\int\limits_{\Gamma_0} \big(B'G(\cdot\cup\xi)\big)(\eta)k_1(\eta)k_2(\xi)d\lambda(\eta)d\lambda(\xi)$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_0}\int\limits_{\Gamma_0} \big(B'G(\cdot\cup\eta)\big)(\xi)k_1(\eta)k_2(\xi)d\lambda(\eta)d\lambda(\xi) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_0}\int\limits_{\Gamma_0} G(\eta\cup\xi)(Bk_1)(\eta)k_2(\xi)d\lambda(\eta)d\lambda(\xi) +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_0}\int\limits_{\Gamma_0} G(\eta\cup\xi)k_1(\eta)(Bk_2)(\xi)d\lambda(\eta)d\lambda(\xi) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_0} G(\eta)\left((Bk_1) * k_2\right)(\eta)d\lambda(\eta) + \int\limits_{\Gamma_0} G(\eta)\left(k_1 * (Bk_2)\right)(\eta)d\lambda(\eta),$$

що доводить твердження.

5.4. $\star$***-Згортка функцій на*** $\mathbf{\Gamma_0}$**.** Наступну згортку між функціями на Γ_0 було введено в [12].

Означення 5.3. *Для вимірних функцій G_1 та G_2 на Γ_0 покладемо*

$$(G_1 \star G_2)(\eta) := \sum_{\xi_1\sqcup\xi_2\sqcup\xi_3=\eta} G_1(\xi_1\cup\xi_2)\, G_2(\xi_2\cup\xi_3), \quad \eta\in\Gamma_0, \tag{5.9}$$

де символ $\sqcup$ означає диз'юнктне об'єднання множин.

***Зауваження* 5.3.** Функція $G_1 \star G_2$, визначена через (5.9), також є вимірною. Більш того, класи функції $L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$ та $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ є замкненими відносно операції $\star$ (див. [12], зауваження 3.10, 3.12).

***Зауваження* 5.4.** Рівність (5.9) можна записати у вигляді

$$(G_1 \star G_2)(\eta) := \sum_{\xi_1\cup\xi_2=\eta} G_1(\xi_1)\, G_2(\xi_2). \tag{5.10}$$

В свою чергу, згортку (3.1) можна зареписати у вигляді, аналогічному до (5.10):

$$(G_1 * G_2)(\eta) = \sum_{\xi_1\sqcup\xi_2=\eta} G_1(\xi_1)\, G_2(\xi_2). \tag{5.11}$$

Порівнюючи праві частини (5.11) та (5.11), легко бачити, що сума в означенні $*$-згортки є складовою частиною суми в означенні $\star$-згортки.

Будемо казати, що функція $k \in L^0(\Gamma_0)$ є додатно означеною в сенсі $\star$-згортки, якщо

$$\int\limits_{\Gamma_0} (G \star G)(\eta) k(\eta)\, d\lambda(\eta) \geq 0 \tag{5.12}$$

для всіх $B \in B_{\rm bs}(\Gamma_0)$. З'ясуємо, чи є множина додатно означених у сенсі $\star$-згортки функцій замкненою відносно $*$-згортки.

Введемо спочатку наступну згортку між вимірними функціями G_1 та G_2 на Γ_0^2:

$$(G_1 \circledast G_2)(\eta^+, \eta^-) := \sum_{\substack{\xi_1^+ \sqcup \xi_2^+ \sqcup \xi_3^+ = \eta^+ \\ \xi_1^- \sqcup \xi_2^- \sqcup \xi_3^- = \eta^-}} G_1(\xi_1^+ \cup \xi_2^+, \xi_1^- \cup \xi_2^-)\, G_2(\xi_2^+ \cup \xi_3^+, \xi_2^- \cup \xi_3^-). \tag{5.13}$$

Вимірна функція $k\colon \Gamma_0^2 \to \mathbb{R}$ називається додатно означеною в сенсі $\circledast$-згортки, якщо для довільної $G \in B_{\rm bs}(\Gamma_0^2)$

$$\int\limits_{\Gamma_0^2} (G \circledast G)(\eta^+, \eta^-) k(\eta^+, \eta^-) d\lambda(\eta^+) d\lambda(\eta^-) \geq 0. \tag{5.14}$$

Твердження 5.5. *Нехай функції $k_i\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, є вимірними. Тоді функція $k(\eta) = (k_1 * k_2)(\eta)$ є додатно означеною в сенсі Ленарда $\star$-згортки на Γ_0, якщо лише функція $\widehat{k}(\eta^+, \eta^-) := k_1(\eta^+) k_2(\eta^-)$ є додатно означеною в сенсі $\circledast$-згортки на Γ_0^2.*

Доведення. Нехай $G_i \in B_{\rm bs}(\Gamma_0)$ і функції $\widetilde{G}_i \in B_{\rm bs}(\Gamma_0^2)$, $i = 1, 2$, визначені аналогічно до (5.1). Тоді для $(\eta^+, \eta^-) \in \Gamma_0^2$ таких, що $\eta^+ \cap \eta^- = \varnothing$, маємо

$$(G_1 \star G_2)(\eta^+ \cup \eta^-) = \sum_{\xi_1 \sqcup \xi_2 \sqcup \xi_3 = \eta^+ \cup \eta^-} G_1(\xi_1 \cup \xi_2) G_2(\xi_2 \cup \xi_3) =$$

$$= \sum_{\eta_1^+ \sqcup \eta_2^+ \sqcup \eta_3^+ = \eta^+} \sum_{\eta_1^- \sqcup \eta_2^- \sqcup \eta_3^- = \eta^-} G_1(\eta_1^+ \cup \eta_2^+ \cup \eta_1^- \cup \eta_2^-) G_2(\eta_2^+ \cup \eta_3^+ \cup \eta_2^- \cup \eta_3^-) =$$

$$= (\widetilde{G}_1 \circledast \widetilde{G}_2)(\eta^+, \eta^-). \tag{5.15}$$

Покажемо тепер, що для довільного $z > 0$

$$(\lambda_z \otimes \lambda_z)\Big(\big\{(\eta^+, \eta^-) \in \Gamma_0^2 \bigm| \eta^+ \cap \eta^- \neq \varnothing\big\}\Big) = 0. \tag{5.16}$$

Дійсно, для довільного $\eta^+ \in \Gamma_0^+$ покладемо $A_{\eta^+} := \big\{\eta^- \in \Gamma_0^- \bigm| \eta^+ \cap \eta^- \neq \varnothing\big\}$. Звідси отримуємо оцінку

$$\lambda_z(A_{\eta^+}) \leq \sum_{x \in \eta^+} \lambda_z\Big(\big\{\eta^- \in \Gamma_0^- \bigm| x \in \eta^-\big\}\Big) = 0, \tag{5.17}$$

де використано (2.3). Далі, оскільки

$$(\lambda_z \otimes \lambda_z)\Big(\big\{(\eta^+, \eta^-) \in \Gamma_0^2 \bigm| \eta^+ \cap \eta^- \neq \varnothing\big\}\Big) = \int\limits_{\Gamma_0^+} \lambda_z\left(A_{\eta^+}\right) d\lambda_z(\eta^+),$$

то (5.16) випливає з (5.17).

Тоді для довільної $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ та $\widetilde{G} \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0^2)$, визначеної в (5.1), внаслідок (3.3) маємо

$$\int_{\Gamma_0} (G \star G)(\eta) k(\eta) d\lambda(\eta) = \int_{\Gamma_0} (G \star G)(\eta)(k_1 * k_2)(\eta) d\lambda(\eta) =$$

$$= \int_{\Gamma_0^2} (G \star G)(\eta^+ \cup \eta^-) k_1(\eta^+) k_2(\eta^-) d\lambda(\eta^+) d\lambda(\eta^-) =$$

$$= \int_{\Gamma_0^2} (\widetilde{G} \circledast \widetilde{G})(\eta^+, \eta^-) k_1(\eta^+) k_2(\eta^-) d\lambda(\eta^+) d\lambda(\eta^-), \tag{5.18}$$

де використано (5.15) та (5.16).

З рівності (5.18) безпосередньо випливає, що з додатної означеності функції $\widehat{k} = k_1 \otimes k_2$ в сенсі $\circledast$-згортки випливає додатна означеність функції $k = k_1 * k_2$ в сенсі $\star$-згортки.

Твердження 5.5 доведено.

***Зауваження* 5.5.** Замінивши в (5.12) міру $k\, d\lambda$ на довільну $\rho \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$, можна ввести поняття міри на Γ_0, що є додатно визначеною відносно $\star$-згортки. Тоді твердження 5.5 природним чином можна переформулювати для мір ρ_1, ρ_2, якщо відомо, що $(\rho_1 \otimes \rho_2)\big(\{(\eta^+, \eta^-) \in \in \Gamma_0^2 \mid \eta^+ \cap \eta^- \neq \varnothing\}\big) = 0$.

Автор висловлює щиру вдячність д-ру фіз.-мат. наук проф. Ю. Г. Кондратьєву за корисні обговорення та цінні поради.

1. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. – М.; Л.: Гостехиздат, 1946.
2. *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Представления группы диффеоморфизмов // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, № 6(186). – С. 3 – 50.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1959.
4. *Гиббс Д. В.* Основные принципы статистической механики // Регулярная и хаотическая динамика. – 2002.
5. *Добрушин Р., Синай Я., Сухов Ю.* Динамические системы статистической механики // Динамические системы-2. Итоги науки и техники Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. – М.: ВИНИТИ, 1985. – С. 235–284.
6. *Неравновесные* явления. Уравнение Больцмана / Под ред. Д. Л. Либовица, Е. У. Монтролла. – М.: Мир, 1986.
7. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. – М.: Мир, 1978.
8. *Albeverio S., Kondratiev Y., Röckner M.* Analysis and geometry on configuration spaces // J. Funct. Anal. – 1998. – **154**, № 2. – P. 444 – 500.
9. *Albeverio S., Kondratiev Y., Röckner M.* Analysis and geometry on configuration spaces: the Gibbsian case // J. Funct. Anal. – 1998. – **157**, № 1. – P. 242 – 291.
10. *De Masi A., Presutti E.* Mathematical methods for hydrodynamic limits // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1991. – **1501**. – x + 196 p.
11. *Kipnis C., Landim C.* Scaling limits of interacting particle systems // Grundlehren Math. Wiss. [Fund. Principles Math. Sci.]. – Berlin: Springer, 1999. – **320**. – xvi + 442 p.
12. *Kondratiev Y., Kuna T.* Harmonic analysis on configuration space. I. General theory // Infinite Dimension. Anal., Quantum Probab. and Relat. Top. – 2002. – **5**, № 2. – P. 201 – 233.
13. *Kondratiev Y., Kuna T., Oliveira M. J.* Holomorphic Bogoliubov functionals for interacting particle systems in continuum // J. Funct. Anal. – 2006. – **238**, № 2. – P. 375 – 404.
14. *Kuna T.* Studies in configuration space analysis and applications: Dissertation. – Bonn, 1999. – ii + 187 p.
15. *Liggett T. M.* Interacting particle systems // Grundlehren Math. Wiss. [Fund. Principles Math. Sci.]. – New York: Springer, 1985. – **276**. – xv + 488 p.

16. *Liggett T. M.* Stochastic interacting systems: contact, voter and exclusion processes // Grundlehren Math. Wiss. [Fund. Principles Math. Sci.]. – Berlin: Springer, 1999. – **324**. – xii + 332 p.
17. *Presutti E.* Scaling limits in statistical mechanics and microstructures in continuum mechanics // Theor. and Math. Phys. – Berlin: Springer, 2009. – xvi + 467 p.
18. *Röckner M.* Stochastic analysis on configuration spaces: basic ideas and recent results // New Directions in Dirichlet Forms. – Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1998. – **8**. – P. 157 – 231.
19. *Ruelle D.* Cluster property of the correlation functions of classical gases // Rev. Modern Phys. – 1964. – **36**. – P. 580 – 584.
20. *Shen C. Y.* A functional calculus approach to the Ursell – Mayer functions // J. Math. Phys. – 1972. – **13**. – P. 754 – 759.
21. *Shen C. Y.* On a certain class of transformations in statistical mechanics // J. Math. Phys. – 1973. – **14**. – P. 1202 – 1204.
22. *Shen C. Y., Carter D. S.* Representations of states of infinite systems in statistical mechanics // J. Math. Phys. – 1971. – **12**. – P. 1263 – 1269.

Одержано 09.04.12