УДК 512.7

Б. Р. Зайналов (Самарканд. гос. ун-т, Узбекистан),
А. А. Суслин (ПОМИ РАН, Россия)

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДЛЯ ДЕДЕКИНДОВЫХ КОЛЕЦ АРИФМЕТИЧЕСКОГО ТИПА

We study the problem of stabilization in the higher K-theory of rings and improved stabilization. The triviality of the group of standard cycles is established in the case of arithmetic-type rings. Some applications of the obtained results to the problem of homological stabilization are presented.

Вивчається проблема стабілізації у вищій K-теорії кілець та покращеної стабілізації. Встановлено тривіальність групи стандартних циклів у випадку кілець арифметичного типу. Наведено деякі застосування результатів до проблеми гомологічної стабілізації.

Введение. Проблема стабилизации является одной из классических в алгебраической K-теории. В основе этого направления лежат теоремы Серра [19] о выщеплении свободных прямых слагаемых в проективных модулях, Басса [20] о сокращении, Басса – Вассерштейна [1 – 3] о стабилизации полной линейной группы. Так, теорема Басса – Вассерштейна о стабилизации полной линейной группы утверждает, что если обозначить через $E_n(A)$ подгруппу $GL_n(A)$, порожденную элементарными матрицами, то $E_n(A)$ является нормальным делителем $GL_n(A)$ при $n \geq s.r.A + 1$ и естественный гомоморфизм

$$GL_n(A)/E_n(A) \to GL_{n+1}(A)/E_{n+1}(A)$$

биективен. Кроме того, гомоморфизм

$$GL_{s.r.A}(A) \to GL_{s.r.A+1}(A)/E_{s.r.A+1}(A)$$

сюръективен. Обозначая $s.r.A$ через r, получаем следующую цепочку:

$$GL_r(A) \twoheadrightarrow GL_{r+1}(A)/E_{r+1}(A) \tilde{\to} GL_{r+2}(A)/E_{r+2}(A) \tilde{\to} \ldots .$$

Вопрос об описании ядра эпиморфизма

$$GL_r(A) \twoheadrightarrow GL_{r+1}(A)/E_{r+1}(A)$$

называют проблемой предстабилизации. В рассматриваемой ситуации эта проблема была решена Вассерштейном. Проблема стабилизации для K_2 изучалась в работе Денниса [21], Вассерштейна [4], ван дер Каллена [22], Суслина и Туленбаева [5], Колстера [23] .

После появления высшей K-теории начались попытки доказать теоремы о стабилизации для высших K-функторов. Для постановки подобных проблем надо прежде всего определить нестабильные K-функторы. Наиболее интересными и распространенными нестабильными K-функторами являются функторы Квиллена и Володина. Проблема стабилизации в K-теории Квиллена равносильна проблеме стабилизации для гомологии полных линейных групп. Эта проблема глубоко изучена и в основном решена в работе ван дер Каллена [24]. Полное решение общей проблемы стабилизации в K-теориях Квиллена и Володина получено в работе Суслина [25].

В работе Суслина показано, что наиболее подходящей для постановки и изучения проблемы стабилизации является K-теория Володина. В K-теории Квиллена и в проблеме гомологической стабилизации могут возникать патологии в связи с недостаточностью единиц в базисном кольце. Однако если кольцо имеет очень много единиц, то проблема гомологической стабилизации имеет удовлетворительное решение [6, 7].

Для колец арифметического типа с бесконечной группой единиц имеются достаточные основания ожидать, что стабилизация наступает на один шаг раньше, чем это предсказывает общая теория. Для функтора K_1 этот результат доказан Вассерштейном [9], для функтора K_2 — ван дер Калленом [26] и Колстером [27]. Колстер [27] дал также решение проблемы предстабилизации для K_2.

Данная работа посвящена изучению проблемы стабилизации в высшей K-теории колец и улучшенной стабилизации в случае колец арифметического типа. Основой для решения проблемы стабилизации является изучение некоторых симплициальных множеств, связанных с унимодулярными реперами. Наиболее важными и интересными при этом являются симплициальные множества, введенные ван дер Калленом [24] и Суслиным [25]. Для доказательства теоремы о стабилизации необходимо уметь доказывать достаточно сильную ацикличность симплициального множества унимодулярных реперов. Аналогично, если мы умеем вычислять первую нетривиальную группу гомологий соответствующего симплициального множества, то это дает ответ на проблему предстабилизации [6 – 8, 10]. Как симплициальное множество ван дер Каллена, так и симплициальное множество Суслина технически устроены очень сложно. Для упрощения технической стороны дела мы вводим в рассмотрение симплициальную схему [11 – 14] унимодулярных реперов.

В данной работе полученные результаты применяются к проблеме стабилизации над арифметическими кольцами, которая гласит, что первая нетривиальная группа гомологий симплициальной схемы унимодулярных реперов над дедекиндовыми кольцами порождена стандартными циклами, и в более общей формулировке доказано для колец, не имеющих конечных полей вычетов [10, 15]. Важная теорема, доказанная в п. 1, показывает правильность группы стандартных циклов в случае арифметического типа. Отметим, что хотя мы рассматриваем только нашу схему унимодулярных реперов, доказательство в равной степени применимо и к стандартным циклам симплициальных множеств ван дер Каллена и Суслина. В пп. 2 и 3 даны некоторые применения полученных результатов к проблеме гомологической стабилизации. Здесь полученные результаты, к сожалению, далеки от завершенности, что и не удивительно, так как для дедекиндовых колец арифметического типа в проблеме гомологической стабилизации нет оснований ожидать завершенных решений.

1. Тривиальность $H_0\left(GL_n(A), \tilde{H}_{n-2}(Um(A^n))\right)$ для колец арифметического типа. Пусть F — глобальное поле [16] (гл. 7), S — непустое конечное множество точек поля F, содержащее все бесконечные точки. Через $A = A_s$ будем обозначать подкольцо F, состоящее из элементов x, не имеющих полюсов вне S (т. е. $\vartheta(x) \geq 0$ при $\vartheta \notin S$). Известно, что A — дедекиндово кольцо, поле частных которого совпадает с F. Кольца такого типа называются арифметическими.

Если A — произвольное коммутативное кольцо и I — идеал в A, то через $SL_2(I,I)$, следуя Вассерштейну [4], будем обозначать подгруппу $SL_2(A)$, состоящую из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad b,c \in I, \quad a,d \equiv \bmod I^2 .$$

Обозначим через $E_2(1,1)$ подгруппу $SL_2(I,I)$, порожденную элементарными матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix},$$

где $b, c \in I$. Нам потребуется следующий результат Вассерштейна [4].

Теорема 1.1. *Пусть A — дедекиндово кольцо арифметического типа с бесконечной группой единиц* (*т. е.* $\operatorname{card} S > 1$). *Тогда*:

1) $E_2(A) = SL_2(A)$;

2) *для любого I группа $E_2(I,I)$ нормальна в $SL_2(I,I)$, фактор-группа $SL_2(I,I)/E_2(I,I)$ является конечной циклической группой порядка $r(I)$. Число $r(I)$ зависит только от показателей $\vartheta(I)$ для точек $\vartheta \notin S$, делящих число m корней из единицы в F. В частности,*

$$SL_2(I,I) = E_2(I,I),$$

если I прост с m.

Докажем теперь основной результат этого пункта.

Теорема 1.2. *Если A — дедекиндово кольцо арифметического типа с бесконечной группой единиц, то*

$$H_0\left(GL_n(A), H_{n-2}(Um(A^n))\right) = 0$$

при всех n.

***Замечание* 1.1.** Действие $GL_n(A)$ левыми умножениями на симплициальной схеме $Um(A^n)$ индуцирует действие $GL_n(A)$ на гомологиях этой схемы и, в частности, на $\tilde{H}_{n-2}(Um(A^n))$. Именно это действие подразумевается в формулировке теоремы 1.2.

Доказательство. Утверждение тривиально при $n < 2$. Рассмотрим далее случай $n = 2$. Согласно теореме 1 [15], группа $\tilde{H}_0(Um(A^2))$ порождается стандартными циклами $[\vartheta_0, \vartheta_1]$, где $\vartheta_i \in A^2$ — унимодулярные столбцы. Будем использовать значок $\sim$ для обозначения того, что два цикла переводятся один в другой действием $GL_2(A)$. Найдем $\alpha \in GL_2(A)$ такую, что $\alpha\vartheta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, и запишем $\alpha\vartheta_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Тогда

$$[\vartheta_0, \vartheta_1] \sim \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Циклы последнего типа будем обозначать $\langle a,b\rangle$ (здесь $aA+bA=A$). Приведем некоторые соотношения для этих циклов. Действуя матрицей вида $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, видим, что

$$\langle a,b\rangle\langle a+xb,b\rangle \qquad \text{для любого} \quad x\in A\,. \tag{1.1}$$

Воспользуемся также соотношением

$$\langle a,b\rangle = \begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & a\\ 1 & b\end{bmatrix}.$$

Первый цикл гомологичен нулю, так как $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\in Um(A^2)$.

Следовательно,

$$\langle a,b\rangle = \begin{bmatrix}0 & a\\ 1 & b\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & a\end{bmatrix} = \langle b,a\rangle\,.$$

Итак,

$$\langle a,b\rangle \sim \langle b,a\rangle \qquad \text{и, следовательно,} \qquad \langle a,b\rangle \sim \langle a,b+a\rangle\,. \tag{1.2}$$

Таким образом, цикл $\langle a,b\rangle$ заменяется на эквивалентный, если к (a,b) применить элементарную матрицу. Поскольку $E_2(A)=SL_2(A)$ действует транзитивно на унимодулярных строках, то

$$\langle a,b\rangle \sim \langle 1,1\rangle = 0.$$

Таким образом, в данном случае мы доказали более точное утверждение

$$\tilde{H}_0(Um(A^2)) = 0\,.$$

Перейдем к доказательству теоремы в общем случае. Группа $\tilde{H}_{n-2}(Um(A^n))$ порождается стандартными циклами $[u_1,\ldots,u_n]$, где $u_1,\ldots,\tilde{u}_i,\ldots,u_n$ — унимодулярный репер при любом i. Поскольку группа $GL_n(A)$ транзитивно действует на унимодулярных реперах, в группе

$$H_0\Big(GL_n(A),H_{n-2}(Um(A^n))\Big) = P_n$$

любая образующая $[u_1,\ldots,u_n]$ равна некоторой образующей вида

$$[\,e_1,\ldots,e_{n-1},\,a_1e_1+\ldots+a_ne_n\,]\,.$$

Отметим также, что

$$[\,e_1,\ldots,e_{n-1},\,a_1e_1+\ldots+a_ne_n\,]$$

является стандартным циклом в $Um(A^n)$ в том и только в том случае, когда $a_iA+a_nA=A$ при всех $i=1,\ldots,n-1$. Будем обозначать образующую $[\,e_1,\ldots,e_{n-1},\,a_1e_1+\ldots+a_ne_n\,]$ группы P_n через $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$. Приведем некоторые соотношения для этих образующих. Действуя матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \lambda_1 \\ 0 & 1 & \ldots & \lambda_n \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

непосредственно получаем формулу

$$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle=\langle a_1+\lambda_1a_n,\ldots,a_{n-1}+\lambda_{n-1}a_n,\,a_n\rangle. \qquad (1.3)$$

Предположим, что a_i попарно комаксимальны. Тогда репер $e_1,\ldots,e_{n-1}$, $a_1e_1+\ldots$ $\ldots+a_ne_n$ становится унимодулярным после отбрасывания любых двух векторов, и в $\tilde{H}_{k-2}(Um(A^n))$ имеем формулу

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\,[\,e_1,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_n,\,a_1e_1+\ldots+a_ne_n\,]+(-1)^{n+1}\,[\,e_1,\ldots,e_n\,]\;=\;0\,.$$

Последний цикл является границей в $Um(A^n)$. Приводя все слагаемые к каноническому виду, получаем следующие утверждения:

если a_i попарно комаксимальны, то

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\,\langle a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n,a_i\rangle\;=\;0\,; \qquad (1.4)$$

если a_i попарно комаксимальны, то

$$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\;=\;\langle a_1,\ldots,a_{n-1}a_n+\lambda a_1\ldots a_{n-1}\rangle \qquad (1.5)$$

при любом $\lambda\in A$.

Действительно, используя (1.3) и (1.4), имеем

$$\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n+\lambda a_1\ldots a_{n-1}\rangle\;=$$

$$=\;\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n-1}\,\langle a_1,\ldots,a_{i-1}a_{i+1},\ldots,a_n+\lambda a_1,\ldots,a_{n-1},a\rangle_i\;=$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n-1} \langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, a_i \rangle = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle .$$

Теперь теорема следует из следующего утверждения.

Предложение 1.1. *Используя только соотношения* (1.3) *и* (1.5), *любую образующую* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ *можно преобразовать в* $\langle 1, \ldots, 1 \rangle$.

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 2$ утверждение уже доказано выше. Пусть $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle (a_i A + a_n A = A)$ — некоторая образующая. Обозначим через m порядок группы корней из единицы в F. Поскольку $a_i A + a_n A = A$ при $i = 2, \ldots, n-1$, прибавив к $a_2, \ldots, a_{n-1}$ подходящие кратные a_n, добьемся, чтобы $a_2, \ldots, a_{n-1}$ были комаксимальны между собой, отличны от нуля и взаимно просты с m. Обозначим через I идеал $a_2 \ldots a_{n-1} A$. Согласно теореме 1.1 $SL_2(I, I) = E_2(I, I)$. Прибавив теперь к a_1 подходящее кратное a_n, добьемся, чтобы $a_1 = \operatorname{mod} I^2$. Соотношение (1.3) позволяет умножать строку (a_1, a_n) на матрицу вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, где $\lambda \in I$, а соотношение (1.5) на матрицу вида $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\lambda \in I$. Заметим, что при таких преобразованиях a_1 не меняется по модулю I и, в частности, сохраняется попарно комаксимальность a_i, необходимая для применения (1.5). Таким образом, мы можем умножать (a_1, a_n) на любое произведение матриц указанного вида, т. е. на любую матрицу из $SL_2(I, I) = E_2(I, I)$. Поскольку $a_i A + a_n A = A$, найдутся $b, c \in A$ такие, что $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_n \\ b & c \end{pmatrix} = 1$. Прибавив ко второй строке некоторое кратное первой, можно считать дополнительно, что $b \in I^2$ и, следовательно, $c \equiv 1 \operatorname{mod} I^2$. Положим

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_n \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_n b & a_n(1-c) \\ b & c \end{pmatrix} \in SL_2(I, I).$$

При этом $(1, a_n)\alpha = (a_1, a_n)$ и, значит, $(a_1, a_n)\alpha^{-1} = (1, a_n)$. В силу доказанного ранее $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle 1, a_2, \ldots, a_n \rangle$. Теперь достаточно к $a_2, \ldots, a_n$ применить индукционное предположение.

2. Гомологическая стабилизация над $S(\infty)$-расширениями арифметических колец. Будем называть, следуя [6, 8], коммутативное кольцо A $S(\infty)$-кольцом или кольцом с очень большим числом единиц, если для любого n в A можно найти элементы $a_1, \ldots, a_n$ такие, что сумма любого подсемейства семейства $[a_1, \ldots, a_n\}$ лежит в A^*. Важным свойством таких колец является то, что для них гомологии $GL_n(A)$ совпадают с гомологиями соответствующих аффинных групп [6, 7]

$$\begin{pmatrix} GL_n & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним теперь построение спектральных последовательностей гипергомологий для действия группы на комплекс. Пусть группа G действует (слева) на ограниченном снизу комплексе K_*. Выберем произвольную G-проективную резольвенту P_* тривиального G-модуля Z (например, стандартную резольвенту) и рассмотрим бикомплекс $P_* \otimes_G K_*$ и его две спектральные последовательности. Для первой спектральной последовательности по определению имеем $I^1_{pq} = H_p(P \otimes_G K_q) = H_p(G, K_q)$. Для второй спектральной последовательности

$$II^1_{pq} = H_q(P_p \otimes_G K_*) = P_p \otimes_G H_q(K_*)$$

и

$$II^2_{pq} = H_p(P_* \otimes_G H_q(K_*) = H_p(G, H_q(K_*)).$$

Эти спектральные последовательности имеют общий предел.

Пусть A — дедекиндово $S(\infty)$-кольцо. Рассмотрим комплекс ван дер Каллена $\tilde{K}_*(Um(A^n))$ [15, 22]. Напомним [15], что группа $\tilde{K}_p(Um(A^n))$ является свободной абелевой, порожденной унимодулярными $(p+1)$-реперами $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p, \vartheta_{p+1})$ в A^n и $\tilde{K}_{-1}(Um(A^n)) = Z$. Для удобства размерности сдвинем на единицу, т. е. будем считать, что $K_p = \tilde{K}_{p-1}(Um(A^n))$ — свободная абелева группа, порожденная унимодулярными p-реперами в A^n. Согласно теореме 2 [15], $H_i(K_*) = 0$ при $i \le n-2$, $H_{n-1}(K_*)$ порождается стандартными циклами. Естественное действие $GL_n(A)$ на A^n определяет действие $GL_n(A)$ на комплексе K_*. Рассмотрим соответствующие спектральные последовательности гипергомологий. Действие $GL_n(A)$ на K_q транзитивно переставляет базисные элементы этого модуля (т. е. унимодулярные реперы в A^n). Стабилизатор репера $(e_{n-q+1}, \ldots, e_n)$ совпадает с аффинной группой

$$Aff_{n-q,q} = \begin{pmatrix} GL_{n-q} & 0 \\ * & 1_q \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме Шапиро [16] (гл. 4) получаем

$$I^1_{pq} = H_p(GL_n(A), K_q) = H_p(Aff_{n-q,q}) = H_p(GL_{n-q}(A)).$$

Можно проверить [6], что дифференциал

$$d^1\colon\ I_{pq} \to I_{p,q-1}$$

равен нулю при четном q и совпадает с естественным гомоморфизмом

$$H_p(GL_{n-q}(A)) \to H_p(GL_{n-q+1}(A))$$

при q нечетном. Следовательно,

$$I^2_{pq} = \operatorname{co\,ker}\left(H_p(GL_{n-q-1}(A)) \to H_p(GL_{n-q}(A))\right)$$

при четном q и

$$I^2_{pq} = \ker\left(H_p(GL_{n-q-1}(A)) \to H_p(GL_{n-q+1}(A))\right)$$

при q нечетном. Кроме того, все старшие дифференциалы $d^2, d^3, \ldots$ в этой спектральной последовательности равны нулю и, значит,

$$I^2_{pq} = I^\infty_{pq}.$$

Для второй спектральной последовательности

$$II^2_{pq} = H_p\left(GL_n(A), H_q(K_*)\right) = 0$$

при $q \le n-2$. Из этого видно, что общий предел данных спектральных последовательностей равен нулю в размерностях $\le n-2$, и мы получаем обычную теорему о стабилизации для дедекиндовых колец:

$$H_p(GL_i(A)) \to H_p(GL_{i+1}(A))$$

— эпиморфизм при $i \ge p+1$ и изоморфизм при $i \ge p+2$.

Предположим теперь, что A является прямым пределом арифметических колец. Дословно повторяя аргументы из предыдущего пункта, видим, что

$$H_0(GL_n(A), H_{n-1}(K_*)) = 0.$$

Следовательно, общий предел спектральных последовательностей равен нулю и в размерности $n-1$ и справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть A — дедекиндово $S(\infty)$-кольцо, являющееся целым расширением кольца арифметического типа. Тогда*

$$H_p(GL_i(A)) \to H_p(GL_{i+1}(A))$$

— эпиморфизм при $i \ge p$ и изоморфизм при $i \ge p+1$.

***Замечание* 2.1.** Теорема 2.1 применима, в частности, к координатному кольцу гладкой аффинной кривой, определенной над бесконечным расширением конечного поля. В этом случае теорема доказана в [17].

3. Рациональная гомологическая стабилизация над кольцами арифметического типа.

Теорема 3.1. *Пусть* A *— дедекиндово кольцо арифметического типа, причем существует натуральное число* $r > 1$, *обратимое в* A. *Тогда*

$$H_p(GL_{n-1}(A), Q) \to H_p(GL_n(A), Q)$$

— эпиморфизм при $n \geq p+1$ *и изоморфизм при* $n \geq p+2$.

Доказательство. Обозначим через K'_* пополненный ориентированный комплекс

$$\tilde{W}_*(Um(A^n)) \otimes_Z Q$$

с размерностями, сдвинутыми на единицу. Естественное действие $GL_n(A)$ на A^n левыми умножениями определяет действие $GL_n(A)$ на симплициальной схеме $Um(A^n)$ и, следовательно, на K'_*. Рассмотрим соответствующие спектральные последовательности гипергомологий

$$II^2_{pq} = H_h(GL_n(A), H_q(K'_*) = H_p\left(GL_n(A), \tilde{H}_{q-1}(Um(A^n)) \otimes_Z Q\right).$$

Согласно теореме ацикличности [11],

$$\tilde{H}_{q-1}(Um(A^n)) = 0$$

при $q-1 \leq n-3$, т. е. при $q \leq n-2$. Среди членов полной степени $n-1$ ненулевым может быть только

$$H_0(GL_n(A), H_{n-1}(K'_*) = H_0\left(GL_n(A), \tilde{H}_{n-2}(Um(A^n)) \otimes_Z Q\right).$$

Однако эта группа нулевая согласно замечанию 2.1. Таким образом, общий предел рассматриваемых спектральных последовательностей равен нулю в размерностях $\leq n-1$.

Рассмотрим теперь первую спектральную последовательность

$$I^1_{pq} = H_p(GL_n(A), K'_q).$$

Группа K'_q разлагается в прямую сумму подгрупп, соответствующих неориентированным $(q-1)$-симплексам $Um(A^n)$, каждая из которых изоморфна Q. Действие группы $GL_n(A)$ транзитивно переставляет подгруппы. Стабилизатором слагаемого $Q \cdot (e_{n-q+1}, \ldots, e_n)$ является группа

$$G_q = \begin{pmatrix} GL_{n-q}(A) & 0 \\ * & \sum_q \end{pmatrix},$$

где $\sum_q$ — перестановочная группа на q элементах. При этом действие стабилизатора описывается формулой

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ * & \sigma \end{pmatrix} \cdot (e_{n-q+1}, \ldots, e_n) = \sin g(\sigma) \cdot (e_{n-q+1}, \ldots, e_n).$$

Согласно лемме Шапиро

$$I^1_{pq} = H_p(G_q, Q).$$

Пусть V — некоторый A-модуль. Рассмотрим естественное действие A^* на V и соответствующее диагональное действие A^* на $\Lambda^j_Q(V \otimes_Z Q)$.

Лемма 3.1. *При* $j > 0$ *и всех* i *справедлива формула*

$$H_i\left(A^*, \Lambda^j_Q(V \otimes_Z Q)\right) = 0.$$

Доказательство. Известно [18], что для любого $a \in A^*$ умножение на

$$a\Lambda^j_Q(V \otimes_Z Q) \to \Lambda^j_Q(V \otimes_Z Q)$$

индуцирует тождественное отображение на гомологиях. Применим это замечание к элементу $r \in A^*$. Диагональное действие r на $\Lambda^j_Q(V \otimes_Z Q)$ совпадает с умножением на r^j, и мы заключаем, что рассматриваемые гомологии аннулируются целым числом $r^j - 1$. Поскольку эти гомологии являются векторными Q-пространствами, они равны нулю.

Рассмотрим естественное действие группы $GL_k(A)$ на A-модуле $V = M_{s,k}(A)$ и соответствующее диагональное действие $GL_k(A)$ на $\Lambda^j_Q(V \otimes_Z Q)$.

***Следствие* 3.1.** *Имеет место соотношение*

$$H_i(GL_k(A), \Lambda^j_Q(V \otimes_Z Q)) = 0$$

при $j > 0$.

Доказательство. Утверждение непосредственно получается из рассмотрения спектральной последовательности Хохшильда – Серра [18]

$$H_l\left(GL_k(A)/A^*, H_m(A^*, \Lambda^j_Q(V \otimes_Z Q))\right) \Rightarrow H_{l+m}(A^*, \Lambda^j_Q(V \otimes_Z Q).$$

***Следствие* 3.2.** *Вложение* $GL_{n-q}(A) \to Aff_{n-q,q}$ *индуцирует изоморфизм на гомологиях с рациональными коэффициентами.*

Доказательство. Утверждение следует из спектральной последовательности Хохшильда – Серра

$$H_l\left(GL_{n-q}(A), H_j(M_{q,n-q}(A), Q)\right) \Rightarrow H_{i+j}(Aff_{n-q,q}, Q)$$

$$H_i\left(GL_{n-q}(A), \Lambda^j(M_{q,n-q}(A) \otimes_Z Q)\right).$$

Возвращаясь к доказательству теоремы 3.1, рассмотрим спектральную последовательность Хохшильда – Серра, соответствующую расширению групп

$$1 \to Aff_{n-q,q} \to G_q \to \sum_q \to 1,$$

$$E_{ij}^2 = H_i\left(\sum_q, H_j(Aff_{n-q,q}, Q)\right) \Rightarrow H_{i+j}(G_q, Q).$$

Заметим, что действие $Aff_{n-q,q}$ на Q тривиально и согласно следствию 3.2 имеем

$$H_j(Aff_{n-q,q}, Q) = H_j(GL_{n-q}(A), Q).$$

Действие $\sum_q$ на $GL_{n-q}(A)$ сопряжениями тривиально и, следовательно, действие $\sum_q$ на $H_j(GL_{n-q}(A), Q)$ происходит из действия $\sum_q$ на Q, т. е. задается формулой $\sigma\vartheta =$ $= \operatorname{sign}\sigma\vartheta$.

Лемма 3.2. *Пусть перестановочная группа* $\sum_q$ *действует на векторном* Q*-пространстве* V *по формуле* $\sigma\vartheta = \operatorname{sign}\sigma\vartheta$. *Тогда*

$$H_i\left(\sum_q, V\right) = 0$$

при $i > 0$, *а если* $q \geq 2$, *то и при* $i = 0, 2$.

Доказательство. Группы $H_i\left(\sum_q, V\right)$ являются векторными Q-пространствами, а при $i > 0$ они, кроме того, аннулируются порядком $\sum_q$, т. е. числом $q!$. Таким образом, эти группы равны нулю. При $q \geq 2$ $\sum_q$ содержит нечетные подстановки. Для любой такой подстановки σ

$$\sigma \cdot \vartheta - \vartheta = -2\vartheta.$$

Следовательно,

$$H_0\left(\sum_q, V\right) = V \Big/ \Big\langle (\sigma - 1)\vartheta / \sigma \in \sum_q, \vartheta \in V \Big\rangle = V/2V = 0.$$

Продолжая вычисления, начатые ранее, заключаем, что

$$H_p(G_q, Q) = H_0\left(\sum_q, H_p(GL_{n-q}(A), Q)\right) =$$

$$= \begin{cases} H_p(GL_{n-q}(A), Q), & q = 0, 1, \\ 0, & q > 1. \end{cases}$$

Таким образом, данная спектральная последовательность сосредоточена в двух столбцах $q = 0$, $q = 1$. Легко проверить, что дифференциал

$$\begin{array}{cccc} d^1 : & E^1_{p,1} & \to & E^1_{p,0} \\ & // & & // \\ & H_p(GL_{n-1}(A),Q) & & H_p(GL_n(A),Q) \end{array}$$

совпадает с естественным гомоморфизмом. Следовательно,

$$E^2_{p,1} = \ker\Big(H_p(GL_{n-1}(A),Q) \to H_p(GL_n(A),Q)\Big),$$

$$E^2_{p,0} = \operatorname{co}\ker\Big(H_p(GL_{n-1}(A),Q) \to H_p(GL_n(A),Q)\Big).$$

Как было показано в начале доказательства, предел спектральной последовательности равен нулю в размерности $\leq n-1$. Значит,

$$E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q} = 0$$

при $p+q = n+1$.

Теорема 3.1 доказана.

1. *Басс Х.* Алгебраическая K-теория. – М.: Мир, 1973.
2. *Вассерштейн Л. Н.* K_1-теория и конгруэнцпроблема // Мат. заметки. – 1968. – **5**. – С. 233 – 244.
3. *Вассерштейн Л. Н.* О стабилизации общей линейной группы над кольцами // Мат. сб. – 1969. – **79**, № 3. – С. 405 – 424.
4. *Вассерштейн Л. Н.* Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 2. – С. 17 – 27.
5. *Суслин А. А., Туленбаев М. С.* Теорема о стабилизации для K_2-функтора Милнора // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1971. – **71**. – С. 216 – 250.
6. *Нестеренко Ю. П.* Гомологии аффинных групп для некоторого класса колец // Кольца и матричные группы. – Владикавказ, 1984. – С. 90 – 97.
7. *Суслин А. А.* Гомологии GLn, характеристические классы и K-теория Милнора // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1984. – **165**. – С. 188 – 203.
8. *Нестеренко Ю. П., Суслин А. А.* Гомологии полной линейной группы над локальным кольцом и K-теория Милнора // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1989. – **53**, № 1. – С. 121 – 146.
9. *Вассерштейн Л. Н.* О группе SL_2 над дедекиндовыми кольцами арифметического типа // Мат. сб. – 1972. – **89**, № 2. – С. 313 – 322.
10. *Зайналов Б. Р.* Предацикличность над некоторыми типами колец // Междунар. конф. по алгебре: Сб. тез. – Барнаул, 1991. – С. 42.
11. *Зайналов Б. Р.* Теорема ацикличности для симплициальных схем унимодулярных реперов // Науч.-исслед. вестн. СамГУ. – 2010. – № 5. – С. 6 – 9.
12. *Зайналов Б. Р.* Гомологии симплициальных схем // Вопросы алгебры и теории чисел: Сб. научн. трудов. – Самарканд: СамГУ, 1999. – С. 46 – 54.
13. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. – М.: Мир, 1976.
14. *Зайналов Б. Р.* Гомологии симплициальной схемы унимодулярных реперов в случае дедекиндовых колец. – Самарканд, 1986. – 33 с.
15. *Зайналов Б. Р.* Тривиальность гомологии симплициальных схем унимодулярных реперов над кольцами арифметического типа // Совр. пробл. математики (Мат. респ. науч. конф.). – Карши, 2011. – С. 112 – 114.
16. *Касселс Дж., Фрелих А.* Алгебраическая теория чисел. – М.: Мир, 1969.
17. *Зайналов Б. Р.* Гомологическая стабилизация для кривых над бесконечным расширением конечного поля // XVIII Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. собщ. – Кишинев, 1985. – Ч. 1. – 197 с.

18. *Маклейн С.* Гомология. – М.: Мир, 1966. – 543 с.
19. *Serre J.-P.* Modules projectifs et fibres a fibre vectorielle // Semin. P. Dubreil, Fac. Sci. Paris. – 1957-1958. – **23**, № 1. – P. 23 – 18.
20. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publs math. Inst. hautes étud. sci. – 1964. – № 22. – P. 489 – 544.
21. *Dennis R. K.* Stability for K_2 // Lect. Notes Math. – 1973. – **353**. – P. 85 – 94.
22. *Van der Kellen W.* Injective stability for K_2 // Lect. Notes Math. – 1976. – **551**. – P. 77 – 154.
23. *Kolster M.* Injective stability for K_2 // Lect. Notes Math. – 1982. – **966**. – P. 128 – 169.
24. *Van der Kellen W.* Homology stability for linear groups // Invent. Math. – 1980. – № 3. – P. 269 – 295.
25. *Suslin A. A.* Stability in algebraic K-theory // Lect. Notes Math. – 1982. – **966**. – P. 304 – 334.
26. *Van der Kallen W.* Stability for K_2 of Dedekind rings of arithemic type // Lect. Notes Math. – 1981. – **854**. – P. 217 – 249.
27. *Kolster M.* Improvement of K_2-stabillity under transitive actions of elementary groups // J. Pure and Appl. Algebra. – 1982. – **24**, № 3. – P. 277 – 282.

Получено 19.11.11