УДК 517.5; 519.65

Н. П. Корнейчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

We consider a problem of the best approximation of periodic functions of two variables by a subspace of splines of minimal defect with respect to a uniform net.

Розглядається задача найкращого наближення періодичних функцій двох змінних підпростором сплайнів мінімального дефекту за рівномірною сіткою.

1. В статье [1] предложен новый подход к исследованию задачи о наилучшем приближении периодических функций n переменных, основанный на теореме двойственности и представлении функции n переменных в виде счетной суммы простых функций. Там же введено новое определение модуля непрерывности функции в n-мерном $(n \geq 2)$ пространстве. Пусть $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ — некоторое расстояние в R^n, $B_\rho(\bar{\alpha}, r)$ — шар в R^n с центром в точке $\bar{\alpha}$ радиуса r. Если функция $f(\bar{x})$ суммируема в ограниченном замкнутом множестве $\overline{Q} \subset R^n$, то величину

$$\omega_\rho(f, \delta) = \sup\left\{\left|\int\limits_{B_\rho(\bar{\alpha}, r)\cap\overline{Q}} f(\bar{x})\, d\bar{x}\right| :\ \bar{\alpha} \in \overline{Q}, \quad \operatorname{mes} B_\rho(\bar{\alpha}, r) \leq \delta\right\}$$

называем модулем непрерывности, соответствующим функции $f(\bar{x})$. Если $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, то $H_\rho^\omega = H_\rho^\omega(\overline{Q})$ — класс суммируемых на $\overline{Q}$ функций $f(\bar{x})$, для которых

$$\omega_\rho(f, \delta) \leq \omega(\delta), \quad 0 \leq \delta \leq \operatorname{mes} \overline{Q}.$$

Мы ограничимся здесь двумерным случаем. Через L_p, $1 \leq p \leq \infty$, обозначим пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x, y)$ с обычной нормой, а через $L_p^{r,s}$, $r, s = 1, 2, \ldots$, — множество неопределенных интегралов степени r по x и степени s по y следующего вида: если $f(x, y) \in$ $\in L_p^{r,s}$, то

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{B}_r(x-t)\mathcal{B}_s(y-\tau)\varphi(t, \tau)\, dt\, d\tau, \quad \varphi(t, \tau) \in L_p, \tag{1}$$

где $\mathcal{B}_k(x)$ — функция Бернулли, так что

$$\frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial^r x\, \partial^s y} = \varphi(x, y) =: f^{(r,s)}(x, y).$$

Класс функций $f(x, y)$ вида (1), у которых $\|\varphi\|_p \leq 1$, будем обозначать $W_p^{r,s}$. При $p = 1$ класс функций вида (1), где $\varphi \in H_\rho^\omega$, обозначим через $W^{r,s} H_\rho^\omega$.

Заметим, что все рассматриваемые функции $f(x, y)$ в среднем на периоде равны нулю $(f(x, y) \perp 1)$ как по переменной x при каждом фиксированном y, так и по y при каждом фиксированном x.

Теорема в [1] дает оценку для наилучшего приближения в метрике L_p класса $W^{r,s} H_\rho^\omega$ произвольным конечномерным подпространством F. В силу теоремы двойственности

$$E(W^{r,s}H_\rho^\omega, F)_p := \sup_{f \in W^{r,s}H_\rho^\omega} E(f, F)_p =$$

$$= \sup\{\Phi_\rho^\omega(\psi):\ \psi \in W_{p'}^{r,s}F^\perp\}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{2}$$

где

$$\Phi_\rho^\omega(\psi) = \sup_{f \in H_\rho^\omega} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\,\psi(x,y)\,dx\,dy, \tag{3}$$

а

$$W_p^{r,s}F^\perp = \left\{\psi(x,y):\ \psi \in W_p^{r,s},\ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi^{(r,s)}(x,y)\,h(x,y)\,dx\,dy = 0 \quad \forall h \in F\right\}.$$

В [1] доказано, что для любой функции $\psi \in W_{p'}^{r,s}F^\perp$

$$\Phi_\rho^\omega(\psi) \le \iint_{B_\rho(r)} \Psi^*(\psi; x, y)\, f_\rho^*(x,y)\,dx\,dy, \tag{4}$$

где $\Psi^*(\psi; x, y)$ — симметрично убывающая Σ-перестановка функции $\psi(x,y) \in W_{p'}^{r,s}F^\perp$, а $f_\rho^*(x,y)$ — экстремальная симметрично убывающая перестановка в классе H_ρ^ω.

2. Рассмотрим случай, когда F есть подпространство $S_{r-1,s-1}$ 2π-периодических полиномиальных сплайнов $s(x,y)$ порядка $r-1$ по x и порядка $s-1$ по y, имеющих минимальный дефект по каждой переменной. Породившее это подпространство равномерное разбиение $\Delta_{m,n}$ (m и n — произвольные натуральные числа) квадрата $\{0 \le x, y \le 2\pi\}$

$$x_i = \frac{i\pi}{m}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2m-1; \qquad y_j = \frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n-1, \tag{5}$$

считаем фиксированным. Если $s(x,y) \in S_{r,s}$, то

$$s(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{B}_r(x-t)\,\mathcal{B}_s(y-\tau)\,s_0(t,\tau)\,dt\,d\tau,$$

где $s_0(x,y)$ — сплайн нулевого порядка, т. е. $s_0(x,y) = c_{i,j}$ для

$$(x,y) \in \gamma_{i,j} = \{x_{i-1} < x < x_i;\ y_{j-1} < y < y_j\},$$

$$i = 1, 2, \ldots, 2m; \qquad j = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Подпространство сплайнов $s_0(x,y)$ нулевого порядка будем обозначать S_{00}. Так как по определению

$$\sum_{i=1}^{2m} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{2n} c_{i,j} = 0, \tag{6}$$

то размерность подпространства S_{00} равна $4mn - 2m - 2n$.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений, аналогичных одномерному случаю [2] (§ 5.4).

Лемма 1. *Функция $g(x,y)$ из $L_1^{r,s}$ тогда и только тогда ортогональна подпространству S_{00}, когда*

$$\iint\limits_{\gamma_{i,j}} g(x,y)\,dx\,dy = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2m; \quad j = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{7}$$

Действительно, обозначив левую часть в (7) через $\alpha_{i,j}$, заметим, что по определению

$$\sum_{i=1}^{2m} \alpha_{i,j} = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_{i,j} = 0.$$

Условие $g(x,y) \perp S_{00}$ означает, что для любых чисел $c_{i,j}$, удовлетворяющих (6), будет

$$\sum_{i,j}^{2m,2n} c_{i,j}\,\alpha_{i,j} = 0.$$

В частности, для $c_{i,j} = \alpha_{i,j}$ имеем

$$\sum_{i,j}^{2m,2n} \alpha_{i,j}^2 = 0,$$

т. е. $\alpha_{i,j} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, 2m$; $j = 1, 2, \ldots, 2n$.

Лемма 2. *Пусть* $g(x,y) \in L_1^{r,s}$, $r, s = 1, 2, \ldots$. *Для того чтобы выполнялось условие* $g^{(r,s)} \perp S_{r,s}$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $g(x,y)$ *удовлетворяла условиям* (7).

Доказательство. Если $g(x,y) \in L_1^{r,s}$ и $s(x,y) \in S_{r,s}$, то, интегрируя по частям r раз по переменной x и s раз по переменной y, получаем равенства

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} g^{(r,s)}(x,y)\,s(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} g^{(r,s)}(x,y) \left(\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \mathcal{B}_r(x-t)\,\mathcal{B}_s(y-\tau)\,s_0(t,\tau)\,dt\,d\tau \right) dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \mathcal{B}_r(x-t)\,\mathcal{B}_s(y-\tau)\,g^{(r,s)}(t,\tau)\,dt\,d\tau \right) s_0(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} g(x,y)\,s_0(x,y)\,dx\,dy.$$

Отсюда с учетом леммы 1 следует справедливость утверждения леммы 2.

Введем в рассмотрение класс $W_p^{r,s} S_{r-1,s-1}^{\perp}$ функций $f(x,y) \in W_p^{r,s}$ таких, что $f^{(r,s)}(x,y) \perp S_{r-1,s-1}$, а также, при фиксированном разбиении $\Delta_{m,n}$ (см. (5)), класс $W_p^{r,s}(\Delta_{m,n})$ функций $f(x,y) \in W_p^{r,s}$ таких, что для всех x и y

$$f(x_i, y) = f(x, y_j) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2m; \quad j = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Лемма 3. *Имеет место равенство (в смысле совпадения множеств)*

$$W_p^{r,s}(\Delta_{m,n}) = W_p^{r,s} S_{r-1,s-1}^{\perp}, \quad r, s = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Пусть $g(x,y) \in W_p^{r,s} S_{r-1,s-1}^{\perp}$, тогда смешанная производная

$$g''(x,y) = \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} \tag{8}$$

принадлежит классу $W_p^{r-1,s-1} S_{r-1,s-1}^{\perp}$, и в силу леммы 2

$$\iint\limits_{\gamma_{i,j}} g''(x,y)\,dx\,dy = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2m; \quad j = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{9}$$

Но тогда $g(x_i, y_j) = 0$ для всех i и j, а так как для любых x и y

$$\int_0^{2\pi} g(x,y)\,dx = \int_0^{2\pi} g(x,y)\,dy = 0,$$

то $g(x_i, y) = g(x, y_j) = 0$ для всех i и j, т. е. $g \in W_p^{r,s}(\Delta_{m,n})$.

С другой стороны, пусть $g \in W_p^{r,s}(\Delta_{m,n})$, тогда для смешанной производной (8) выполняются равенства (9), что означает, опять же в силу леммы 2, что $g''(x,y) \in W_p^{r-1,s-1} S_{r-1,s-1}^{\perp}$. А тогда $g \in W_p^{r,s} S_{r-1,s-1}^{\perp}$.

3. Если $p = 1$, $p' = \infty$, то мы сможем, используя результаты одномерного случая, получить для функционала (3) при $F = S_{r-1,s-1}$ оценку через перестановки конкретных стандартных функций.

В силу леммы 3 класс $W_{p'}^{r,s} S_{r-1,s-1}^{\perp}$ совпадает с классом $W_{p'}^{r,s}(\Delta_{m,n})$ функций $\psi(x,y) \in W_{p'}^{r,s}$, которые обращаются в нуль на прямых

$$x_i = \frac{i\pi}{m}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2m; \quad y_j = \frac{j\pi}{n}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Покажем, что в случае $p' = \infty$ в классе $W_\infty^{r,s}(\Delta_{m,n})$ экстремальной функцией является идеальный стандартный сплайн

$$\varphi_{mr,ns}(x,y) = \varphi_{mr}(x)\,\varphi_{ns}(y), \quad r, s = 1, 2, \ldots,$$

где $\varphi_{mr}(x)$ и $\varphi_{ns}(y)$ — одномерные стандартные сплайны, построенные по разбиению

$$x_i' = x_{i,r}' = x_i + [1 - (-1)^r]\frac{\pi}{4m},$$

$$y_j' = y_{j,s}' = y_j + [1 - (-1)^s]\frac{\pi}{4n}$$

(см., например, [2, с. 72, 242]).

Лемма 4. *Если* $f(x,y) \in W_\infty^{r,s}(\Delta_{m,n})$, $r, s = 1, 2, \ldots$, *то для всех* x *и* y

$$|f(x,y)| \le |\varphi_{mr,ns}(x,y)| = |\varphi_{mr}(x)\,\varphi_{ns}(y)|.$$

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что в некоторой точке $(x_0, y_0) \ne (x_i, y_j)$ выполняется неравенство

$$|f(x_0, y_0)| > |\varphi_{mr}(x_0)\,\varphi_{ns}(y_0)|.$$

Выберем число λ следующим образом:

$$\lambda = \frac{|\varphi_{mr}(x_0)\,\varphi_{ns}(x_0)|}{|f(x_0, y_0)|},$$

при этом $0 < \lambda < 1$. Без потери общности можно считать, что

$$\lambda f(x_0, y_0) = \varphi_{mr}(x_0)\varphi_{ns}(y_0) = 0.$$

Рассмотрим разность

$$\delta(x, y) = \varphi_{mr}(x)\varphi_{ns}(y) - \lambda f(x, y),$$

которая на периоде обращается в нуль, кроме точек (x_i, y_j), $i = 1, 2, \dots, 2m$; $j = 1, 2, \dots, 2n$, еще и в точке (x_0, y_0). С другой стороны,

$$\delta^{(r,s)}(x, y) = \varphi_{mr}^{(r)}(x)\varphi_{ns}^{(s)}(y) - \lambda f^{(r,s)}(x, y),$$

и надо учесть, что произведение $\varphi_{mr}^{(r)}(x)\varphi_{ns}^{(s)}(y)$ для всех (x, y), кроме прямых (x_i, y) и (x, y_j), везде равно ± 1, а $\lambda |f^{(r,s)}(x, y)| \le \lambda < 1$, ибо $f \in W_\infty^{r,s}$.

Если теперь зафиксировать, например, $y = y_0$, то функция $\delta(x, y_0)$ по аргументу x имеет на периоде не меньше чем $2n+1$ разделенный нуль, в то время как производная $\delta^{(r,s)}(x, y_0)$ меняет знак на периоде ровно $2n$ раз. Противоречие доказывает лемму 4.

Будем считать, что для функций класса $W_\infty^{r,s} S_{r-1,s-1}^{\perp}$ выполняется условие B из работы [1], обеспечивающее возможность представления функции в виде не более чем счетной суммы простых. Обозначив для краткости

$$G(x, y) = \varphi_{mr}(x)\varphi_{ns}(y), \tag{10}$$

для любой функции $\psi \in W_\infty^{r,s} S_{r-1,s-1}^{\perp}$ в силу леммы 4 и теоремы сравнения для одномерных Σ-перестановок [2] (гл. 7) можем записать (см. (3))

$$\Phi_\rho^\omega(\psi) \le \sup_{f \in H_\rho^\omega} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)\, G(x, y)\, dx\, dy.$$

Функция (10) есть сумма $4mn$ одинаковых стандартных простых функций $\varphi_{i,j}(x, y)$ с основаниями $\gamma_{i,j}$. Σ-перестановка функции $G(x, y)$ запишется в виде

$$\Psi(G; x, y) = 4mn\,\varphi(x, y),$$

где

$$\varphi(x, y) = |\varphi_{mr}(x)\varphi_{ns}(y)|, \quad (x, y) \in \gamma_{11}, \tag{11}$$

есть простая функция с основанием $\gamma_{11} = \left\{0 < x < \frac{\pi}{m},\ 0 < y < \frac{\pi}{n}\right\}$.

Пусть модуль непрерывности $\omega_\rho(f, \delta)$ в классе H_ρ^ω задан расстоянием $\rho(P_1, P_2)$ между точками $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$, а $\varphi_\rho^*(x, y)$ — симметрично убывающая перестановка простой функции (11) по расстоянию ρ. Таким образом, если для любого $z > 0$

$$M(\varphi, z) = \{(x, y):\ (x, y) \in \gamma_{11},\ \varphi \ge z\}$$

и

$$M(\varphi_\rho^*, z) = \{(x, y):\ (x, y) \in B_\rho(r),\ \varphi_\rho^*(x, y) \ge z\},$$

где $B_\rho(r) = B_\rho(\overline{0}, r)$, $\operatorname{mes} B_\rho(r) = \operatorname{mes}\gamma_{11}$, то

$$M(\varphi, z) = M(\varphi_\rho^*, z), \quad z > 0.$$

Тогда (см. (2) и (4)) при условии выпуклости вверх $\omega(\delta)$ будем иметь

$$E(W^{r,s} H_\rho^\omega, S_{r-1,s-1})_1 \le \iint\limits_{B_\rho(r)} \Psi^*(G; x, y)\, f_\rho^*(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= 4mn \iint\limits_{B_\rho(r)} \varphi_\rho^*(x, y)\, f_\rho^*(x, y)\, dx\, dy.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Для любого расстояния* $\rho(P_1, P_2)$, $P_1, P_2 \in R^2$, *и выпуклого вверх модуля непрерывности* $\omega(\delta)$ *имеет место оценка*

$$E(W^{r,s} H_\rho^\omega, S_{r-1,s-1})_1 \le 4mn \iint\limits_{B_\rho(r)} \varphi_\rho^*(x, y)\, f_\rho^*(x, y)\, dx\, dy, \qquad (12)$$

где $\varphi_\rho^*(x, y)$ — *симметрично убывающая перестановка простой функции* (11), $f_\rho^*(x, y)$ — *экстремальная симметрично убывающая перестановка в классе* H_ρ^ω, *а* $\operatorname{mes} B_\rho(r) = \dfrac{\pi^2}{mn}$.

Заметим, что если расстояние $\rho(P_1, P_2)$ выбрать определенным образом, согласованным с разбиением $\Delta_{m,n}$, то в (12) будет знак равенства.

4. В случае, когда $\omega(\delta) = \delta$, $\delta \ge 0$, класс функций H_ρ^ω будем обозначать H_ρ^1. Если $f(x, y) \in H_\rho^1$, то $f_\rho^*(x, y) = 1$ для $(x, y) \in B_\rho(r)$, и в качестве следствия из теоремы 1 получаем такое утверждение.

Теорема 2. *Для любого расстояния* ρ *в* R^2 *справедлива оценка*

$$E(W^{r,s} H_\rho^1, S_{r-1,s-1})_1 \le 4mn \iint\limits_{B_\rho(r)} \varphi_\rho^*(x, y)\, dx\, dy,$$

где $\varphi_\rho^*(x, y)$ — *симметрично убывающая перестановка простой функции* (11), *а* $\operatorname{mes} B_\rho(r) = \dfrac{\pi^2}{mn}$.

1. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем приближении функций n переменных // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1352–1359.
2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Получено 30.09.99