УДК 517.518, 519.213

В. П. Заставный (Донец. нац. ун-т)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ БУМАНА

The functions introduced by Buhmann are studied. The exact exponent of the smoothness of these functions are found and the problem of positiveness of their Hankel transform is considered.

Вивчаються функції, які введені Буманом. Знайдено точний показник гладкості цих функцій та розглянуто питання про додатність їх перетворення Ханкеля.

Введение. Формулировка основных результатов. Символами $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ будем обозначать соответственно множества всех комплексных, вещественных, целых, натуральных и неотрицательных целых чисел. Открытую правую полуплоскость в $\mathbb{C}$ обозначим символом $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathbb{R}ez > 0\}$. Пусть $xy := x_1y_1 + \ldots + x_my_m$ — скалярное произведение элементов $x, y \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, а $\|x\|_2 := \sqrt{xx}$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^m$.

Функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ называется положительно определенной на $\mathbb{R}^m$, если для любых $n \in \mathbb{N}$, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^m$ и $\{c_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0.$$

Положительно определенные функции играют важную роль во многих вопросах анализа и его приложений (см., например, [1 – 3] и приведенную в них библиографию). Для таких функций непрерывность в нуле эквивалентна непрерывности на $\mathbb{R}^m$. Согласно теореме Бохнера – Хинчина функция f является положительно определенной и непрерывной на $\mathbb{R}^m$ тогда и только тогда, когда $f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-iux}\, d\mu(u)$, где μ — неотрицательная, конечная, борелевская мера на $\mathbb{R}^m$.

Для функций f, заданных на $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, преобразование Фурье определяется по формуле

$$F_m(f)(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(u) e^{-iux}\, du, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Если $f \in C(\mathbb{R}^m) \cap L(\mathbb{R}^m)$, то положительная определенность функции f эквивалентна неотрицательности ее преобразования Фурье, т. е. $F_m(f)(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, и в этом случае $F_m(f) \in L(\mathbb{R}^m)$ (см. [4], гл. I, § 1, следствие 1.26). Если $f \in L(\mathbb{R}^m)$ и $F_m(f)(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$, то по теореме Винера линейные комбинации сдвигов функции f плотны в $L(\mathbb{R}^m)$.

В теории аппроксимации и интерполяции функциями вида $\sum_{\xi \in \Xi} \lambda_\xi \varphi(\|x - -\xi\|_2)$, где Ξ — конечная система точек из $\mathbb{R}^m$, а функция $\varphi(\| \cdot \|_2)$ непрерывна в $\mathbb{R}^m$ и имеет компактный носитель, важную роль играют следующие два свойства преобразования Фурье (см., например, [5 – 7]): 1) $F_m(\varphi(\| \cdot \|_2))(u) > 0$ для всех $u \in \mathbb{R}^m$; 2) существуют положительные константы c_i, $\gamma > 0$ такие, что $c_1 \leq \leq F_m\big(\varphi(\| \cdot \|_2)\big)(u)\big(1 + \|u\|_2\big)^\gamma \leq c_2$ для всех $u \in \mathbb{R}^m$. Нас будет интересовать наличие этих свойств у функций $\varphi = \varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}$, которые изучаются в данной работе.

Пусть $\delta, \mu, \nu \in \mathbb{C}_+$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $f_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(s) := (1 - s^\delta)^{\mu-1} s^{\alpha-2\nu+1}$, $s \in (0, 1)$. Рассмотрим следующие четные функции, заданные на $\mathbb{R}$:

$$\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{|x|}^{1} (s^2 - x^2)^{\nu-1} f_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(s)\,ds, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Эти функции с точностью до множителя и параметров совпадают с функциями, которые ввел Buhmann [6]: $\phi_{\delta,\varrho,\lambda,\alpha}(x) \equiv 2\varphi_{2\delta,\varrho+1,\lambda+1,2\alpha+2}(x)$. В частных случаях получаются известные функции: $\mu\delta\varphi_{\delta,\mu,1,\delta}(x) = \left(1 - |x|^{\delta}\right)_+^{\mu}$ и $\varphi_{1,\mu,\nu,2\nu-1}(x) \equiv$ $\equiv h_{\mu,\nu}(x) \equiv \dfrac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{\mu}\psi_{\mu,\nu-1}(x)$, где функции $h_{\mu,\nu}$ ввел В. П. Заставный [7, 8], а функции $\psi_{\mu,\nu-1}$ при $\mu,\nu \in \mathbb{N}$ — Wendland [9]. Если $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, то $h_{r+k,r+1}(x) \equiv B(r+k, 2r+1)A_{r,2k-1}(x)$, где функции $A_{r,2k-1}$ введены Р. М. Тригубом [3, 10 – 16] (более подробно см. работу [8]). Здесь $B(\alpha,\beta) := \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-$ $-t)^{\beta-1}\,dt = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Гладкость функций $A_{r,2k-1}$, $\psi_{\mu,\nu}$ и $h_{\mu,\nu}$ изучали соответственно Р. М. Тригуб, Wendland и В. П. Заставный. При $0 < \delta \leq 1$, $\mu \geq 2$ и некоторых ограничениях на ν и α гладкость функций $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}$ изучал Buhmann. В теореме 1 найден точный показатель гладкости функций $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}$ при любых допустимых параметрах.

Теорема 1. 1. *Пусть* $\delta, \mu, \nu \in \mathbb{C}_+$. *Тогда*:

i) $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(\|\cdot\|_2) \in C(\mathbb{R}^m) \iff \alpha, \mu+\nu-1 \in \mathbb{C}_+$;

ii) $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(\|\cdot\|_2) \in L_\infty(\mathbb{R}^m) \iff \operatorname{Re}\alpha \geq 0,\ \alpha \neq 0,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu-1) \geq 0$;

iii) *если* $s > 0$, *то* $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(\|\cdot\|_2) \in L_s(\mathbb{R}^m) \iff s\alpha+m, s(\mu+\nu-1)+1 \in \mathbb{C}_+$.

2. *Пусть* δ, μ, ν, α, $\mu+\nu-1 \in \mathbb{C}_+$, $r(z) := \max\{k \in \mathbb{Z} : k < \operatorname{Re} z\}$ *и*

$$p := \begin{cases} r(\mu+\nu-1), & \operatorname{Re}(\mu+\nu-1) \leq \operatorname{Re}\alpha, \\ r(\mu+\nu-1), & \operatorname{Re}(\mu+\nu-1) > \operatorname{Re}\alpha,\ \dfrac{\alpha}{2}-\nu+1,\ \dfrac{\delta}{2} \in \mathbb{N}, \\ r(\alpha), & \operatorname{Re}(\mu+\nu-1) > \operatorname{Re}\alpha,\ \dfrac{\alpha}{2}-\nu+1 \notin \mathbb{N}, \\ \min\{r(\alpha+\delta), r(\mu+\nu-1)\}, & \operatorname{Re}(\mu+\nu-1) > \operatorname{Re}\alpha,\ \dfrac{\alpha}{2}-\nu+1 \in \mathbb{N}, \\ & \dfrac{\delta}{2} \notin \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2}$$

Тогда $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}\big(\|\cdot\|_2\big) \in C^p(\mathbb{R}^m)$, $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}\big(\|\cdot\|_2\big) \notin C^{p+1}(\mathbb{R}^m)$, $\varphi^{(p+1)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in L(\mathbb{R})$.

Теорема 2. 1. *Пусть* δ, μ, $\nu \in \mathbb{C}_+$ *и* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Тогда* $\varphi_{\delta,\mu,\nu+1,\alpha+2}(t) =$ $= 2\nu\displaystyle\int_{|t|}^{+\infty} u\,\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(u)\,du$, $t \neq 0$.

2. *Пусть* δ, μ, ν, $\alpha \in \mathbb{C}_+$ *и при некотором* $k \in \mathbb{N}$ *выполняются условия*: $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^{2k}(\mathbb{R})$ *и* $\nu-k, \alpha-2k \in \mathbb{C}_+$. *Тогда*

$$\int_0^1 (1-u^2)^{k-1}\varphi^{(2k)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(ux)\,du =$$

$$= \frac{(-1)^k 2^{2k-1}\Gamma(k)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-k)}\varphi_{\delta,\mu,\nu-k,\alpha-2k}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Теорема 2 для функций $h_{\mu,\nu}$ ранее получена в [8].

Для функций h, заданных на $(0,+\infty)$, при $m\in\mathbb{C}$ и $t>0$ определим преобразование Ханкеля[1]

$$\mathfrak{F}_m(h)(t):=t^{1-\frac{m}{2}}\int\limits_0^{+\infty}h(u)u^{\frac{m}{2}}J_{\frac{m}{2}-1}(tu)\,du=\int\limits_0^{+\infty}h(u)u^{m-1}j_{\frac{m}{2}-1}(tu)\,du, \tag{4}$$

где J_λ — функция Бесселя первого рода (см. [17], § 3.1), а

$$j_\lambda(x):=\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}=\frac{1}{2^\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\lambda+1)}\frac{\left(-\dfrac{x^2}{4}\right)^k}{k!},\qquad x\in\mathbb{C},\quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{5}$$

***Замечание* 1.** Из (5) следует, что при любом $\lambda\in\mathbb{C}$ функция j_λ является целой функцией экспоненциального типа $\sigma=1$. Для функций Бесселя при любом $\lambda\in\mathbb{C}$ известна следующая асимптотика [17] (§ 7.21): $J_\lambda(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\Bigg(\cos\Bigg(x-$ $-\dfrac{(2\lambda+1)\pi}{4}\Bigg)+O\Bigg(\dfrac{1}{x}\Bigg)\Bigg)$, $x\to+\infty$. Отсюда непосредственно следует, что преобразование $\mathfrak{F}_m(h)(t)$, $m\in\mathbb{C}$, определено при всех $t>0$, если, например, $h\in L\left((0,1),u^{m_0-1}du\right)\cap L\left((1,+\infty),u^{\frac{m_0-1}{2}}du\right)$, где $m_0:=\operatorname{Re}m$.

***Замечание* 2.** Если (см., например, [4]) $f,F_m(f)\in L(\mathbb{R}^m)$, то $F_m(F_m(f))(-x)=(2\pi)^m f(x)$ для почти всех $x\in\mathbb{R}^m$ (формула обращения). Преобразование Фурье определено и для функций $f\in L_2(\mathbb{R}^m)$. В этом случае $F_m(f)\in L_2(\mathbb{R}^m)$ и имеет место та же формула обращения. Если $f,g\in L(\mathbb{R}^m)$ или $f,g\in L_2(\mathbb{R}^m)$, то имеет место формула умножения

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}F_m(f)(x)\cdot g(x)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^m}f(x)\cdot F_m(g)(x)\,dx. \tag{6}$$

***Замечание* 3.** При $m\in\mathbb{N}$ преобразование $\mathfrak{F}_m$ связано с преобразованием Фурье радиальных функций [4] (гл. IV, § 3):

$$F_m(h(\|\cdot\|_2))(x)=(2\pi)^{\frac{m}{2}}\mathfrak{F}_m(h)(\|x\|_2),\quad x\in\mathbb{R}^m. \tag{7}$$

Из этого равенства и формулы обращения для преобразования Фурье сразу получаем формулу обращения для преобразования $\mathfrak{F}_m$, $m\in\mathbb{N}$:

$$\mathfrak{F}_m(\mathfrak{F}_m(h))(t)=h(t)\quad\text{при почти всех}\quad t>0, \tag{8}$$

где функция h удовлетворяет одному из двух условий: 1) $h,\mathfrak{F}_m(h)\in L\Big((0,+\infty),$ $t^{m-1}dt\Big)$ или 2) $h\in L_2\left((0,+\infty),t^{m-1}dt\right)$.

L_2-теория преобразования Ханкеля $\mathfrak{F}_m$ при любом $m>0$ изложена в [18, 19]. Условия, при которых равенство (8) справедливо при конкретном значении $t>0$, сформулированы в следующей теореме Ханкеля (см., например, [17] или [19]): *Пусть* $m\geq1$ *и* $h\in L\left((0,+\infty),t^{\frac{m-1}{2}}dt\right)$. *Тогда* $\mathfrak{F}_m(\mathfrak{F}_m(h))(t)=\dfrac{1}{2}(h(t+0)+$ $+h(t-0))$ *в любой точке* $t>0$, *в окрестности которой* h *имеет ограниченное изменение.*

[1] Мы используем для него нестандартное обозначение.

При δ, μ, $\alpha+1\in\mathbb{C}_+$ и $\nu\in\mathbb{C}$ положим

$$I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t):=t^{-\alpha-1-\delta(\mu-1)}\int\limits_0^t(t^\delta-u^\delta)^{\mu-1}u^{\alpha-\nu+\frac12}J_{\nu-\frac12}(u)\,du=$$

$$=t^{\frac12-\nu}\int\limits_0^1(1-x^\delta)^{\mu-1}x^{\alpha-\nu+\frac12}J_{\nu-\frac12}(tx)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1(1-x^\delta)^{\mu-1}x^\alpha j_{\nu-\frac12}(tx)\,dx,\quad t>0. \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть* $\delta,\ \mu,\ \nu,\ m,\ \alpha+m\in\mathbb{C}_+$. *Тогда* $\mathfrak{F}_m(\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(t)=$ $=2^{\nu-1}\Gamma(\nu)I_{\delta,\mu,\frac{m-1}{2}+\nu,m-1+\alpha}(t)$. *Если еще* $n,m-n+2\nu\in\mathbb{C}_+$, *то* $\mathfrak{F}_m(\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(t)=$ $=\dfrac{2^{\frac{n-m}{2}}\Gamma(\nu)}{\Gamma\left((m-n)/2+\nu\right)}\mathfrak{F}_n(\varphi_{\delta,\mu,\frac{m-n}{2}+\nu,m-n+\alpha})(t)$.

В силу теоремы 3 и равенства (7) результаты о положительности преобразования Фурье $F_m(\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(\|\cdot\|_2))(u)$ мы формулируем в терминах функции $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}$. О положительности функции $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t)$ известны следующие результаты:

1) $I_{1,2\nu,\nu,2\nu-1}(t)>0$ при всех $\nu>0$ и $t>0$ (Askey и Pollard [20]);

2) $I_{1,\nu,\nu,2\nu-1}(t)>0$ и $I_{1,\nu+1,\nu-1,2\nu-2}(t)>0$ при всех $\nu>1$ и $t>0$ (Fields и Ismail [21]);

3) $I_{1,\lambda+1,\alpha+\frac12,\lambda+\alpha+\frac12}(t)>0$ при всех $\alpha>\dfrac12$, $0\le\lambda\le\alpha-\dfrac12$ и $t>0$ (Askey и Gasper [22]; случай $\lambda=0$ рассмотрел Makai [23]);

4) $I_{1,\mu,\nu,2\nu-1}(t)>0$ при всех $\mu\ge1$, $0<\nu\le1$, $(\mu,\nu)\ne(1,1)$ и $t>0$ (Moak [24]);

5) $I_{2,\frac{\mu+\nu+1}{2},\frac{\mu-\nu+1}{2},1}(t)>0$ при всех $t>0$, если выполнено одно из двух условий: i) $\mu=\dfrac12$, $|\nu|<\dfrac12$; ii) $\mu>\dfrac12$, $|\nu|\le\mu$ (Steinig [25]);

6) $I_{2,\lambda+1,\alpha+\frac12,\mu+\alpha}(t)>0$ при всех $t>0$, если выполнено одно из четырех условий: i) $\lambda=\alpha-\dfrac12>-1$, $\alpha>\mu$, $\alpha+\mu>-1$; ii) $\mu=\lambda+\dfrac12>0$, $\alpha>\lambda+\dfrac12$; iii) $\alpha>-1$, $\lambda>-\dfrac12$, $\mu=0$; iv) $2\lambda=\alpha+\mu-1$, $\alpha>\mu$, $\alpha+\mu>-1$ (Gasper [26]; случай $\lambda=0$ в iii) рассмотрел Cooke [27]);

7) $I_{2-\frac1\mu,\mu,1,2-\frac1\mu}(t)\ge0$ при всех $t>0$, если $\dfrac{\mu+1}{2}\in\mathbb{N}$ (Gneiting, Konis и Richards [28]);

8) $I_{\frac12,1,\frac32,\frac32}(t)\ge0$ при всех $t>0$ (О. Ю. Пасенченко [29]).

Теорема 4. I. *Пусть* $\delta,\mu,\alpha+1>0$, $\nu\in\mathbb{R}$ *и* $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t)\ge0$ *при* $t>0$. *Тогда*:

1) $I_{\delta,\mu+\tau,\nu,\alpha}(t)>0$ *и* $I_{\delta,\mu+\varepsilon,\nu,\alpha-\delta\varepsilon}(t)>0$ *при всех* $\tau>0$, $\varepsilon\in(0,\frac{\alpha+1}{\delta})$ *и* $t>0$;

2) *если дополнительно* $\nu+\dfrac12>0$, *то* $I_{\delta,\mu,\nu+\tau,\alpha}(t)>0$ *при всех* $\tau>0$ *и* $t>0$;

3) *если дополнительно* $\alpha+1\ge\delta$, *то* $I_{\varepsilon,\mu,\nu,\alpha-\delta+\varepsilon}(t)>0$ *при всех* $\varepsilon\in(0,\delta)$ *и* $t>0$;

4) *если дополнительно* $\mu>1$, *то* $I_{\varepsilon,\mu,\nu,\alpha}(t)>0$ *при всех* $\varepsilon\in(0,\delta)$ *и* $t>0$;

5) *если дополнительно* $\mu\le1$, *то* $I_{\varepsilon,\tau,\nu,\alpha}(t)>0$ *при всех* $\varepsilon>0,\tau>1$ *и* $t>0$.

II. 1. *Пусть* $\delta,\ \mu,\ \varepsilon,\ \nu-2\varepsilon,\alpha-2\varepsilon+1>0$ *и* $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t)\ge0$, $t>0$. *Тогда* $I_{\delta,\mu,\nu-\varepsilon,\alpha-2\varepsilon}(t)>0$, $t>0$.

2. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $\delta, \mu, \nu - k + \dfrac{1}{2}$, $\alpha - 2k + 1 > 0$ *и* $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) \geq 0$ *при* $t > 0$. *Тогда* $I_{\delta,\mu,\nu-k,\alpha-2k}(t) > 0$ *при всех* $t > 0$.

Утверждения 1 и 2 в теореме 4(I) при $\nu + \dfrac{1}{2} > 0$, $\delta = 1$ и $\delta = 2$ доказал Gasper [26]. В случае $\nu = 1$, $\alpha = \delta$ утверждение 3 доказал Kuttner [30]. В случае $2\nu - 1 \in \mathbb{N}$, $\alpha = 2\nu - 2 + \delta$ утверждение 3 доказал Голубов [31]. Из теоремы 4 (I) получаются результаты работ Misiewicz, Richards [32] и Buhmann [6].

Теорема 5. *Пусть* δ, μ, $\nu + \dfrac{1}{2}$, $\alpha + 1 > 0$. *Тогда неравенство* $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) \geq 0$ *не может выполняться при всех* $t > 0$ *в следующих случаях*:

1) $\mu + \nu < \alpha + 1$;

2) $\mu + \nu = \alpha + 1$ *и* $\dfrac{\Gamma\left((\alpha+1)/2\right)}{\Gamma\left(\nu - \alpha/2\right)\Gamma(\mu)} < \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^{\mu-1}$;

3) $\alpha = 2\nu$ *и выполняется одно из следующих условий*:

i) $\mu > 1$, $\delta < 2$, $\mu < \nu + 1 + \delta$;

ii) $\mu > 1$, $\delta < 2$, $\mu = \nu + 1 + \delta$ *и* $\dfrac{\Gamma\left((\alpha+1+\delta)/2\right)}{\Gamma\left(1 - \delta/2\right)\Gamma(\mu - 1)} < \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^{\mu-2}$;

iii) $\mu > 1$, $\delta \geq 2$;

iv) $\mu \leq 1$;

4) $\alpha > 2\nu$.

Случай 2 в теореме 5 рассмотрел Moak [24] при $\delta = 1$, $\mu = \nu < 1$, $\alpha = 2\nu - 1$. Случай 1 при $\alpha = 2\nu + \delta - 2$ и $2\nu - 1 \in \mathbb{N}$ рассмотрели Голубов [31] и Kuttner [30] ($\nu = 1$). Они рассмотрели также случай $\alpha = 2\nu + \delta - 2$ и $2\nu - 1 \in \mathbb{N}$, $\mu > 1$, $\delta \geq 2$ (при $\delta = 2$ это частный случай 3 (iii), а при $\delta > 2$ — частный случай 4).

Теорема 6. *Пусть* δ, μ, $\nu + \dfrac{1}{2}, \alpha + 1 > 0$ *и* $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) > 0$ *при всех* $t > 0$. *Тогда*:

1) *если выполнено одно из двух условий*:

i) $\alpha < 2\nu$, $\mu + \nu > \alpha + 1$;

ii) $\alpha < 2\nu$, $\mu + \nu = \alpha + 1$ *и* $\dfrac{\Gamma\left((\alpha+1)/2\right)}{\Gamma\left(\nu - \alpha/2\right)\Gamma(\mu)} > \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^{\mu-1}$, *то существуют константы* $c_i > 0$, *зависящие только от* δ, μ, ν *и* α, *такие, что при* $t > 0$ *выполняется неравенство* $c_1 \leq I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t)(1+t)^{\alpha+1} \leq c_2$.

2) *если выполнено одно из двух условий*:

i) $\alpha = 2\nu$, $\mu > 1$, $\delta < 2$, $\mu + \nu > \alpha + 1 + \delta$;

ii) $\alpha = 2\nu$, $\mu > 1$, $\delta < 2$, $\mu + \nu = \alpha + 1 + \delta$ *и* $\dfrac{\Gamma\left((\alpha+1+\delta)/2\right)}{\Gamma\left(1 - \delta/2\right)\Gamma(\mu - 1)} > \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^{\mu-2}$, *то существуют константы* $c_i > 0$, *зависящие только от* δ, μ, ν *и* α, *такие, что при* $t > 0$ *выполняется неравенство* $c_1 \leq I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t)(1+t)^{\alpha+1+\delta} \leq c_2$.

В частных случаях теорема 6 была доказана в [5–8, 10].

1. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(x) := c - \gamma x^2$, *где* c *и* γ — *вещественные константы. Предположим, что на некотором интервале* (a, b) *функция* g *имеет производную порядка* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда при всех* $x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \in (a, b)$ *справедливы равенства*[2]

[2] Здесь и далее символами $[x]$ и $\{x\}$ обозначены соответственно целая и дробная части числа $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{d^n}{dx^n}\{g(\varphi(x))\} = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha_{n,p}\, g^{(n-p)}(\varphi(x))\gamma^{n-p}x^{n-2p}, \tag{10}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{(s^2-x^2)^\rho\right\} = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha_{n,p}\,\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+1-n+p)}(s^2-x^2)^{\rho-n+p}x^{n-2p}, \tag{11}$$

где

$$\alpha_{n,p} = \frac{(-1)^{n-p}\,n!}{p!\,(n-2p)!}\cdot 2^{n-2p}, \quad 0 \le p \le \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{12}$$

Доказательство. Равенство (10) легко доказывается индукцией по $n \in \mathbb{N}$, если воспользоваться формулой для производной сложной функции. Равенство (11) следует из (10) при $\varphi(x) = s^2 - x^2$ и $g(t) := t^\rho$. Равенства (12) получаются из (10) при $\varphi(x) = -x^2$, $g(t) := e^t$ и хорошо известного равенства для многочленов Эрмита H_n (см. [33], гл. V, § 1, равенство (24)):

$$(-1)^n H_n(x) = e^{-x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left\{e^{-x^2}\right\} = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{n-p}\,n!}{p!\,(n-2p)!}\cdot(2x)^{n-2p}.$$

Лемма доказана.

Для δ, μ, $\nu \in \mathbb{C}_+$ и $0 < |x| < q < 1$ определим функции

$$\begin{aligned} \psi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(q,x) &:= \int_q^1 (s^2-x^2)^{\nu-1} f_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(s)\,ds, \\ h_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(q,x) &:= \int_{|x|}^q (s^2-x^2)^{\nu-1} f_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(s)\,ds. \end{aligned} \tag{13}$$

Очевидно, имеет место тождество

$$\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(x) = \psi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(q,x) + h_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(q,x), \quad 0 < |x| < q < 1. \tag{14}$$

Определим следующие дифференциальные операторы:

$$D^0 f := f, \qquad D^1(f)(s) := (f(s)s^{-1})', \qquad D^{k+1} := D^1(D^k), k \in \mathbb{Z}_+.$$

Применяя несколько раз формулу интегрирования по частям, получаем, что при любых $0 < |x| < q < 1$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$h_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(q,x) = \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p (q^2-x^2)^{\nu+p}}{2^{p+1}}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+p+1)} D^p(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(q)q^{-1} +$$

$$+\frac{(-1)^{k+1}\Gamma(\nu)}{2^{k+1}\Gamma(\nu+k+1)} H^k_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(q,x), \tag{15}$$

где

$$H^k_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(q,x) := \int_{|x|}^q (s^2-x^2)^{\nu+k} D^{k+1}(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s)\,ds. \tag{16}$$

Лемма 2. *Пусть $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $\operatorname{Re}\nu + k > n$ и $0 < |x| < q < 1$. Тогда*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{H^k_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(q,x)\right\} = \int\limits_{|x|}^{q} \frac{d^n}{dx^n}\left\{(s^2 - x^2)^{\nu+k}\right\} D^{k+1}(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s)\,ds. \tag{17}$$

Доказательство. Продифференцируем равенство (16) n раз по x. Поскольку $\operatorname{Re}\nu + k > n$, внеинтегральные члены исчезнут. Равенство (17) доказано.

Лемма 3. 1. *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $D^{k+1}(f)(s) \equiv 0 \iff f$ — нечетный алгебраический полином степени не больше $2k+1$.*

2. *При любых $k \in \mathbb{Z}_+$ и $s \in (0,1)$ справедливо равенство*

$$D^{k+1}(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu - p)} \frac{2^{k+1}\Gamma(\alpha/2 - \nu + \delta p/2 + 1)}{\Gamma(\alpha/2 - \nu + \delta p/2 - k)} \frac{s^{\alpha - 2\nu + \delta p - 2k - 1}}{p!}. \tag{18}$$

3. *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$ и $D^{k+1}(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s) \not\equiv 0$. Тогда $D^{k+1}(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s) \sim As^{\beta}$, $s \to +0$, где $A, \beta \in \mathbb{C}$ и $A \neq 0$. Кроме того, для любого $q \in (0,1)$ выполняется условие*

$$\sup_{0<s\le q}\left|(s^{-\beta}D^{k+1}(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s) - A)s^{-\delta}\right| < +\infty. \tag{19}$$

4. i) *При $s \to +0$ имеет место соотношение*

$$D^{k+1}(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s) \sim$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{2^{k+1}\Gamma(\alpha/2 - \nu + 1)}{\Gamma(\alpha/2 - \nu - k)}\, s^{\alpha - 2\nu - 2k - 1}, & \dfrac{\alpha}{2} - \nu \notin \mathbb{Z}_+,\ k \in \mathbb{Z}_+; \\[2ex] \dfrac{(1-\mu)2^{k+1}\Gamma(\alpha/2 - \nu + \delta/2 + 1)}{\Gamma(\alpha/2 - \nu + \delta/2 - k)}\, s^{\alpha - 2\nu - 2k - 1 + \delta}, & \\ \qquad \dfrac{\alpha}{2} - \nu \in \mathbb{Z}_+, \quad \dfrac{\delta}{2} \notin \mathbb{N}, \quad \mu \neq 1, \quad k \geq \dfrac{\alpha}{2} - \nu; & \\[2ex] \dfrac{(-1)^{m+1}\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu - m - 1)} \dfrac{2^{k+1}\Gamma(\alpha/2 - \nu + \delta(m+1)/2 + 1)}{\Gamma(\delta/2)(m+1)!}\, s^{\delta - 1}, & \\ \qquad \dfrac{\alpha}{2} - \nu \in \mathbb{Z}_+, \quad \dfrac{\delta}{2} \in \mathbb{N}, \quad \mu \notin \mathbb{N}, \quad k = \dfrac{\alpha}{2} - \nu + \dfrac{\delta m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}_+. & \end{cases} \tag{20}$$

ii) *Пусть выполнено одно из двух условий: $\dfrac{\alpha}{2} - \nu \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = 1$ или $\dfrac{\alpha}{2} - \nu \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\delta}{2} \in \mathbb{N}$. Тогда $D^{k+1}(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s) \equiv 0$ при всех $k \geq \dfrac{\alpha}{2} - \nu + \dfrac{\delta}{2}(\mu - 1)$.*

iii) *Пусть $\dfrac{\alpha}{2} - \nu \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \notin \mathbb{N}$, $\dfrac{\delta}{2} \in \mathbb{N}$. Тогда $D^{k+1}(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s) \not\equiv 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$.*

Доказательство. Утверждение 1 леммы 3 легко доказывается индукцией по $k \in \mathbb{Z}_+$. Докажем утверждение 2. К правой части равенства

$$f_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu - p)} \frac{s^{\alpha - 2\nu + 1 + \delta p}}{p!}, \quad 0 < |s| < 1, \tag{21}$$

применим оператор D^{k+1} и теорему о почленном дифференцировании ряда. Следует только учесть, что ряд в правой части равенства (21) сходится равномерно в любом кольце $\{s \in \mathbb{C}\colon\ 0 < q_1 \le |s| \le q_2 < 1\}$ и равенства $D^{k+1}(s^\beta)(s) = s^{\beta-2k-2}\prod_{j=0}^{k}(\beta-2j-1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Утверждения 3 и 4 следуют из утверждений 1 и 2.

Лемма 4. *Пусть $q > 0$ и*

$$H(x) := \int\limits_x^q F(s,x)G(s)\,ds, \quad 0 < x < q. \tag{22}$$

Предположим, что при некоторых значениях $A, B, \beta_i \in \mathbb{C}$, $\beta_2, \beta_5 \in \mathbb{C}_+$, функции G и F удовлетворяют условиям:

i) $\sup_{0<s<q}|(G(s)s^{-\beta_1}-A)s^{-\beta_2}| < +\infty$;

ii) $F(tx,x) = x^{\beta_3}f(t)$, $0<x<q$, $t>1$ *и* $\sup_{t>1}|(f(t)t^{-\beta_4}-B)t^{\beta_5}| < +\infty$.

Пусть $\gamma := \beta_1 + \beta_4$. Тогда:

1) *если* $\operatorname{Re}\gamma < -1$, *то* $H(x) = x^{\beta_1+\beta_3+1}\left[A\int_1^{+\infty} f(t)t^{\beta_1}\,dt + o(1)\right]$, $x \to +0$;

2) *если* $\operatorname{Re}\gamma > -1$, *то* $H(x) = x^{\beta_3-\beta_4}\left[B\int_0^q G(s)s^{\beta_4}\,ds + o(1)\right]$, $x \to +0$;

3) *если* $\gamma = -1$, *то* $H(x) = x^{\beta_1+\beta_3+1}\big[-AB\ln x + O(1)\big]$, $x \to +0$;

4) *если* $\operatorname{Re}\gamma = -1$, $\gamma \ne -1$, *то*

$$H(x) = x^{\beta_3-\beta_4}\left[Ax^{\gamma+1}\left\{\int\limits_1^{+\infty}(f(t)t^{-\beta_4}-B)t^\gamma\,dt - \frac{B}{\gamma+1}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{ABq^{\gamma+1}}{\gamma+1} + B\int\limits_0^q s^\gamma(G(s)s^{-\beta_1}-A)\,ds + o(1)\right], \quad x \to +0.$$

Доказательство. Пусть $g(s) := G(s)s^{-\beta_1}$. В интеграле (22) выполним замену переменной $s = tx$, $t \in \left[1, \dfrac{q}{x}\right]$. Тогда

$$H(x) = x^{\beta_1+\beta_3+1}I(x), \quad I(x) = \int_1^{\frac{q}{x}} f(t)t^{\beta_1}g(xt)\,dt. \tag{23}$$

1. Рассмотрим случай $\operatorname{Re}\gamma < -1$. Имеем

$$I(x) = A\int\limits_1^{\frac{q}{x}} f(t)t^{\beta_1}\,dt + \int\limits_1^{\frac{q}{x}} f(t)t^{\beta_1}(g(xt)-A)\,dt = A\int\limits_1^{+\infty} f(t)t^{\beta_1}\,dt + o(1), \quad x \to +0.$$

2. Рассмотрим случай $\operatorname{Re}\gamma > -1$. Интеграл в (23) разобьем на два: $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$, где

$$I_1(x) := B\int\limits_1^{\frac{q}{x}} g(xt)t^\gamma\,dt = Bx^{-\gamma-1}\left[\int\limits_0^q g(s)s^\gamma\,ds - \int\limits_0^x g(s)s^\gamma\,ds\right] =$$

$$= Bx^{-\gamma-1}\left[\int\limits_0^q g(s)s^\gamma\,ds + O\left(x^{\operatorname{Re}\gamma+1}\right)\right], \quad x \to +0,$$

и

$$I_2(x) := \int\limits_1^{\frac{q}{x}} (f(t) - Bt^{\beta_4}) g(xt) t^{\beta_1}\, dt = O\left(\int\limits_1^{\frac{q}{x}} t^{\mathrm{Re}\,(\gamma-\beta_5)}\, dt \right), \quad x \to +0.$$

Тогда $H(x) = x^{\beta_3-\beta_4}\left[B\int_0^q s^\gamma g(s)\, ds + \alpha(x)\right]$, где при $x \to +0$

$$\alpha(x) = \begin{cases} O(x^{\beta_5}), & \mathrm{Re}\,\gamma + 1 > \mathrm{Re}\,\beta_5, \\ O(x^{\gamma+1}), & \mathrm{Re}\,\gamma + 1 < \mathrm{Re}\,\beta_5, \\ O(x^{\gamma+1}\ln x), & \mathrm{Re}\,\gamma + 1 = \mathrm{Re}\,\beta_5, \end{cases}$$

т. е. в любом случае $\alpha(x) = o(1)$, $x \to +0$.

3. Рассмотрим случай $\gamma = -1$. В (23)

$$I(x) = B\int\limits_1^{\frac{q}{x}} t^{-1} g(xt)\, dt + \int\limits_1^{\frac{q}{x}} (f(t) - Bt^{\beta_4}) g(xt) t^{\beta_1}\, dt =$$

$$= AB\int\limits_1^{\frac{q}{x}} t^{-1}\, dt + B\int\limits_1^{\frac{q}{x}} t^{-1}(g(xt) - A)\, dt + \int\limits_1^{\frac{q}{x}} (f(t) - Bt^{\beta_4}) g(xt) t^{\beta_1}\, dt =$$

$$= -AB\ln x + O(1), \quad x \to +0.$$

4. Рассмотрим случай $\mathrm{Re}\,\gamma = -1$, $\gamma \neq -1$. Интеграл в (23) разобьем на два: $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$, где

$$I_1(x) := B\int\limits_1^{\frac{q}{x}} g(xt) t^\gamma\, dt =$$

$$= Bx^{-\gamma-1}\left[A\int\limits_x^q s^\gamma\, ds + \int\limits_0^q (g(s) - A) s^\gamma\, ds - \int\limits_0^x (g(s) - A) s^\gamma\, ds \right] =$$

$$= Bx^{-\gamma-1}\left[\frac{A}{\gamma+1}(q^{\gamma+1} - x^{\gamma+1}) + \int\limits_0^q (g(s) - A) s^\gamma\, ds + o(1) \right], \quad x \to +0,$$

и

$$I_2(x) := \int\limits_1^{\frac{q}{x}} (f(t) - Bt^{\beta_4}) g(xt) t^{\beta_1}\, dt =$$

$$= A\int\limits_1^{\frac{q}{x}} (f(t) - Bt^{\beta_4}) t^{\beta_1}\, dt + \int\limits_1^{\frac{q}{x}} (f(t) - Bt^{\beta_4})(g(xt) - A) t^{\beta_1}\, dt =$$

$$= A\int\limits_1^{+\infty} (f(t) - Bt^{\beta_4}) t^{\beta_1}\, dt + o(1), \quad x \to +0.$$

Складывая $I_1(x)$ и $I_2(x)$, получаем нужное равенство.

Лемма 4 доказана.

Для $n \in \mathbb{Z}_+$, $\rho \in \mathbb{C}$ определим функцию

$$\begin{gathered} F_{n,\rho}(t) := \sum_{p=0}^{[n/2]} B^{\rho}_{n,p}(t^2-1)^{\rho-n+p}, \\ B^{\rho}_{n,p} := \frac{(-1)^{n-p}\, n!\, 2^{\,n-2p}}{p!\,(n-2p)!}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+1-n+p)}. \end{gathered} \tag{24}$$

Очевидно,

$$\begin{gathered} F_{n,\rho}(t) = (t^2-1)^{\rho-n}(B^{\rho}_{n,0}+o(1)), \quad t\to 1, \\ F_{n,\rho}(t)t^{-2\rho+n+2\left\{\frac{n}{2}\right\}} = B^{\rho}_{n,\left[\frac{n}{2}\right]} + O(t^{-2}), \quad t\to+\infty. \end{gathered} \tag{25}$$

Лемма 5. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $\rho \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Re}\rho > n-1$. Тогда при всех $z \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Re} z > -2\left\{\dfrac{n}{2}\right\}$ справедливо равенство*

$$\int\limits_1^{+\infty} F_{n,\rho}(t)t^{-2\rho+n-1-z}\,dt = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{2^{z-n}}\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(\rho+1)}{\Gamma\left((z-n+1)/2\right)\Gamma\left(\rho+1+(z-n)/2\right)}. \tag{26}$$

Доказательство. Выражения в левой и правой частях равенства (26) обозначим соответственно через $I(z)$ и $J(z)$. Из (25) следует, что функция $I(z)$ является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -2\left\{\dfrac{n}{2}\right\}$. Функция $J(z)$ является аналитической всюду, кроме, быть может, точек вида $z_k = -k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Если n — нечетное, то $J(z)$ является аналитической и при $z = 0$. Из теоремы единственности следует, что равенство (26) достаточно доказать, например, при $\operatorname{Re} z > n$. Если в интеграле (26) выполнить замену переменной $t = \dfrac{1}{x}$ и воспользоваться равенством (11), то получим равенство

$$I(z) = \int\limits_0^1 \frac{d^{\,n}}{dx^{\,n}}\left\{(1-x^2)^{\rho}\right\}x^{z-1}\,dx. \tag{27}$$

Пусть дополнительно $\operatorname{Re} z > n$. Применяя в (27) n раз формулу интегрирования по частям, получаем равенство

$$I(z) = \frac{(-1)^n\prod\limits_{p=0}^{n}(z-p)}{z}\int\limits_0^1(1-x^2)^{\rho}x^{z-n-1}\,dx = \frac{(-1)^n\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)}\frac{\Gamma\left((z-n)/2\right)\Gamma(\rho+1)}{2\,\Gamma\left(\rho+1+(z-n)/2\right)}.$$

Если в последнем равенстве воспользоваться формулой удвоения $\sqrt{\pi}\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+1/2\right)$ при $x = (z-n)/2$, то получим равенство (26).

Лемма 6. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $\rho \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Re}\rho > n-1$. Тогда при $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\left(F_{n,\,\rho}(t)t^{-2\rho+n+2\left\{\frac{n}{2}\right\}}-B^{\rho}_{n,\left[\frac{n}{2}\right]}\right)t^{-z}\,dt=$$

$$=\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{2^{z-2\left\{\frac{n}{2}\right\}-1-n}}\frac{\Gamma\left(z-2\left\{\dfrac{n}{2}\right\}-1\right)\Gamma(\rho+1)}{\Gamma\left(\dfrac{z}{2}-n+\left[\dfrac{n}{2}\right]\right)\Gamma\left(\rho+1+\dfrac{z-1}{2}-n+\left[\dfrac{n}{2}\right]\right)}-\frac{B^{\rho}_{n,\left[\frac{n}{2}\right]}}{z-1}. \quad (28)$$

Доказательство. Выражения в левой и правой частях равенства (28) обозначим соответственно через $I(z)$ и $J(z)$. Из (25) следует, что функция $I(z)$ является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -1$. Функция $J(z)$ является аналитической всюду, кроме, быть может, изолированных точек вида $z_k = 2\left\{\dfrac{n}{2}\right\}+1-k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (если число z_k является четным или равно 1, то особенность устранимая). Из (26) следует, что $I(z) = J(z)$ при $\operatorname{Re} z > 1$. Из теоремы единственности вытекает справедливость равенства (28) и при $\operatorname{Re} z > -1$.

Лемма 7. *Пусть $B^m(q) := \{x \in \mathbb{R}^m\colon \|x\|_2 < q\}$ — открытый шар в $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, с центром в нуле и радиусом $q > 0$, а функция $h(t)$ является четной на интервале $(-q, q)$. Пусть $p \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $h\big(\|\cdot\|_2\big) \in C^p(B^m(q)) \iff h \in C^p(-q, q)$.*

***Замечание* 4.** Утверждение леммы 7 можно считать известным. Можно показать, что в этом утверждении евклидову норму можно заменить только на норму, порожденную некоторым скалярным произведением.

Доказательство. *Необходимость* очевидна. *Достаточность* докажем при дополнительном условии: $h^{(s)}(0) = 0$ при всех целых $s \in [0, p]$. Пусть $\psi(t) := h(\sqrt{t})$, $t \in [0, q^2)$. Тогда согласно лемме 1 при любом целом $n \in [0, p]$ справедливо равенство

$$h^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{[n/2]} |\alpha_{n,k}| t^{n-2k} \psi^{(n-k)}(t^2), \qquad t \in (-q, q), \quad t \neq 0. \quad (29)$$

Пусть $f(x) := h\big(\|x\|_2\big)$, $x \in B^m(q)$. Легко проверить, что при всех целых $n \in [0, p]$ и $\alpha_i \in \{1, \ldots, m\}$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_n}}(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} P_{n-2k,\alpha,k}(x) \psi^{(n-k)}\big(\|x\|_2^2\big), \qquad x \in B^m(q), \quad x \neq 0, \quad (30)$$

где $P_{n-2k,\alpha,k}(x)$ — однородный многочлен степени $n-2k$ (т. е. $P_{n-2k,\alpha,k}(\lambda x) = \lambda^{n-2k} P_{n-2k,\alpha,k}(x)$ при любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^m$), который зависит только от переменных $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}$. Из условия следует, что $h^{(n)}(t) = o(t^{p-n})$, $t \to 0$, при всех целых $n \in [0, p]$. Умножим равенство (29) на t^n при $n = 0, \ldots, p$. Учитывая, что $\alpha_{n,k} \neq 0$, получаем, что при всех $s \in [0, p]$ справедливо соотношение $t^{2s}\psi^{(s)}(t^2) = o(t^p)$, $t \to 0$. Тогда из (30) следует, что при всех целых $n \in [0, p]$ и $\alpha_i \in \{1, \ldots, m\}$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_n}}(x) = o(\|x\|_2^{p-n}), \quad \|x\|_2 \to 0,$$

и, значит, $f \in C^p(B^m(q))$. Общий случай вытекает из доказанного частного случая, если ввести вспомогательную функцию

$$H(t) := h(t) - \sum_{k=0}^{p} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} t^k = h(t) - \sum_{k=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]} \frac{h^{(2k)}(0)}{(2k)!} t^{2k}.$$

Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1.

Предложение 1. 1. *Пусть* $\delta, \mu, \nu \in \mathbb{C}_+$, $\alpha \in \mathbb{C}$ *и* $0 < q < 1$. *Тогда*:

i) $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C(-q,q) \iff \exists \lim\limits_{x\to+0} \varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(x) \iff \alpha \in \mathbb{C}_+$;

ii) $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in L_\infty(-q,q) \iff \operatorname{Re}\alpha \ge 0$, $\alpha \ne 0$;

iii) *если* $s > 0$, *то* $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(\|\cdot\|_2) \in L_s(B^m(q)) \iff s\alpha + m \in \mathbb{C}_+$.

2. *Пусть* $\delta, \mu, \nu, \alpha \in \mathbb{C}_+$, $0 < q < 1$ *и* $r(z) := \max\{k \in \mathbb{Z} : k < \operatorname{Re} z\}$. *Тогда*:

i) *если* $\dfrac{\alpha}{2} - \nu + 1 \notin \mathbb{N}$ *и* $p = r(\alpha)$, *то* $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^p(-q,q)$, $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \notin C^{p+1}(-q,q)$ *и* $\varphi^{(p+1)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in L(-q,q)$;

ii) *если* $\dfrac{\alpha}{2} - \nu + 1 \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\delta}{2} \notin \mathbb{N}$, $\mu \ne 1$ *и* $p = r(\alpha+\delta)$, *то* $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^p(-q,q)$, $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \notin C^{p+1}(-q,q)$ *и* $\varphi^{(p+1)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in L(-q,q)$;

iii) *если* $\dfrac{\alpha}{2} - \nu + 1 \in \mathbb{N}$, $\mu = 1$, *то* $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^\infty(-q,q)$;

iv) *Если* $\dfrac{\alpha}{2} - \nu + 1 \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\delta}{2} \in \mathbb{N}$, *то* $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^\infty(-q,q)$.

Доказательство. Очевидно, $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0,\pm1\})$. Из равенств (13) – (15) следует

$$\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^n(-q,q), n \in \mathbb{Z}_+ \iff \exists k \in \mathbb{Z}_+ : H^k_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(q,\cdot) \in C^n(-q,q),$$

$$\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(\|\cdot\|_2) \in L_s(B^m(q)) \iff \exists k \in \mathbb{Z}_+ : H^k_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(q,\|\cdot\|_2) \in L_s(B^m(q)).$$

Пусть $k > n - \operatorname{Re}\nu$. Тогда согласно лемме 2

$$H(x) := \frac{d^n}{dx^n}\left\{H^k_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(q,x)\right\} = \int\limits_{|x|}^{q} F(s,x)G(s)\,ds, \quad 0 < |x| < q, \tag{31}$$

$$F(s,x) := \frac{d^n}{dx^n}\left\{(s^2-x^2)^{\nu+k}\right\}, \quad G(s) := D^{k+1}(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s).$$

К функции H применим лемму 4. В данном случае $F(tx,x) = x^{2\nu+2k-n}F_{n,\nu+k}(t)$, где функция $F_{n,\nu+k}$ определена равенством (24). Учитывая соотношения (25), получаем, что условие ii) в лемме 4 выполняется при

$$\beta_3 = 2\nu + 2k - n, \quad \beta_4 = 2\nu + 2k - n - 2\left\{\frac{n}{2}\right\}, \beta_5 = 2, \quad B = B^{\nu+k}_{n,\left[\frac{n}{2}\right]} \ne 0. \tag{32}$$

Докажем утверждение 1 предложения 1. Если $\operatorname{Re}\alpha > 0$, то интеграл (1) сходится абсолютно при $x = 0$ и, значит, $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C(-q,q)$. В этом случае $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(0) = \dfrac{1}{\delta}\dfrac{\Gamma(\mu)\Gamma(\alpha/\delta)}{\Gamma(\mu+\alpha/\delta)}$.

Рассмотрим случай $\operatorname{Re}\alpha \le 0$. В (31) и (32) выберем $n = 0$. Тогда можно взять $k = 0$. Из (20) следует соотношение $D^1(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s) \sim (\alpha - 2\nu)s^{\alpha-2\nu-1}$, $s \to +0$, и, значит, условия i) и ii) в лемме 4 выполняются при (см. утверждение 3 леммы 3)

$$\begin{gathered}\beta_1 = \alpha - 2\nu - 1,\, \beta_2 = \delta, \quad A = \alpha - 2\nu \neq 0, \\ \beta_3 = \beta_4 = 2\nu, \quad \beta_5 = 2, \quad B = B^{\nu}_{0,0} = 1, \gamma := \beta_1 + \beta_4 = \alpha - 1.\end{gathered} \tag{33}$$

Если $\operatorname{Re}\alpha < 0$, т. е. $\operatorname{Re}\gamma < -1$, то согласно лемме 4

$$H(x) = x^{\alpha}\left[A\int\limits_1^{+\infty} F_{0,\nu}(t)t^{\alpha-2\nu-1}\,dt + o(1)\right], \quad x \to +0. \tag{34}$$

По лемме 5 ($z = -\alpha$, $n = 0$, $\rho = \nu$) интеграл в (34) равен $\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\alpha)}{2^{-\alpha}\Gamma\left(\nu+1-\alpha/2\right)} \neq 0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to+0}|H(x)| = +\infty$. Поскольку

$$\int\limits_{B^m(q)} |H(\|x\|_2)|^s\,dx = c_m \int\limits_0^q t^{m-1}|H(t)|^s\,dt, \quad c_m > 0,$$

то $H(\|\cdot\|_2) \in L_s(B^m(q))$ только при $s\operatorname{Re}\alpha + m > 0$.

Если $\alpha = 0$, т. е. $\gamma = -1$, то согласно лемме 4 $H(x) = -AB\ln x + O(1)$, $x \to +0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to+0}|H(x)| = +\infty$ и $H\big(\|\cdot\|_2\big) \in L(B^m(q))$.

Если $\operatorname{Re}\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$, т. е. $\operatorname{Re}\gamma = -1$ и $\gamma \neq -1$, то согласно лемме 4

$$H(x) = Ax^{\alpha}\left\{\int\limits_1^{+\infty}(F_{0,\nu}(t)t^{-2\nu} - B^{\nu}_{0,0})t^{\alpha-1}\,dt - \frac{B^{\nu}_{0,0}}{\alpha}\right\} + C + o(1), \quad x \to +0. \tag{35}$$

По лемме 6 ($z = 1-\alpha$, $n = 0$, $\rho = \nu$) выражение в скобках в (35) равно $\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\alpha)\Gamma(\nu+1)}{2^{-\alpha}\Gamma\left((1-\alpha)/2\right)\Gamma\left(\nu+1-\alpha/2\right)} \neq 0$. Поэтому предел функции $H(x)$ в точке $x = 0$ не существует, но $H \in L_{\infty}(-q,q)$.

Рассмотренные случаи полностью доказывают утверждение 1.

***Замечание* 5.** Из приведенного выше доказательства следует, что при $x \to 0$

$$\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(x) \sim \begin{cases} \dfrac{(\alpha-2\nu)\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\alpha)}{2^{-\alpha}\Gamma(\nu+1-\alpha/2)}|x|^{\alpha}, & \operatorname{Re}\alpha < 0, \\ 2\nu\ln|x|, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Докажем утверждение 2. Пусть $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Тогда $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C(-q,q)$. Как и раньше, к функции H из (31), где $k,n \in \mathbb{Z}_+$ и $k > n - \operatorname{Re}\nu$, применим лемму 4. Значения параметров, при которых выполнены условия ii) в лемме 4, выписаны в (32).

i) Пусть $\dfrac{\alpha}{2} - \nu \notin \mathbb{Z}_+$. В этом случае из (20) следует, что условия i) в лемме 4 выполняются при

$$\begin{gathered}\beta_1 = \alpha - 2\nu - 2k - 1, \quad \beta_2 = \delta, \quad A = \frac{2^{k+1}\Gamma\left(\alpha/2-\nu+1\right)}{\Gamma\left(\alpha/2-\nu-k\right)} \neq 0, \\ \gamma := \beta_1 + \beta_4 = \alpha - 1 - n - 2\left\{\frac{n}{2}\right\}.\end{gathered} \tag{36}$$

i_1) Если $n + 2\left\{\dfrac{n}{2}\right\} > \operatorname{Re}\alpha$, т. е. $\operatorname{Re}\gamma < -1$, то согласно лемме 4

$$H(x) = x^{\alpha-n}\left(AI + o(1)\right), \quad x \to +0, \quad I := \int\limits_1^{+\infty} F_{n,\nu+k}(t)t^{\alpha-2\nu-2k-1}\,dt.$$

По лемме 5 ($z = n-\alpha$, $\rho = \nu+k$)

$$I = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{2^{-\alpha}} \frac{\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma\left((1-\alpha)/2\right)\Gamma\left(\nu+k+1-\alpha/2\right)}.$$

Если $\dfrac{\alpha-1}{2} \in \mathbb{Z}_+$ и $\alpha < n$, то $I = 0$. Если $\dfrac{\alpha-1}{2} \in \mathbb{Z}_+$ и $\alpha \geq n$, то $\alpha = n$ и

$$I = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{2^{-\alpha}} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left((n+1)/2\right)\,\Gamma(\nu+k+1)}{2\Gamma\left(\nu+k+1-\alpha/2\right)} \neq 0$$

$\Bigg($здесь мы воспользовались тем, что при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ имеет место соотношение $\Gamma(x-k) \sim \dfrac{(-1)^k}{x\,\Gamma(k+1)}$, $x \to 0\Bigg)$. Если $\dfrac{\alpha-1}{2} \notin \mathbb{Z}_+$, то $\alpha \neq n$ и $I \neq 0$.

i_2) Если $n + 2\left\{\dfrac{n}{2}\right\} < \operatorname{Re}\alpha$, т. е. $\operatorname{Re}\gamma > -1$, то согласно лемме 4

$$H(x) = x^{2\left\{\frac{n}{2}\right\}}\left(B\int\limits_0^q G(s)s^{\beta_4}\,ds + o(1)\right), \quad x \to +0.$$

i_3) Если $n + 2\left\{\dfrac{n}{2}\right\} = \alpha$, т. е. $\gamma = -1$, то согласно лемме 4

$$H(x) = x^{2\left\{\frac{n}{2}\right\}}(-AB\ln x + O(1)), \quad x \to +0.$$

i_4) Если $n+2\left\{\dfrac{n}{2}\right\} = \operatorname{Re}\alpha$ и $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$, т. е. $\operatorname{Re}\gamma = -1$ и $\gamma \neq -1$, то по лемме 4

$$H(x) =$$

$$= x^{2\left\{\frac{n}{2}\right\}}\left[AJx^{\gamma+1} + \frac{ABq^{\gamma+1}}{\gamma+1} + B\int\limits_0^q s^{\gamma}(G(s)s^{-\beta_1} - A)\,ds + o(1)\right], \quad x \to +0,$$

$$J := \int\limits_1^{+\infty}\left(F_{n,\,\nu+k}(t)t^{-2\nu-2k+n+2\left\{\frac{n}{2}\right\}} - B^{\nu+k}_{n,\left[\frac{n}{2}\right]}\right)t^{\gamma}\,dt - \frac{B^{\nu+k}_{n,\left[\frac{n}{2}\right]}}{\gamma+1}.$$

По лемме 6 ($z = -\gamma$, $\rho = \nu+k$)

$$J = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{2^{-\gamma-2\left\{\frac{n}{2}\right\}-1-n}}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(-\gamma-2\left\{n/2\right\}-1\right)\,\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma\left(-\gamma/2-n+[n/2]\right)\Gamma\left(\nu+k+1-(\gamma+1)/2-n+[n/2]\right)} \neq 0.$$

Далее рассуждаем следующим образом. Если n четное и $n < \operatorname{Re}\alpha$, то из i_2) вытекает существование предела $\lim\limits_{x\to+0} H(x)$. Если n нечетное и $n < \operatorname{Re}\alpha$, то из i_1)$-\mathrm{i}_4$) вытекает, что $\lim\limits_{x\to+0} H(x) = 0$. Отсюда следует, что $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^p(-q,q)$, где $p := \max\{k \in \mathbb{Z} : k < \operatorname{Re}\alpha\}$.

Пусть $n := p + 1$. Тогда:

1) если $\operatorname{Re}\alpha \notin \mathbb{Z}_+$, то $n > \operatorname{Re}\alpha$ и из i_1) вытекает, что $\lim\limits_{x\to+0}|H(x)| = +\infty$ и, значит, $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \notin C^{p+1}(-q,q)$, но $\varphi^{(p+1)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in L(-q,q)$;

2) если n четное и $\operatorname{Re}\alpha \in \mathbb{Z}_+$, то $n = \operatorname{Re}\alpha$ и из i_3), i_4) вытекает, что предел функции H в точке $x = 0$ не существует и, значит, $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \notin C^{p+1}(-q,q)$, но $\varphi^{(p+1)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in L_\infty(-q,q)$;

3) если n нечетное и $\operatorname{Re}\alpha \in \mathbb{Z}_+$, то $n = \operatorname{Re}\alpha$ и из i_1) вытекает, что $\lim\limits_{x\to+0}|H(x)| \neq$ $\neq 0$ и, значит, $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \notin C^{p+1}(-q,q)$, но $\varphi^{(p+1)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in L_\infty(-q,q)$.

Случай i) полностью исследован.

ii) Пусть $\alpha/2-\nu+1 \in \mathbb{N}$, $\delta/2 \notin \mathbb{N}$, $\mu \neq 1$. Пусть, как и раньше, $k > n - \operatorname{Re}\nu$ и дополнительно $k \geq \alpha/2-\nu$. В этом случае из (20) следует, что условия i) в лемме 4 выполняются при

$$\beta_1 = \alpha - 2\nu - 2k - 1 + \delta, \quad \beta_2 = \delta,$$

$$A = \frac{(1-\mu)2^{k+1}\Gamma\left(\alpha/2-\nu+\delta/2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha/2-\nu+\delta/2-k\right)} \neq 0, \tag{37}$$

$$\gamma := \beta_1 + \beta_4 = \alpha + \delta - 1 - n - 2\left\{\frac{n}{2}\right\}.$$

Далее рассуждения точно такие же, как и в i_1)$-\mathrm{i}_4$), если α заменить на $\alpha + \delta$.

iii) Пусть $\alpha/2-\nu+1 \in \mathbb{N}$, $\mu = 1$. Согласно лемме 3 $D^{k+1}(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s) \equiv 0$ при всех целых $k \geq \alpha/2-\nu$ и, значит, $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^\infty(-q,q)$.

iv) Пусть $\alpha/2-\nu+1 \in \mathbb{N}$, $\delta/2 \in \mathbb{N}$. Если $\mu \in \mathbb{N}$, то по лемме 3 $D^{k+1}(f_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(s) \equiv$ $\equiv 0$ при всех целых $k \geq \alpha/2-\nu+\delta/2(\mu-1)$ и, значит, $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^\infty(-q,q)$.

Если $\mu \notin \mathbb{N}$, то из (20) следует, что при всех $k = \alpha/2-\nu+\delta m/2$, $m \in \mathbb{Z}_+$, условия i) в лемме 4 выполняются при

$$\beta_1 = \delta - 1, \ \beta_2 = \delta,$$

$$A = \frac{(-1)^{m+1}\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-m-1)}\frac{2^{k+1}\Gamma\left(\alpha/2-\nu+\delta(m+1)/2+1\right)}{\Gamma\left(\delta/2\right)(m+1)!} \neq 0, \tag{38}$$

$$\gamma := \beta_1 + \beta_4 = \delta - 1 + 2\nu + 2k - n - 2\left\{\frac{n}{2}\right\}.$$

Далее рассуждаем следующим образом. Выберем произвольное $n \in \mathbb{Z}_+$ и достаточно большое $m \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы $k = \alpha/2-\nu+\delta m/2 > n - \operatorname{Re}\nu$. Тогда $\operatorname{Re}\gamma > -1$ и по лемме 4 $H(x) = x^{2\left\{\frac{n}{2}\right\}}\left[B\displaystyle\int_0^q G(s)s^{-\beta_4}\,ds + o(1)\right]$, $x \to +0$. Отсюда следует, что существует предел $\lim\limits_{x\to+0} H(x)$, а если n нечетное, то он равен 0. Поэтому $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^\infty(-q,q)$.

Утверждение 2 предложения 1 полностью доказано.

Предложение 2. 1. *Пусть* $\delta,\mu,\nu \in \mathbb{C}_+$, $\alpha \in \mathbb{C}$ *и* $0 < q < 1$. *Тогда*:

i) $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C(1-q,1+q) \iff \mu+\nu-1 \in \mathbb{C}_+$;

ii) $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in L_\infty(1-q,1+q) \iff \operatorname{Re}(\mu+\nu-1) \geq 0$;

iii) *если* $s > 0$, *то* $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in L_s(1-q,1+q) \iff s(\mu+\nu-1)+1 \in \mathbb{C}_+$.

2. *Пусть* $\delta, \mu, \nu, \mu+\nu-1 \in \mathbb{C}_+$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ *и* $p = r(\mu+\nu-1) := \max\{k \in \mathbb{Z} : k < \mathrm{Re}\,(\mu+\nu-1)\}$. *Тогда* $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^p(1-q, 1+q)$, $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \notin C^{p+1}(1-q, 1+q)$ *и* $\varphi^{(p+1)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in L(1-q, 1+q)$.

Доказательство. Если при $x \in (0,1)$ в интеграле (1) выполнить замену переменной интегрирования $s = 1-(1-x)t$, то получим следующее представление для $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(x)$:

$$\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(x) = (1-x)^{\mu+\nu-1}\,\Phi(x), \quad 0 < x < 1,$$

где

$$\Phi(x) := \int\limits_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1}(1-t+(1+t)x)^{\nu-1} g(1-(1-x)t)\,dt,$$

$$g(s) := s^{\nu-1}\left(\frac{1-s^\delta}{1-s}\right)^{\mu-1}.$$

Очевидно, $\Phi \in C^\infty(1-q, 1+q)$ и $\Phi(1) = 2^{\nu-1}\,\delta^{\mu-1}\dfrac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \neq 0$. Поэтому если $k \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < s \le \infty$, то

$$\begin{gathered}\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^k(1-q,1+q) \iff (1-x)_+^{\mu+\nu-1} \in C^k(1-q,1+q),\\ \varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in L_s(1-q,1+q) \iff (1-x)_+^{\mu+\nu-1} \in L_s(1-q,1+q).\end{gathered} \tag{39}$$

Первое утверждение предложения 2 доказано, а второе следует из (39).

***Доказательство теоремы* 1** непосредственно вытекает из предложений 1, 2 и леммы 7. Проанализируем только последний случай в формуле (2). Если $\mathrm{Re}\,(\mu+\nu-1) > \mathrm{Re}\,\alpha$ и $\alpha/2-\nu+1 \in \mathbb{N}$, $\delta/2 \notin \mathbb{N}$, то $\mathrm{Re}\,\mu > 1$. В этом случае $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^{p_1}(-q,q) \cap C^{p_2}(1-q,1+q)$, $0<q<1$, где $p_1 = r(\alpha+\delta)$ и $p_2 = r(\mu+\nu-1)$. Поэтому $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \in C^p(\mathbb{R})$, где $p := \min\{p_1, p_2\}$. Осталось учесть, что $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \notin C^{p+1}(-q,q)$, если $p_1 \le p_2$, и $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \notin C^{p+1}(1-q,1+q)$, если $p_2 \le p_1$, т. е. в любом случае $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} \notin C^{p+1}(\mathbb{R})$.

3. Доказательства теорем 2 и 3.

Предложение 3. *Пусть* $\delta, \mu, \nu \in \mathbb{C}_+$, $\alpha \in \mathbb{C}$ *и* $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha} g \in L[0,1]$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1 \varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(u) g(u)\,du = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 (1-x^\delta)^{\mu-1}(1-s^2)^{\nu-1}x^\alpha g(xs)\,ds dx. \tag{40}$$

Доказательство. Равенство (40) получаем непосредственно, если в двойном интеграле выполнить замену $s = u/v$, $x = v$, $0 \le u \le 1$, $u \le v \le 1$, и воспользоваться представлением (1).

***Доказательство теоремы* 3.** Если в (40) взять $g(u) := t^{1-\frac{m}{2}} u^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}-1}(tu)$, $t > 0$, и воспользоваться равенством $\displaystyle\int_0^1 (1-s^2)^{\nu-1} s^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}-1}(su)\,ds = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu) \times u^{-\nu} J_{\frac{m}{2}+\nu-1}(u)$, $u > 0$, $m, \nu \in \mathbb{C}_+$ (см. [34], формула 11.30), то получим

$$\mathfrak{F}_m(\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(t) =$$

$$= t^{1-\frac{m}{2}} \int\limits_0^1\int\limits_0^1 (1-x^\delta)^{\mu-1}(1-s^2)^{\nu-1} x^{\frac{m}{2}+\alpha} s^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}-1}(txs)\,ds dx =$$

$$= 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)t^{1-\frac{m}{2}-\nu}\int\limits_0^1 (1-x^\delta)^{\mu-1}x^{\frac{m}{2}+\alpha-\nu}J_{\frac{m}{2}+\nu-1}(tx)\,dx =$$

$$= 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)I_{\delta,\mu,\frac{m-1}{2}+\nu,m-1+\alpha}(t), \quad t>0.$$

Первое равенство в теореме 3 доказано, а второе следует из первого.

***Доказательство теоремы* 2.** Докажем утверждение 1. При $t \geq 1$ утверждение очевидно. При $0 < t < 1$ применяем предложение 3, в котором $g(u) := 0$ при $0 < u < t$ и $g(u) := u$ при $t \leq u \leq 1$. Из предложения 2 вытекает, что $\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}g \in$ $\in L[0,1]$. Подставляя g в (40), получаем равенство

$$\int\limits_t^1 u\,\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(u)\,du =$$

$$= \int\limits_t^1 \left(\int\limits_{\frac{t}{x}}^1 (1-x^\delta)^{\mu-1}(1-s^2)^{\nu-1}x^{\alpha+1}s\,ds \right) dx = \frac{1}{2\nu}\varphi_{\delta,\mu,\nu+1,\alpha+2}(t).$$

Докажем утверждение 2. Из представления Пуассона для функций Бесселя (см. [4], гл. IV, § 3) следует[3]

$$F_1\left((1-u^2)_+^{\lambda-\frac{1}{2}}\right)(t) =$$

$$= \int\limits_{-1}^1 e^{-itu}(1-u^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,du = 2^\lambda\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}j_\lambda(t), \quad \operatorname{Re}\lambda > -\frac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Если $\lambda \in \mathbb{C}_+$, то по формуле обращения $(1-u^2)_+^{\lambda-\frac{1}{2}} = (2\pi)^{-1}2^\lambda\Gamma(\lambda+1/2) \times$ $\times \sqrt{\pi}F_1(j_\lambda)(u)$ для почти всех $u \in \mathbb{R}$. Применяя последовательно это равенство, формулу умножения (6) для преобразования Фурье F_1, равенство (7) (связь между преобразованиями F_1 и $\mathfrak{F}_1$), второе равенство в теореме 3 при $m = 2k+1$, $n = 1$ и формулу обращения (8) для $\mathfrak{F}_{2k+1}$, получаем, что при почти всех $x > 0$ левая часть равенства (3) равна

$$\int\limits_0^1 (1-u^2)^{k-1}\varphi^{(2k)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(ux)\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}2^{k-\frac{1}{2}}\Gamma(k)\sqrt{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} F_1(j_{k-\frac{1}{2}})(u)\varphi^{(2k)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(ux)\,du =$$

$$= \frac{2^{k-2}\Gamma(k)}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} j_{k-\frac{1}{2}}(t)F_1\left(\varphi^{(2k)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha}\right)\left(\frac{t}{x}\right)\frac{dt}{x} =$$

$$= \frac{2^{k-2}\Gamma(k)}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} j_{k-\frac{1}{2}}(ux)F_1(\varphi^{(2k)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(u)\,du =$$

[3] Здесь и далее $x_+ = x$, если $x > 0$, и $x_+ = 0$, если $x \leq 0$.

$$= \frac{(-1)^k 2^{k-1}\Gamma(k)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} j_{k-\frac{1}{2}}(ux) u^{2k} F_1(\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(u)\, du =$$

$$= (-1)^k 2^{k-1}\Gamma(k) \int\limits_0^{+\infty} j_{k-\frac{1}{2}}(ux) u^{2k} \mathfrak{F}_1(\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha})(u)\, du =$$

$$= \frac{(-1)^k 2^{2k-1}\Gamma(k)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-k)} \int\limits_0^{+\infty} j_{k-\frac{1}{2}}(ux) u^{2k} \mathfrak{F}_{2k+1}(\varphi_{\delta,\mu,\nu-k,\alpha-2k})(u)\, du =$$

$$= \frac{(-1)^k 2^{2k-1}\Gamma(k)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-k)} \mathfrak{F}_{2k+1}(\mathfrak{F}_{2k+1}(\varphi_{\delta,\mu,\nu-k,\alpha-2k}))(x) =$$

$$= \frac{(-1)^k 2^{2k-1}\Gamma(k)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-k)} \varphi_{\delta,\mu,\nu-k,\alpha-2k}(x).$$

Осталось учесть, что в левой и правой частях равенства (3) стоят четные и непрерывные на $\mathbb{R}$ функции.

4. Доказательства теорем 4 – 6. Гипергеометрическая функция ${}_pF_q$ определяется следующим образом [34] (формула 6.47):

$${}_pF_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q;z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k\ldots(\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k\ldots(\beta_q)_k}\frac{z^k}{k!}, \quad z\in\mathbb{C},$$

где $(a)_0 := 1$, $(a)_k := a(a+1)\ldots(a+k-1) = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$, α_i, $\beta_i \in \mathbb{C}$ и $\beta_i \notin \mathbb{Z}_- := \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$.

Предложение 4. 1. *Пусть* $\delta,\mu,\alpha+1\in\mathbb{C}_+$ *и* $\nu\in\mathbb{C}$. *Тогда при* $t>0$

$$I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) = \frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}\Gamma(\mu)}{\delta}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left((\alpha+2k+1)/\delta\right)}{\Gamma\left(\nu+1/2+k\right)\Gamma\left(\mu+(\alpha+2k+1)/\delta\right)}\frac{\left(-t^2/4\right)^k}{k!}, \tag{41}$$

$$I'_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) = -tI_{\delta,\mu,\nu+1,\alpha+2}(t).$$

2. *Если* $\mu,\alpha+1\in\mathbb{C}_+$ *и* $\nu+1/2\notin\mathbb{Z}_-$, *то при* $t>0$

$$I_{1,\mu,\nu,\alpha}(t) = \frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}\Gamma(\mu)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\nu+1/2\right)\Gamma(\mu+\alpha+1)}\times$$

$$\times{}_2F_3\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha+2}{2};\frac{2\nu+1}{2},\frac{\mu+\alpha+1}{2},\frac{\mu+\alpha+2}{2};-\frac{t^2}{4}\right). \tag{42}$$

3. *Если* $\mu,\nu\in\mathbb{C}_+$, *то при* $t>0$

$$I_{1,\mu,\nu,2\nu-1}(t) = \frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}\Gamma(\mu)\Gamma(2\nu)}{\Gamma\left(\nu+1/2\right)\Gamma(\mu+2\nu)}\,{}_1F_2\left(\nu;\frac{\mu+2\nu}{2},\frac{\mu+2\nu+1}{2};-\frac{t^2}{4}\right). \tag{43}$$

4. *Если* $\mu,\alpha+1\in\mathbb{C}_+$ *и* $\nu+\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{Z}_-$, *то при* $t>0$

$$I_{2,\mu,\nu,\alpha}(t) =$$

$$= \frac{2^{-\frac{1}{2}-\nu}\Gamma(\mu)\Gamma\left((\alpha+1)/2\right)}{\Gamma\left(\nu+1/2\right)\Gamma\left(\mu+(\alpha+1)/2\right)}\,{}_1F_2\left(\frac{\alpha+1}{2};\frac{2\nu+1}{2},\frac{2\mu+\alpha+1}{2};-\frac{t^2}{4}\right). \quad (44)$$

5. *Если* $\mu,\nu\in\mathbb{C}_+$, *то при* $t>0$ *и* $x\in\mathbb{R}$

$$I_{2,\frac{\mu}{2},\frac{\mu}{2}+\nu,2\nu-1}(t)\equiv\frac{2^{\frac{\mu}{2}-1}\Gamma\left(\mu/2\right)}{\Gamma(\mu)}I_{1,\mu,\nu,2\nu-1}(t)$$

и

$$\varphi_{2,\frac{\mu}{2},\frac{\mu}{2}+\nu,2\nu-1}(x)\equiv\frac{2^{\mu-1}\Gamma\left(\mu/2\right)\Gamma\left(\mu/2+\nu\right)}{\Gamma(\mu)}\varphi_{1,\mu,\nu,2\nu-1}(x).$$

6. *Если* $\delta,\mu,\nu+1/2\in\mathbb{C}_+$, *то* $I_{\delta,\mu+1,\nu,2\nu}(t)\equiv\delta\mu I_{\delta,\mu,\nu+1,2\nu+\delta}(t)$, $t>0$. *Если дополнительно* $\nu\in\mathbb{C}_+$, *то* $2\nu\varphi_{\delta,\mu+1,\nu,2\nu}(x)\equiv\delta\mu\varphi_{\delta,\mu,\nu+1,2\nu+\delta}(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Первое равенство в (41) получим из (9), если воспользуемся представлением (5) для функции Бесселя. Второе равенство в (41) получаем из первого. Равенство (44) непосредственно получаем из (41), а для вывода (42) следует еще учесть формулу удвоения: $\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)=2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+1/2\right)$. Равенство (43) следует из (42). Первые тождества в утверждениях 5 и 6 также вытекают из (41), а для доказательства вторых тождеств можно воспользоваться первым равенством в теореме 3 при $m=1$ и теоремой единственности для преобразования Фурье.

Предложение 5. 1. *Пусть* δ, μ, $\alpha+1$, $\delta_1,\mu_1,\alpha_1+1\in\mathbb{C}_+$ *и* $\nu\in\mathbb{C}$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1(1-u^{\delta_1})^{\mu_1-1}u^{\alpha_1}I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(tu)\,du=\frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}\Gamma(\mu)\Gamma(\mu_1)}{\delta\delta_1}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left((\alpha+2k+1)/\delta\right)\Gamma\left((\alpha_1+2k+1)/\delta_1\right)}{\Gamma\left(\nu+1/2+k\right)\Gamma\left(\mu+(\alpha+2k+1)/\delta\right)\Gamma\left(\mu_1+(\alpha_1+2k+1)/\delta_1\right)}\times$$

$$\times\frac{\left(-t^2/4\right)^k}{k!},\quad t>0. \quad (45)$$

2. *Пусть* δ, μ, $\alpha+1$, $\tau\in\mathbb{C}_+$ *и* $\nu\in\mathbb{C}$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1(1-u^{\delta})^{\tau-1}u^{\mu\delta+\alpha}I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(tu)\,du=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\tau)}{\delta\,\Gamma(\mu+\tau)}I_{\delta,\mu+\tau,\nu,\alpha}(t),\quad t>0. \quad (46)$$

3. *Пусть* δ, μ, $\nu+\dfrac{1}{2}$, $\alpha+1$, $\tau\in\mathbb{C}_+$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1(1-u^2)^{\tau-1}u^{2\nu}I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(tu)\,du=2^{\tau-1}\Gamma(\tau)I_{\delta,\mu,\nu+\tau,\alpha}(t),\quad t>0. \quad (47)$$

4. *Пусть* δ, μ, ε, $\alpha+1-\delta\varepsilon\in\mathbb{C}_+$ *и* $\nu\in\mathbb{C}$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1(1-u^{\delta})^{\varepsilon-1}u^{\alpha-\varepsilon\delta}I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(tu)\,du=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\varepsilon)}{\delta\,\Gamma(\mu+\varepsilon)}I_{\delta,\mu+\varepsilon,\nu,\alpha-\delta\varepsilon}(t),\quad t>0. \quad (48)$$

5. *Пусть* δ, μ, ε, $\nu-2\varepsilon$, $\alpha-2\varepsilon+1\in\mathbb{C}_+$. *Тогда*

$$\int\limits_t^{+\infty}u(u^2-t^2)^{\varepsilon-1}I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(u)\,du=2^{\varepsilon-1}\Gamma(\varepsilon)I_{\delta,\mu,\nu-\varepsilon,\alpha-2\varepsilon}(t),\quad t>0. \quad (49)$$

Доказательство. Равенство (45) следует из (41), а равенства (46) – (48) непосредственно получаем из (41) и (45). Докажем равенство (49). Пусть $t > 0$, $(u, x) \in D := (t, +\infty) \times (0, 1)$ и $g(u, x) := u(u^2 - t^2)^{\varepsilon - 1}(1 - x^\delta)^{\mu - 1} x^\alpha j_{\nu - \frac{1}{2}}(ux)$. Докажем, что $g \in L(D)$. Пусть $D_1 := (t, t+1) \times (0, 1)$, $D_2 := (t+1, +\infty) \times (0, 1)$, $r > t+1$ и $K_r := (t+1, r) \times (0, 1)$. Очевидно, $g \in L(D_1) \cap L(K_r)$. Пусть $\mu_0 := \operatorname{Re}\mu$, $\nu_0 := \operatorname{Re}\nu$, $\alpha_0 := \operatorname{Re}\alpha$ и $\varepsilon_0 := \operatorname{Re}\varepsilon$. Очевидно, $c_1(t, \varepsilon_0) := \sup\limits_{u > t+1} \left(\dfrac{u^2 - t^2}{u^2}\right)^{\varepsilon_0 - 1} < +\infty$. Из (5) и асимптотики для функции Бесселя (см. замечание 1) следует, что при любом $\nu \in \mathbb{C}$ существует константа $c_2(\nu) > 0$ такая, что $\left|j_{\nu - \frac{1}{2}}(x)\right| \le c_2(\nu)\big(1 + |x|\big)^{-\operatorname{Re}\nu}$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\iint\limits_{K_r} |g(u, x)|\, du dx \le$$

$$\le c_1(t, \varepsilon_0) c_2(\nu) \int\limits_0^1 |1 - x^\delta|^{\mu_0 - 1} x^{\alpha_0} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{2\varepsilon_0 - 1}}{(1 + ux)^{\nu_0}}\, du\, dx =$$

$$= c_1(t, \varepsilon_0) c_2(\nu) \int\limits_0^1 |1 - x^\delta|^{\mu_0 - 1} x^{\alpha_0 - 2\varepsilon_0}\, dx \int\limits_0^{+\infty} \frac{s^{2\varepsilon_0 - 1}}{(1 + s)^{\nu_0}}\, ds < +\infty.$$

Из последнего неравенства следует, что $g \in L(D_2)$ и, значит, $g \in L(D)$. Согласно теореме Фубини существуют следующие повторные интегралы и они равны между собой:

$$\int\limits_t^{+\infty} \left(\int\limits_0^1 g(u, x) dx\right) du = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_t^{+\infty} g(u, x) du\right) dx.$$

С учетом (9) первый повторный интеграл равен интегралу в левой части равенства (49). Второй повторный интеграл равен выражению в правой части равенства (49). Это следует из (9) и следующей формулы (см. [34], формула 11.29): $\displaystyle\int_t^{+\infty} u(u^2 - t^2)^{\varepsilon - 1} j_{\nu - \frac{1}{2}}(ux)\, du = 2^{\varepsilon - 1}\Gamma(\varepsilon) x^{-2\varepsilon} j_{\nu - \frac{1}{2} - \varepsilon}(tx)$, $t, x > 0$, $\varepsilon, \nu - 2\varepsilon + 1 \in \mathbb{C}_+$.

Из работ [35, 36] и равенства (41) непосредственно получаем следующую асимптотику для $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t)$ при $t \to +\infty$ (рассуждения такие же, как и в [31] для $\mathfrak{F}_m(\varphi_{\delta,\mu,1,\delta})(t)$, $m \in \mathbb{N}$).

Предложение 6. *Пусть* δ, μ, $\nu + \dfrac{1}{2}$, $\alpha + 1 > 0$ *и* $L \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда при* $t \to +\infty$ *справедливо равенство*

$$I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) =$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2} - \nu}\Gamma(\mu)}{\delta} \left[\frac{2^\nu \delta^\mu}{\sqrt{\pi} t^{\mu + \nu}} \left\{\cos\left(t - \frac{\pi}{2}(\mu + \nu)\right) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\} + I^1_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t)\right], \tag{50}$$

где

$$I^1_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) := \sum_{l=0}^{L} \frac{\delta(-1)^l}{2} \frac{\Gamma\left((\alpha + 1 + \delta l)/2\right)}{\Gamma\left(\nu - (\alpha + \delta l)/2\right)\Gamma(\mu - l)\,\Gamma(l + 1)} \times$$

$$\times \left(\frac{2}{t}\right)^{\alpha+1+\delta l} + o\left(\frac{1}{t^{\alpha+1+\delta L}}\right).$$

***Доказательство теоремы* 4.** Докажем утверждение I. Утверждения 1 и 2 вытекают из равенств (46) – (48). Утверждения 3 и 4 получаем из следующего результата Kuttner [30, 37] (см. также [31]):

Пусть функция $A(u)$ ограничена на каждом конечном интервале $(0, c)$, $c > 0$. Предположим, что для некоторых $\delta, \mu > 0$ и любого $t > 0$ выполняется неравенство

$$A(\delta, \mu, t) := \int_0^t (t^\delta - u^\delta)^{\mu-1} u^{\delta-1} A(u)\, du \geq 0.$$

Если для некоторого $z > 0$ $A(\delta, \mu, t) \not\equiv 0$ при $t \in [0, z]$, то $A(\varepsilon, \mu, z) > 0$ при $0 < \varepsilon < \delta$.

Если $\alpha + 1 \geq \delta > 0$, то теорему Kuttner можно применить при $A(u) = u^{\alpha+1-\delta+\frac{1}{2}-\nu} J_{\nu-\frac{1}{2}}(u)$. Следует только учесть, что (см. (41)) $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(z)$ — целая функция и $I^{(2k)}_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(0) \neq 0$, если $k \in \mathbb{Z}_+$, $\nu + \dfrac{1}{2} + k \in \mathbb{C}_+$. Поэтому $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) \not\equiv 0$ на любом отрезке $[0, z]$, $z > 0$.

Если $\mu > 1$, то из (9) интегрированием по частям получаем

$$I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) = t^{-\alpha-1-\delta(\mu-1)}(\mu-1)\delta \int_0^t (t^\delta - u^\delta)^{\mu-2} u^{\delta-1} G(u)\, du,$$

$$G(u) = \int_0^u s^{\alpha-\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu-\frac{1}{2}}(s)\, ds.$$

И в этом случае можно применить теорему Kuttner при $A(u) = G(u)$, а затем вернуться к виду (9).

Утверждение 5 вытекает из утверждения 1, если учесть, что $I_{\delta,1,\nu,\alpha}(t)$ не зависит от δ.

Докажем утверждение II. Утверждение 1 вытекает из равенства (49). Докажем утверждение 2 при $k = 1$. Из асимптотики (50) для $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}$ и неравенства $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) \geq 0$ при $t > 0$ следует, что $\mu + \nu \geq \alpha + 1$. Из асимптотики (50) для $I_{\delta,\mu,\nu-1,\alpha-2}$ и неравенства $\mu + (\nu - 1) \geq \alpha > 0$ следует, что $I_{\delta,\mu,\nu-1,\alpha-2}(+\infty) = 0$. Из второго равенства в (41) вытекает, что $I'_{\delta,\mu,\nu-1,\alpha-2}(t) = -tI_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) \leq 0$ при $t > 0$. Поэтому функция $I_{\delta,\mu,\nu-1,\alpha-2}(t)$ строго убывает на $(0, +\infty)$ (надо учесть, что эта функция является целой). Поэтому $I_{\delta,\mu,\nu-1,\alpha-2}(t) > 0$ при $t > 0$. Общий случай легко получается индукцией по $k \in \mathbb{N}$.

***Доказательство теоремы* 5.** Утверждения 1, 2 и 3 (i, ii) непосредственно получаем из асимптотики (50). Из теоремы 4 следует, что утверждения 3 (iii) и 3 (iv) достаточно доказать соответственно для случаев $\delta = 2$ и $\mu = 1$. В этих случаях также можно применить асимптотику (50).

Докажем утверждение 4. Для $m \in \mathbb{R}$ положим $H_m := L\big((0,1), u^{m-1}du\big) \cap L\big((1,+\infty), u^{\frac{m-1}{2}}du\big)$, $H_m^1 := L\big((0,+\infty), u^{m-1}du\big)$, $H_m^2 := L\big((0,+\infty), u^{\frac{m-1}{2}}du\big)$. Далее воспользуемся теоремой из [38]:

Теорема А. 1. *Пусть* $m > 0$ *и* $f \in \left(H_m^1 \cup H_m^2\right) \cap H_m$. *Если при некоторых* $\delta > 0$ *и* $\varepsilon \in \mathbb{C}$ *функция* f *ограничена на* $(0, \delta)$ *и* $\left|\mathfrak{F}_m(f)(u)\right| - \varepsilon \mathfrak{F}_m(f)(u) \in H_m^1$, *то* $\mathfrak{F}_m(f) \in H_m^1$.

2. *Пусть* $m > 0$ *и* $f \in \left(H_m^1 \cup H_m^2\right) \cap H_m$. *Если* $\mathfrak{F}_m(f)(u)$ *сохраняет знак при* $u > 0$, *а* f *непрерывна в нуле, то* $\mathfrak{F}_m(f) \in H_m^1$. *Если дополнительно* $f(0) = 0$, *то* $f(x) = 0$ *при почти всех* $x > 0$.

Пусть $f(x) := 0$ при $x \geq 1$ и $f(x) := (1 - x^\delta)^{\mu-1} x^{\alpha-2\nu}$ при $0 < x < 1$. Из равенства (9) следует, что $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) = \mathfrak{F}_{2\nu+1}(f)(t)$. Пусть δ, μ, $\nu + \dfrac{1}{2}$, $\alpha + 1 > 0$, $\alpha > 2\nu$. Если $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) \geq 0$ при $t > 0$, то функция f удовлетворяет условиям теоремы А ($m = 2\nu + 1$, $f \in H_m^1 \cap H_m$). Кроме того, f непрерывна в нуле и $f(0) = 0$. Поэтому $f(x) = 0$ при почти всех $x > 0$. А это, очевидно, не так.

***Доказательство теоремы* 6.** Докажем утверждение 1. Справедливость указанного соотношения в окрестности нуля следует из неравенства $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(+0) > 0$ (см. (9) или (41)), а в окрестности бесконечности — из неравенств $0 < \liminf\limits_{t\to+\infty} I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) t^{\alpha+1} \leq \limsup\limits_{t\to+\infty} I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) t^{\alpha+1} < +\infty$, которые вытекают из асимптотики (50). Осталось учесть, что $I_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(t) > 0$ при всех $t > 0$. Утверждение 2 доказывается аналогично.

1. *Заставный В. П.* Положительно определенные функции, зависящие от нормы. Решение проблемы Шенберга. – Донецк, 1991. – 35 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т прикл. мат. и мех., 09.91).
2. *Zastavnyi V. P.* On positive definiteness of some functions // J. Multivar. Anal. – 2000. – **73**. – P. 55 – 81.
3. *Trigub R. M., Belinsky E. S.* Fourier analysis and approximation of functions. – Boston etc.: Kluwer Acad. Publ., 2004. – 585 p.
4. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Наука, 1974.
5. *Wendland H.* Error estimates for interpolation by compactly supported radial basis functions of minimal degreee // J. Approxim. Theory. – 1998. – **93**. – P. 258 – 272.
6. *Buhmann M. D.* A new class of radial basis functions with compact support // Math. Comput. – 2000. – **70**, № 233. – P. 307 – 318.
7. *Заставный В. П., Тригуб Р. М.* Положительно определенные сплайны специального вида // Мат. сб. – 2002. – **193**, № 12. – С. 41 – 68.
8. *Заставный В. П.* Положительно определенные радиальные функции и сплайны // Докл. РАН. – 2002. – **386**, № 4. – С. 446 – 449.
9. *Wendland H.* Piecewise polinomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree // Adv. Comput. Math. – 1995. – **4**. – P. 389 – 396.
10. *Заставный В. П., Тригуб Р. М.* Положительно определенные сплайны. – Донецк, 1987. – 39 с. – Деп в УкрНИИНТИ, № 593-Ук.87.
11. *Тригуб Р. М.* Некоторые свойства преобразования Фурье меры и их применение // Теория приближения функций: Тр. междунар. конф. по теории приближения функций (Киев, 1983 г.). – М.: Наука, 1987. – С. 439 – 443.
12. *Тригуб Р. М.* Критерий характеристической функции и признак типа Пойа для радиальных функций нескольких переменных // Теория вероятностей и ее применения. – 1989. – **34**. – С. 805 – 810.
13. *Тригуб Р. М.* Положительно определенные радиальные функции и сплайны // Междунар. конф. по конструктивной теории функций (Варна, 25 – 31 мая 1987 г.): Тез. докл. – София, 1987. – С. 123.
14. *Тригуб Р. М.* Положительно определенные функции и сплайны // Теория функций и приближений: Тр. 5-й Саратов. зим. школы (25 янв. – 4 февр. 1990 г.). – Саратов, 1992. – Ч 1. – С. 68 – 75.
15. *Trigub R. M.* Some topics in Fourier analysis and approximation theory. – Donetsk, 1995. – 71 p. – Preprint. – Internet: funct-an/9612008.

16. *Тригуб Р. М.* О положительно определенных радиальных сплайнах специального вида // Int. Conf. OFEA'2001 (Optimization of Finite Element Approximation & Splines and Wavelets): Abstr. St. Petersburg, 2001. – P. 174.
17. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
18. *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях. – Харьков: Вища шк., 1984. – 120 с.
19. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.: Гостехиздат, 1948.
20. *Askey R., Pollard H.* Some absolutely monotonic and completely monotonic functions // SIAM J. Math. Anal. – 1974. – **5**. – P. 58 – 63.
21. *Fields J. L., Ismail M. E.* On the positivity of some ${}_1F_2$'s // Ibid. – 1975. – **6**. – P. 551 – 559.
22. *Askey R., Gasper G.* Positive Jacobi polynomial sums, II // Amer. J. Math. – 1976. – **98**, № 3. – P. 709 – 737.
23. *Makai E.* On a monotonic propertyof certain Sturm – Liouville functions // Acta math. Acad. sci. hung. – 1952. – **3**. – P. 165 – 172.
24. *Moak D. S.* Completely monotonic functions of the form $s^{-b}(s^2+1)^{-a}$ // Rocky Mountain J. Math. – 1987. – **17**, № 4. – P. 719 – 725.
25. *Steinig J.* The sign of Lommel's function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **163**. – P. 123 – 129.
26. *Gasper G.* Positive integrals of Bessel functions // SIAM J. Math. Anal. – 1975. – **6**, № 5. – P. 868 – 881.
27. *Cooke R. G.* A monotonic property of Bessel functions // Math. Comput. – 1937. – **12**. – P. 180 – 185.
28. *Gneiting T., Konis K., Richards D.* Experimental approaches to Kuttner's problem // Exp. Math. – 2001. – **10**, № 1. – P. 117 – 124.
29. *Пасенченко О. Ю.* Достатні умови характеристичної функції для двовимірного ізотропного розподілу // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1995. – Вип. 53. – С. 138 – 141.
30. *Kuttner B.* On the Riesz means of a Fourier series // J. London Math. Soc. – 1944. – **19**, № 2. – P. 77 – 84.
31. *Golubov B. I.* On Abel – Poisson type and Riesz means // Anal. Math. – 1981. – **7**. – P. 161 – 184.
32. *Misiewicz J. K., Richards D. St. P.* Positivity of integrals of Bessel functions // SIAM J. Math. Anal. – 1994. – **25**, № 2. – P. 596 – 601.
33. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
34. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматгиз, 1974.
35. *Wright E. M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // J. London Math. Soc. – 1935. – **10**. – P. 286 – 293.
36. *Wright E. M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // Proc. London Math. Soc. – 1940. – **46**, № 2. – P. 389 – 408.
37. *Kuttner B.* On positive Riesz and Abel typical means // Ibid. – 1947. – **49**. – P. 328 – 352.
38. *Заставный В. П.* Достаточные условия интегрируемости преобразования Ханкеля // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2004. – Вып. 9. – С. 68 – 75.

Получено 14.10.2004,
после доработки — 11.01.2005