УДК 517.94

Н. И. Шкиль, Н. М. Матвеенко

Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с иррегулярной особой точкой

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$z^r d^2\omega/dz^2 = A(z)\,\omega \tag{1}$$

с иррегулярной особой точкой $z = 0$, где ω — n-мерный вектор, $r > 2$ — целое число, z — комплексная переменная, $A(z)$ — $(n \times n)$-матрица, обладающая равномерным асимптотическим разложением

$$A(z) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s z^s$$

при $z \to 0$ в области $S = \{0 < |z| < \delta,\ \alpha < \arg z < \beta\}$, δ, α, β — действительные постоянные.

Заметим, что системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка вида (1) исследовались многими авторами. Так, в работах [1—6] получены решения таких систем при различных предположениях относительно корней характеристического уравнения

$$\det \| A_0 - \lambda E \| = 0 \tag{2}$$

(E — единичная матрица) и соответствующих им элементарных делителей. Однако переход от системы (1) к системе первого порядка усложнит решение полученной системы. Поэтому целесообразно строить решение системы (1) непосредственно.

В данной работе построены формальные решения системы (1) в случае, когда характеристическое уравнение (2) имеет простые и отличные от нуля корни, а также в случае кратного корня характеристического уравнения (2), которому отвечает несколько кратных элементарных делителей. Установлены асимптотические (в смысле [7]) свойства этих решений.

1. Пусть характеристическое уравнение (2) имеет простые и отличные от нуля корни, т. е.

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \qquad i \neq j; \qquad \lambda_j \neq 0, \qquad i, j = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Рассмотрим случай четного ранга особой точки. (Напомним, что рангом особой точки называется (по Пуанкаре) число $r - 1$.) С помощью подстановки $z = \mu^2$ преобразуем систему (1) к системе

$$(\mu^{2r-2}/4)\, d^2\omega/d\mu^2 - (\mu^{2r-3}/4)\, d\omega/d\mu = B(\mu)\,\omega, \tag{4}$$

где $B(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} B_s \mu^s$, $\mu \in S_1 \subset S$, $B_{2k} = A_k$, $B_{2k+1} = 0$, $k = 0, 1, \ldots$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (3). *Тогда система дифференциальных уравнений* (4) *имеет формальную матрицу-решение вида*

$$W(\mu)=U(\mu)\exp\left(2\int_a^{\mu}\sigma^{-(r-1)}\Lambda(\sigma)\,d\sigma\right), \tag{5}$$

где $U(\mu)$ — $(n\times n)$-*матрица*, $\Lambda(\mu)$ — *диагональная* $(n\times n)$-*матрица, допускающие формальные разложения*

$$U(\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}U_s\mu^s,\quad \Lambda(\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\Lambda_s\mu^s; \tag{6}$$

$a\in S_1$ — *фиксированная точка; интегрирование ведется вдоль любой кривой Жордана, лежащей в секторе* S_1.

Доказательство. Предположим, что $W(\mu)$ — формальная матрица-решение уравнения (4). Подставляя (5) в уравнение (4), получим тождество $B(\mu)U(\mu)-U(\mu)\Lambda^2(\mu)=(\mu^{2r-2}/4)U''(\mu)-(\mu^{2r-3}/4)U'(\mu)-(r\mu^{r-2}/2)\times\times U(\mu)\Lambda(\mu)+(\mu^{r-1}/2)[2U'(\mu)\Lambda(\mu)+U(\mu)\Lambda'(\mu)]$. Приравнивая в этом тождестве коэффициенты при одинаковых степенях μ, приходим к бесконечной алгебраической матричной системе уравнений

$$B_0U_0-U_0\Lambda_0^2=0, \tag{7}$$

$$B_0U_s-U_s\Lambda_0^2=2U_0\Lambda_0\Lambda_s+F_s,\quad s=1,2,\ldots, \tag{8}$$

где

$$F_s=\sum_{i=1}^{s-1}U_0\Lambda_i\Lambda_{s-i}+\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{i_0=0}^{s-i}U_i\Lambda_{i_0}\Lambda_{s-i-i_0}-\sum_{i=1}^{s}B_iU_{s-i}+(s-2r+2\times$$

$$\times(s-2r+4)U_{s-2r+4}/4-r\sum_{i=0}^{s-r+2}U_i\Lambda_{s-r+2-i}/2+\sum_{i=0}^{s-r+2}iU_i\Lambda_{s-r+2-i}+$$

$$+\sum_{i=0}^{s-r+1}(s-r+2-i)U_i\Lambda_{s-r+2-i}/2.$$

Следовательно, если матрица (5) — интегральная для системы (3), то коэффициенты формальных рядов (6) должны быть решениями системы уравнений (7), (8). Легко доказать и обратное утверждение.

Докажем разрешимость уравнений (7), (8), указав при этом и способ определения коэффициентов рядов (6). Как известно [8], существует неособенная матрица T такая, что $R_0=T^{-1}B_0T=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$. Умножим обе части уравнений (7), (8) слева на матрицу T^{-1} и, введя обозначения

$$Q_s=T^{-1}U_s,\qquad N_s=T^{-1}F_s, \tag{9}$$

перепишем систему (7), (8) таким образом:

$$R_0Q_0-Q_0\Lambda_0^2=0, \tag{10}$$

$$R_0Q_s-Q_s\Lambda_0^2=2Q_0\Lambda_0\Lambda_s+N_s,\quad s=1,2,\ldots. \tag{11}$$

Положив в уравнении (10)

$$Q_0=E, \tag{12}$$

получим

$$\Lambda_0=\pm\sqrt{R_0}. \tag{13}$$

Тогда уравнение (11) в силу (12), (13) перепишется так:

$$R_0Q_s-Q_sR_0=2\Lambda_0\Lambda_s+N_s,\quad s=1,2,\ldots. \tag{14}$$

Так как матрица R_0 — диагональная, то диагональные элементы матрицы в левой части уравнения (14) равны нулю. Поэтому для разрешимости этого уравнения на элементы диагональной матрицы Λ_s наложим условие $\lambda_{sii} = -\nu_{sii}/2\lambda_{0ii}$, $i=\overline{1,n}$; $s = 1, 2, \ldots$, где ν_{sii}, λ_{0ii} — соответственно диагональные элементы матриц N_s, Λ_0. Недиагональные элементы матрицы Q_s в силу (3) равны $q_{sij} = \nu_{sij}/(\lambda_j - \lambda_i)$, $i \neq j$; $i, j = \overline{1, n}$; $s = 1, 2, \ldots$. Диагональные элементы матрицы Q_s остаются произвольными. Ради простоты положим $q_{sii} = 0$, $i = \overline{1, n}$; $s = 1, 2, \ldots$. Матрицы Q_s, Λ_s определены. Из (12) следует, что

$$U_0 = T, \tag{15}$$

а из (9) определяем матрицы $U_s = TQ_s$, $s = 1, 2, \ldots$. Поскольку при достаточно малых $|\mu|$ в силу (15) $\det W(\mu) \neq 0$, то $W(\mu)$ — фундаментальная матрица-решение системы (4).

Так как матрица Λ_0 в силу (13) имеет два различных значения, то можно построить две формальные матрицы-решения $W_1(\mu)$, $W_2(\mu)$ системы (4). Обычным образом доказывается, что эти фундаментальные матрицы-решения линейно независимы при малых $|\mu|$. Тогда общее формальное решение системы (4) можно записать в виде $\omega(\mu) = W_1(\mu)c_1 + W_2(\mu)c_2$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные n-мерные векторы [9]. Теорема доказана.

2. Исследуем асимптотический характер формального решения, найденного в п. 1. С этой целью систему (4) приведем к системе первого порядка

$$(\mu^{r-1}/2)\, dy/d\mu = C(\mu)\, y, \tag{16}$$

где $y = \operatorname{colon}(\omega(\mu), (\mu^{r-1}/2)\, d\omega(\mu)/d\mu)$ — $2n$-мерный вектор, $C(\mu)$ — $(2n \times 2n)$-матрица вида

$$C(\mu) = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ B(\mu) & r\mu^{r-2}E/2 \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$Y(\mu) = \begin{Vmatrix} W_1(\mu) & W_2(\mu) \\ \mu^{r-1}W_1'(\mu)/2 & \mu^{r-1}W_2'(\mu)/2 \end{Vmatrix}.$$

Здесь $W_1(\mu)$, $W_2(\mu)$ — построенные ранее две линейно независимые формальные фундаментальные матрицы системы (4). Можно доказать, что $Y(\mu)$ — формальная матрица-решение системы (16). Представим матрицу $Y(\mu)$ в виде $Y(\mu) = U(\mu)\exp\left(\int\limits_a^\mu \sigma^{-(r-1)}\Lambda(\sigma)\, d\sigma\right)$, где

$$U(\mu) = \begin{Vmatrix} U_1(\mu) & U_2(\mu) \\ \mu^{r-1}U_1'(\mu)/2 + U_1(\mu)\Lambda_1(\mu) & \mu^{r-1}U_2'(\mu)/2 + U_2(\mu)\Lambda_2(\mu) \end{Vmatrix},$$

$$\Lambda(\mu) = \operatorname{diag}\{\Lambda_1(\mu), \Lambda_2(\mu)\}.$$

Запишем систему (16) следующим образом:

$$(\mu^{r-1}/2)\, dy/d\mu = [C_0 + C_1(\mu)]\, y, \tag{17}$$

где

$$C_0 = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ B_0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C_1(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} C_s\mu^s.$$

Существует неособенная матрица G такая, что

$$\Omega_0 = G^{-1}C_0G = \begin{Vmatrix} \sqrt{R_0} & 0 \\ 0 & -\sqrt{R_0} \end{Vmatrix}.$$

Тогда с помощью замены $y(\mu) = G\varphi(\mu)$ систему (17) преобразуем к системе

$$(\mu^{r-1}/2)\, d\varphi/d\mu = [\Omega_0 + \Omega_1(\mu)]\, \varphi, \tag{18}$$

где $\Omega_1(\mu) = G^{-1}C_1(\mu)\, G$.

Если $Y(\mu)$ — формальная матрица-решение системы (16), то очевидно, что $\Phi(\mu) = G^{-1}Y(\mu)$ — формальная матрица-решение системы (18). Обозначим $G^{-1}U(\mu) = P(\mu)$ и рассмотрим матрицу

$$\Phi_m(\mu) = P_m(\mu)\exp\left(\int_a^\mu \sigma^{-(r-1)}\Lambda_m(\sigma)\,d\sigma\right),$$

где $P_m(\mu)$, $\Lambda_m(\mu)$ — усеченные на m-ом члене матрицы $P(\mu)$ и $\Lambda(\mu)$.

Так как матрица $\Phi(\mu)$ — фундаментальная, то общий вектор-решение системы (18)

$$\varphi(\mu) = P(\mu)\exp\left(\int_a^\mu \sigma^{-(r-1)}\Lambda(\sigma)\,d\sigma\right)b, \tag{19}$$

где b — постоянный $2n$-мерный вектор. Модификацией методов [2, 5] можно доказать, что формальный вектор-решение имеет асимптотический характер и справедлива такая теорема.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы* 1, *а также условия*: $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $\operatorname{Im}\lambda_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, *то существует постоянная* K, *не зависящая от* μ *и такая, что в секторе* $S = \{0 < |z| < \delta,\ 0 < \arg z < \pi/(r-2)\}$ *выполняется неравенство* $\|\varphi(\mu) - \varphi_m(\mu)\| \leqslant K\mu^{m+1}$, *где* $\varphi_m(\mu)$ — *усеченный на m-ом члене вектор* (19).

Учитывая, что $y(\mu) = G\varphi(\mu)$ и что $2n$-мерный вектор $y = \operatorname{colon}(\omega(\mu), (\mu^{r-1}/2)\,d\omega(\mu)/d\mu)$, получаем оценки $\omega(\mu) = \omega_m(\mu) + O(\mu^{m+1})$, $d\omega(\mu)/d\mu = d\omega_m(\mu)/d\mu + O(\mu^{m-r+2})$.

3. Предположим, что характеристическое уравнение (2) имеет n-кратный корень $\varphi_0 \neq 0$ и ему соответствует несколько, например $l > 1$, кратных элементарных делителей кратности $s_1, s_2, \ldots, s_l$, $s_1 + s_2 + \ldots + s_l = n$. Тогда, как известно [8], существует неособенная матрица P такая, что матрица $W = P^{-1}A_0P$ имеет вид $W = \operatorname{diag}\{W_1, W_2, \ldots, W_l\}$, где W_j — клетка Жордана размером $(s_j \times s_j)$:

$$W_j = \begin{Vmatrix} \varphi_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varphi_0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varphi_0 \end{Vmatrix}, \qquad j = \overline{1, l}.$$

Структура решений системы (1) существенно зависит от того, каковы кратности элементарных делителей, а также четность числа $s_j(r-2)$. Поэтому рассмотрим два случая: А) кратность элементарных делителей совпадает, т. е. $s_1 = s_2 = \ldots = s_l = m = n/l$; Б) кратность элементарных делителей различна, причем $s_1 > s_2 > \ldots > s_l$. В обоих случаях предполагаем, что число $s_j(r-2)$ — четное, т. е. $s_j(r-2) = 2h_j$, $j = \overline{1, l}$, где h_j — натуральные числа.

Рассмотрим сначала случай А. Осуществляя в системе (1) подстановку $z = \mu^m$, преобразуем ее к системе

$$(\mu^{2h+2}/m^2)\,d^2\omega/d\mu^2 - (m-1)(\mu^{2h+1}/m^2)\,d\omega/d\mu = B(\mu)\,\omega, \tag{20}$$

где $B(\mu) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} B_s\mu^s$, $B_{km} = A_k$, $B_{km+j} = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $j = \overline{1, m-1}$.

Теорема. 3. *Пусть характеристическое уравнение* (2) *имеет один* n-*кратный корень* $\varphi_0 \neq 0$, *которому соответствует* $l > 1$ *элементарных делителей* $(\lambda - \varphi_0)^m$, $(\lambda - \varphi_0)^m, \ldots, (\lambda - \varphi_0)^m$ *кратности* m, $ml = n$.

Тогда для того чтобы вектор

$$\omega(\mu) = u(\mu)\exp\left(m\int_a^\mu \sigma^{-(h+1)}\lambda(\sigma)\,d\sigma\right), \tag{21}$$

где $u(\mu) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} u_s\mu^s$, $\lambda(\mu) = \sum\limits_{s=0}^{\infty}\lambda_s\mu^s$ *и* $u_0 \neq 0$, *был формальным вектором-*

решением системы (20), *необходимо и достаточно, чтобы число* $\omega_1 = (2\lambda_0\lambda_1)^m$ *было ненулевым корнем уравнения*

$$\det \begin{Vmatrix} \omega - c_{m1} & -c_{mm+1} & \cdots & -c_{mn-m+1} \\ -c_{2m1} & \omega - c_{2mm+1} & \cdots & -c_{2mn-m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -c_{n1} & -c_{nm+1} & \cdots & \omega - c_{nn-m+1} \end{Vmatrix} = 0, \qquad (22)$$

где $c_{m1}, c_{mm+1}, \ldots, c_{nn-m+1}$ — *элементы матрицы* $C_m = P^{-1}B_mP$.

Доказательство. Необходимость. Пусть вектор (21) — формальный вектор-решение системы (20). Подставляя (21) в (20), получим тождество

$$[B(\mu) - \lambda^2(\mu)E]\,u(\mu) = \mu^{2h+2}u''(\mu)/m^2 - (m-1)\,\mu^{2h+1}u'(\mu)/m^2 -$$
$$-(h+m)\,\mu^h u(\mu)\,\lambda(\mu)/m + \mu^{h+1}[2u'(\mu)\,\lambda(\mu) + u(\mu)\,\lambda'(\mu)]/m.$$

Приравнивая в нем коэффициенты при одинаковых степенях μ, имеем

$$[B_0 - \lambda_0^2E]\,u_k = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{i_0=0}^{k-i} u_i\lambda_{i_0}\lambda_{k-i-i_0} + f_k, \qquad (23)$$

где

$$f_k = k-2h)\ k-2h-m)\,u_{k-2h}/m^2 - \sum_{i=1}^{k} B_iu_{k-i} - (h+m)\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{k-h} u_i\lambda_{k-h-i}/m + 2\sum_{i=1}^{k-h} iu_i\lambda_{k-h-i}/m + \sum_{i=0}^{k-h-1}(k-h-i)\,u_i\lambda_{k-h-i}/m,$$
$$k = 0, 1, \ldots.$$

Введя векторы $q_k = P^{-1}u_k$, $\varphi_k = P^{-1}f_k$, уравнение (23) можно записать так:

$$Jq_k = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{i_0=0}^{k-i} q_i\lambda_{i_0}\lambda_{k-i-i_0} + \varphi_k, \qquad (24)$$

$$J = \begin{Vmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_l \end{Vmatrix}, \qquad J_j = \left.\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}\right\} m, \quad j = \overline{1, l}. \qquad (25)$$

Положим в (24) $k = m$ и введем обозначение

$$\alpha_{m-i} = \sum_{i_0=0}^{m-i} \lambda_{i_0}\lambda_{m-i-i_0}. \qquad (26)$$

Тогда

$$Jq_m = \sum_{i=0}^{m-1} q_i\alpha_{m-i} - C_mq_0. \qquad (27)$$

В силу (25) уравнение (27) распадается на l уравнений:

$$J_jq_{mj} = \sum_{i=0}^{m-1} q_{ij}\alpha_{m-i} - \sum_{p=1}^{l} C_{pj}q_{0p}, \quad j = \overline{1, l}, \qquad (28)$$

где C_{pj}, $p, j = \overline{1, l}$, — матрица размером $(m \times m)$, образованная из соответствующих элементов матрицы $C_m = P^{-1}B_mP$. Умножая обе части уравнения (28) слева на J_j^{m-1} и выполняя преобразования, получаем

$$\sum_{i_{m-1}=m-1}^{m-1}\sum_{i_{m-2}=m-2}^{i_{m-1}-1}\cdots\sum_{i_0=0}^{i_1-1} q_{i_0j}\alpha_{i_1-i_0}\alpha_{i_2-i_1}\cdots\alpha_{m-i_{m-1}} - J_j^{m-1}\sum_{p=1}^{l} C_{pj}q_{0p} = 0.$$

Отсюда

$$q_{0j}(\alpha_1)^m - J_j^{m-1}\sum_{p=1}^{l} C_{pj}q_{0p} = 0, \quad j=\overline{1, l}. \tag{29}$$

Взяв в каждом из векторных уравнений (29) первые скалярные уравнения, получим однородную систему

$$D(\omega_1)\rho_0 = 0, \tag{30}$$

где $D(\omega)$ — матрица из (22), а l-мерный вектор ρ_0 имеет вид $\rho_0 = \operatorname{colon}(\{q_{01}\}_1, \{q_{02}\}_1, \ldots, \{q_{0l}\}_1)$, где $\{q_{0j}\}_1$, $j=\overline{1, l}$, — первые компоненты векторов q_{0j}. Так как вектор u_0, согласно условию теоремы, ненулевой, то и вектор $q_0 = P^{-1}u_0$ ненулевой. Но $J_jq_{0j}=0$ для $j=\overline{1, l}$, тогда $\rho_0 \neq 0$. А это и означает, что $\det D(\omega_1) = 0$. Необходимое условие доказано.

Достаточность. Необходимо показать, что при выполнении условий теоремы система уравнений (23) разрешима. Запишем ее в виде

$$J_jq_{0j} = 0, \tag{31}$$

$$J_jq_{kj} = \sum_{i=0}^{k-1} q_{ij}\alpha_{k-i}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{32}$$

$$J_jq_{sj} = \sum_{i=0}^{s-1} q_{ij}\alpha_{s-i} + \varphi_{sj}, \quad s = m, m+1, \ldots; \ j=\overline{1, l}, \tag{33}$$

где φ_{sj}, $j=\overline{1, l}$, — вектор размерности, m, образованный из соответствующих компонент вектора $\varphi_s = P^{-1}f_s$, $s = m, m+1, \ldots$. Учитывая вид матрицы J_j, на основании (31) делаем вывод, что $\{q_{0j}\}_\nu = 0$, $\nu=\overline{2, m}$. Первые компоненты этих векторов определим из системы уравнений (30).

Так как ω_1 — простой корень уравнения (22), то ранг матрицы $D(\omega_1)$ равен $l-1$. Будем считать, что минор $(l-1)$-го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы $D(\omega_1)$, отличен от нуля. Тогда, обозначив

$$\tilde{D} = \begin{Vmatrix} d_{11}d_{12} & \ldots & d_{1l-1} \\ d_{21}d_{22} & \ldots & d_{2l-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{l-11}d_{l-12} & \ldots & d_{l-1l-1} \end{Vmatrix}, \quad \xi = \begin{Vmatrix} d_{1l} \\ d_{2l} \\ \vdots \\ d_{l-1l} \end{Vmatrix}, \quad \rho_0 = \begin{Vmatrix} \{q_{01}\}_1 \\ \{q_{02}\}_1 \\ \vdots \\ \{q_{0l-1}\}_1 \end{Vmatrix},$$

где d_{ij}, $i, j = \overline{1, l-1}$, — элементы матрицы $D(\omega_1)$, и полагая $\{q_{0l}\}_1 = 1$, из (3) находим $\rho_0 = -\tilde{D}^{-1}\xi$, $\tilde{D}^{-1}$ — матрица, обратная к $\tilde{D}$. Таким образом, вектор ρ_0, а вместе с ним и вектор q_0, определены. Перейдем к определению вектора q_1. Для этого положим в (32) $k=1$. Имеем $J_jq_{1j} = q_{0j}\alpha_1$, $j=\overline{1, l}$. Отсюда находим $\{q_{1j}\}_2 = \{q_{0j}\}_1\alpha_1$; $\{q_{1j}\}_\nu = 0, \nu = \overline{3, m}$, $j=\overline{1, l}$. Первые компоненты векторов q_{1j} найдем из уравнения (33), положив в нем $s=m+1$. Умножив полученное уравнение слева на матрицу J_j^{m-1} и выполнив соответствующие преобразования, приходим к следующей системе уравнений:

$$D(\omega_1)\rho_1 = -m(\alpha_1)^{m-1}\alpha_2\rho_0 + \zeta_1. \tag{34}$$

T — знак транспонирования, ζ_1 — вектор, составленный из первых компонент векторов $J_j^{m-1}\sum_{p=1}^{l} C_{pj}J_j^Tq_{01}\alpha_1 + J_j^{m-1}\sum_{p=1}^{l} C_{pj}q_{1p} + J_j^{m-1}\varphi_{m+1j}$, Так как по условию теоремы определитель неоднородной системы равен нулю, то она имеет решение тогда и только тогда, когда вектор правой части ортогонален к вектору-решению соответствующей однородной союзной системы. А это дает

$$m(\alpha_1)^{m-1}\alpha_2(\rho_0\cdot\bar{y})+(\zeta_1\cdot\bar{y})=0, \tag{35}$$

где $\bar{y}$ — вектор-решение однородной союзной системы.

Так как $\omega_1\neq 0$, то из (35) следует $\alpha_2=-(\zeta_1\cdot\bar{y})/m(\alpha_1)^{m-1}(\rho_0\cdot\bar{y})$, а из (34) определим вектор ρ_1, или компоненты векторов q_{1j}, $j=\overline{1,l}$. Зная α_2, из соотношения (26), полагая в нем $m-i=2$, определяем λ_2.

Методом индукции можно показать, что из уравнений (31)—(33) определяются $\alpha_{m_1+1}+$ и вектор q_{m_1}, где m_1 — любое натуральное число. Таким образом, доказана достаточность, и теорема полностью доказана.

В случае Б справедлива такая теорема.

Теорема 4. *Пусть характеристическое уравнение* (2) *имеет один n-кратный корень $\varphi_0\neq 0$, которому соответствует $l>1$ элементарных делителей $(\lambda-\varphi_0)^{s_1}, (\lambda-\varphi_0)^{s_2}, \ldots, (\lambda-\varphi_0)^{s_l}$ кратности $s_1, s_2, \ldots, s_l$, $\sum_{j=1}^{l} s_j=n$. Для того чтобы вектор $\omega_j(z)=u_j(\mu_j)\exp\left(s_j\int_a^{\mu}\sigma_j^{-(h_j+1)}\lambda_j(\sigma_j)\,d\sigma_j\right)$, где векторы $u_j(\mu_j)$ и функции $\lambda_j(\mu_j)$ представлены рядами*

$$u_j(\mu_j)=\sum_{s=0}^{\infty}u_{js}\mu_j^s,\qquad \lambda_j(\mu_j)=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda_{js}\mu_j^s,\quad \mu_j=z^{1/h_j},$$

причем $u_{0j}\neq 0$, $\lambda_{1j}\neq 0$, был формальным вектором-решением системы (1), *необходимо и достаточно, чтобы число $\omega_j=(2\lambda_0\lambda_{1j})^{s_j}$ было ненулевым корнем уравнения $\det D_j(\omega_j=0$, где*

$$D_j(\omega)=\begin{Vmatrix} c_{s_1,1} & c_{s_1,s_1+1} & \cdots & c_{s_1,k_{j-1}+1} \\ c_{s_1+s_2,1} & c_{s_1+s_2,s_1+1} & \cdots & c_{s_1+s_2,k_{j-1}+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k_j,1} & c_{k_j,s_1+1} & \cdots & \omega-c_{k_j,k_{j-1}+1}\end{Vmatrix},$$

$k_j=s_1+s_2+\ldots+s_j$, а $c_{s_1,1}, c_{s_1,s_1+1}, \ldots, c_{k_j,k_{j-1}+1}$ — элементы матрицы $C_{s_j}=P^{-1}B_{s_j}P$, и ранг матрицы $D_j(\omega_j)$ был равен $j-1$, $j=\overline{2,l}$.

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 3.

1. *Коддингтон Э., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958.— 474 с.
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1968.— 464 с.
3. *Терещенко Н. И.* О решениях некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с особыми точками. —Укр. мат. журн. 1958, 10, № 2, с. 220—223.
4. *Turrittin H. L.* Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point.— Acta Math., 1955, 93, N 1/2, p. 27—66.
5. *Шкиль Н. И.* О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами: Автореф. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1968. — 23 с.
6. *Григоренко В. К.* Об асимптотическом разложении решений систем линейных дифференциальных уравнений : Автореф. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1972.— 16 с.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 576 с.
9. *Павлюк И. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных систем дифференциальных уравнений второго порядка.— Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1971.— 208 с.

Киев. пед. ин-т

Поступила 21.06.83