УДК 517.925

И. О. Парасюк

О сохранении многомерных инвариантных торов гамильтоновых систем

В данной работе рассмотрена задача о сохранении инвариантных торов и квазипериодических движений интегрируемой гамильтоновой системы на $2n$-мерном симплектическом многообразии при малом изменении функции

Гамильтона. Изучен новый случай, когда инвариантные торы имеют размерность $r > n$ и не расслаиваются на инвариантные торы меньшей размерности. С помощью результатов теории диофантовых приближений на подмногообразиях евклидова пространства доказан аналог теоремы Колмогорова—Арнольда—Мозера (КАМ) [1—4].

1. Гамильтоновы системы с многомерными инвариантными торами. Пусть (M^{r+s}, ω^2) — симплектическое многообразие, I — гамильтонов изоморфизм пространства 1-форм на пространство векторных полей на M^{r+s}, определяемый соотношением $\omega^2(\cdot, I\omega^1) = \omega^1(\cdot)$, где ω^1 — произвольная 1-форма на M^{r+s} [1]. Форма ω^2 порождает скобку Пуассона гладких функций на $M^{r+s}: \{f_1, f_2\} = df_1(Idf_2) = \omega^2(Idf_2, Idf_1)$.

Рассмотрим случай, когда M^{r+s} — главное расслоение, реализованное с помощью гладкого свободного действия группы Ли T^r, являющейся r-мерным тором, $r \geqslant s$ [5]. Пусть M — некоторая окрестность фиксированной орбиты группы T^r в M^{r+s}. M с формой $\omega^2|_M$, которую по-прежнему будем обозначать ω^2, есть симплектическое многообразие. Главное расслоение локально тривиально, поэтому считаем, что M диффеоморфно $D^s \times T^r$, где D^s — шар в пространстве $\mathbb{R}^s$. Пусть $y = (y_1, \dots, y_s)$ — координаты в $\mathbb{R}^s$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r) \bmod 2\pi$ — координаты на торе T^r. Действие группы T^r описывается параллельными сдвигами по координатам φ.

Предположим теперь, что форма ω^2 инвариантна относительно действия T^r в M, а функции y_i, y_j попарно находятся в инволюции: $\{y_i, y_j\} = 0$, $i, j = \overline{1, s}$. Тогда коэффициенты формы ω^2 и матрица изоморфизма I в координатах $x = (y, \varphi)$ от φ не зависят. Рассмотрим в координатах $x = (y, \varphi)$ уравнение с функцией Гамильтона $H(x)$:

$$\dot{x} = I(y) \operatorname{grad}^T H(x), \tag{1}$$

где $\operatorname{grad}^T H(x)$ — вектор-столбец с компонентами $(\partial H/\partial y_1, \dots, \partial H/\partial \varphi_r)$.

Теорема 1. *При указанных предположениях уравнения движения с функцией Гамильтона $H(y)$ имеют вид*

$$\dot{y} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(y), \tag{2}$$

где $\omega(y) = (\omega_1(y), \dots, \omega_r(y))$.

Доказательство. Правые части уравнений движения не зависят от φ. Уравнения движения для компонент y можно представить в виде $\dot{y}^i = \{y, H(y)\} \equiv 0$. Таким образом, всякое движение системы с гамильтонианом $H(y)$ квазипериодично и происходит по r-мерным торам $y = \text{const}$.

Примером формы, для которой справедлива теорема 1, может служить форма вида $\omega^2 = 2^{-1}\Sigma A_{ij}(y)\, dy_i \wedge dy_j + \Sigma B_{ij} dy_i \wedge d\varphi_j + 2^{-1}\Sigma C_{ij} d\varphi_i \wedge d\varphi_j$. Здесь $A = \{A_{ij}\}$ — произвольная кососимметричная $(s \times s)$-матрица, $C = \{C_{ij}\}$ постоянная кососимметричная $(r \times r)$-матрица ранга $r - s$ (естественно, предполагаем, что $r - s$ — четно). Пусть $a^{(1)}, \dots, a^{(s)}$ — базис ядра C. Матрицу $B = \{B_{ij}\}$ выберем таким образом, чтобы $Ba^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}$, где $\mathbf{e}^{(i)}$ — i-й орт пространства $\mathbb{R}^s$. Так построенная форма ω^2 невырождена, а уравнения движения с функцией гамильтона $H(y)$ имеют вид

$$\dot{y} = 0, \quad \dot{\varphi} = \Sigma \partial/\partial y_i H(y)\, a^{(i)} \equiv \omega(y). \tag{3}$$

Установим аналог теоремы КАМ для возмущенной системы с гамильтонианом $H(y) + h(y, \varphi)$. Ограничимся рассмотрением вещественно-аналитического случая.

2. Условия невырожденности. Будем предполагать, что компоненты вектора $\omega(y)$ в уравнении (2) — вещественно-аналитические функции в области $G \subset \mathbb{C}^s$ и имеет место равенство $\omega(y) = b^{(1)}\lambda^{(1)}(y + \dots$ $\dots + b^{(l)}\lambda^{(l)}(y)$, где $\lambda^{(i)}(y)$ — вещественно-аналитические функции в области

$G, b^{(1)}, \ldots, b^{(l)}$ — линейно независимые векторы в $\mathbb{R}^r$, которые, как и натуральное число l, определяются лишь формой ω^2 и не зависят от конкретного гамильтониана (ср. с приведенным выше примером).

Исходя из метрических соображений, считаем, что при некотором $\gamma > 0$ выполняются условия: $\sum_{i=1}^{s} |(n, b^{(i)})| \geqslant \gamma \|n\|^{-r} \forall n \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}$, где $\|n\| = |n_1| + \ldots + |n_r|$, $(n, b^{(i)})$ — евклидово скалярное произведение.

Пусть $\hat{G} = \{z \in \mathbb{C}^s \mid |z_1| < \sigma, (z_2, \ldots, z_s) \in \tilde{G}\}$, $\tilde{G}$ — область в $\mathbb{C}^{s-1}$, $\operatorname{Re} \tilde{G} \neq \varnothing$. Предположим, что существует вещественно-аналитический диффеоморфизм ϖ области $\hat{G}$ на G такой, что в $\hat{G}$ выполняется условие $|\det(\partial\lambda(\varpi(z))/\partial z_1; \ldots; \partial^l\lambda(\varpi(z))/\partial z_1^l)| \geqslant \mu > 0$, где $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(l)})^T$, $z = (z_1, \ldots, z_s)$. Это условие означает, что многообразие $\omega = \omega(y)$ расслаивается на неуплощающиеся в смысле [6] кривые.

3. Теорема 2. *Пусть выполняются предположения пп. 1, 2 и в координатах* (y, φ) *коэффициенты формы* ω^2 *и функции* $H(y)$, $h(y, \varphi)$ *вещественно-аналитичны в области* $G \times U$, *где* G *— выпуклая область в* $\mathbb{C}^s$, $U = \{\varphi \in \mathbb{C}^r \mid |\operatorname{Im} \varphi_i| < \rho,\ i = 1, \ldots, r\}$, $\rho > 0$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $M > 0$, *что если* $\sup\limits_{G\times U} |h(y, \varphi)| < M$, *то справедливо следующее утверждение: для любого вещественного* φ_0 *существует множество* $G_* \subset \operatorname{Re} G$ *такое, что* $\operatorname{mes} G_* \geqslant \operatorname{mes} \operatorname{Re} G - \varepsilon$, *и если* $y_0 \in G_*$, *то решение системы с функцией Гамильтона* $H(y) + h(y, \varphi)$, *проходящее через точку* (y_0, φ_0), *будет квазипериодическим вида* $y(t) = y_* + f(\omega_*(y_*)t)$, $\varphi(t) = \omega_*(y_*)t + \varphi_* + g(\omega_*(y_*)t)$. *Здесь* $y_* \in \mathbb{R}^s$, $\varphi_* \in \mathbb{R}^r$ *зависят от* y_0, φ_0, *компоненты вектора* ω_* *независимы над кольцом целых чисел, функции* $f(\psi)$, $g(\psi)$ *— вещественно-аналитичны в области* $\{\psi \in \mathbb{C}^r \mid |\operatorname{Im} \psi_i| < 4^{-1}\rho\}$, *периодичны с периодом* 2π *по* ψ_i, *причем* $|f(\psi)|$, $|g(\psi)| \leqslant \varkappa(M)$, *где* $\varkappa(M) \to 0$, $M \to 0$.

Доказательство этой теоремы проводится в пп. 4—7.

4. Описание процесса последовательных симплектических преобразований. Введем некоторые обозначения. Если F область в C^m, то $F - \beta$ — множество точек, принадлежащих F вместе со своими β-окрестностями в смысле метрики, порождаемой нормой $|x| = \Sigma |x_i|$; $F + \beta$ — объединение β-окрестностей точек из F.

Если $\Sigma f^{(n)} e^{i(n,\varphi)}$, $n \in \mathbb{Z}^r$, — ряд Фурье функции $f(\varphi)$, то $S_N f = \sum\limits_{\|n\| \leqslant N} f^{(n)} e^{i(n,\varphi)}$; $\bar{f} = S_0 f$ — среднее функции f, $R_N f = f - S_N f$, $\tilde{f} = f - \bar{f}$.

Опишем метод преобразования системы с гамильтонианом $H + h$. Пусть $H_1 = H + \bar{h}$ и $\omega_1 = \omega_1(y)$ — вектор частот системы с гамильтонианом H_1 (см. (2)), y не лежит на поверхностях $(u, \omega_1(y)) = 0$, $\|n\| \leqslant N$. Определим функцию $S(y, \varphi)$ из уравнения

$$\{S, H_1\} \equiv (\omega_1, \ \partial S/\partial\varphi) = S_N \tilde{h}. \tag{4}$$

Получим $S = \sum\limits_{0 < \|n\| \leqslant N} (n, \omega_1(y))^{-1} h^{(n)}(y) e^{i(n,\varphi)}$. Идея предлагаемой в данной работе модификации метода ускоренной сходимости [1 — 4, 7] заключается в том, что возмущение h будет уменьшаться с помощью симплектического преобразования координат, порождаемого отображением $g^1: G \times U \to G \times U$, где $(g^t, G \times U)$ — фазовый поток системы IdS.

Положим $M_k = \delta_k^T$; $\beta_k = \delta_k^{T_1}$; $\gamma_{k+1} = 0{,}1\,(k+1)^{-2}\rho_0$; $N_k = \gamma_k^{-1} \ln M_k^{-1}$, $N_{-1} = 0$; $L_k = \delta_k^{T_2}$; $\delta_{k+1} = \delta_k^{1+\alpha}$; $\tilde{M}_k = c_1 4^r M_k \delta_{1+k}^{-r} L_k^{-1} \beta_{k+1}^{-1}$; $\rho_{k+1} = \rho_k - 2\gamma_k$; $\theta_{k+1}^{(1)} = \theta_k^{(1)} + M_k \beta_k^{-1}$; $\theta_{k+1}^{(2)} = \theta_k^{(2)} + 2M_k \beta_k^{-2}$; $k = 0, 1, \ldots$.

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть гамильтониан* $H_k(y)+h_k(x)$ — *вещественно-аналитическая функция в области* $F_k=(G_k+\beta_k)\times U_k$, *где* $G_k\in\mathbb{C}^s$, $U_k=\{\varphi\in\in\mathbb{C}^r\,||\operatorname{Im}\varphi_i|<\rho_k\}$, *и удовлетворяет в* F_k *оценкам*

$$|h_k|\leqslant M_k,\ \ |\partial h_k/\partial x_i|\leqslant M_k\beta_k^{-1},\ \ |\partial^2 h_k/\partial x_i\partial x_j|\leqslant 2M_k\beta_k^{-2},$$

$$|\partial H_k/\partial y_i|\leqslant\theta_k^{(1)}<2\theta_0^{(1)},\ \ |\partial^2 H_k/\partial y_i\partial y_j|\leqslant\theta_k^{(2)}<2\theta_0^{(2)}; \tag{8_k}$$

пусть $G_{N_kL_k}=\{y\in G_k\,||(n,\omega_{k+1}(y))|>L_k,\ 0<\|n\|\leqslant N_k\}$, *где* $\omega_{k+1}(y)$ — *вектор частот гамильтониана* $H_k+\bar{h}_k$.

Тогда при соответствующем не зависящем от k *выборе положительных чисел* T,T_1,α,δ *для любого* $\delta_0\in(0,\delta]$ *в области* $F_k^2=(G_{N_kL_k}-2\beta_{k+1})\times\times(U_k-\delta_{k+1}-2\beta_{k+1})$ *существует вещественно-аналитический симплектический диффеоморфизм* $f_k:F_k^2\to F_k^2+\beta_{k+1}$ *вида* $f_k(x)=x+Z_k(x)$, *где* $|Z_k(x)|<\tilde{M}_k$ *при* $x\in F_k^2$, *такой, что* $F_k^2-\beta_{k+1}\subset f_k(F_k^2)$ *и замена переменных* $x=f_k(x')$ *приводит гамильтониан* $H_k(y)+h_k(x)$ *к виду* $H_{k+1}(y')=h_{k+1}(x')$. *В области* $F_{k+1}=(G_{k+1}+\beta_{k+1})\times U_{k+1}$, *где* $G_{k+1}==G_{N_kL_k}-4\beta_{k+1}$, $U_{k+1}=U_k-2\gamma_k$, *справедливы оценки* (8_{k+1}). *Имеет место включение* $F_{k+1}-\beta_{k+1}\subset f_k(F_{k+1})$.

Буква при номере формулы указывает на индекс в формулах.

5. Исследование резонансного множества. На каждом шаге процесса последовательных замен переменных приходится выбрасывать из фазового пространства «резонансные множества», выделяемые неравенствами типа $|(n,\ \omega_{k+1}(y))|\leqslant L_k$, вместе с некоторыми их окрестностями. Последнее обстоятельство вызывает затруднения при оценке меры Лебега выбрасываемых множеств. Наша задача состоит в том, чтобы погрузить выбрасываемые множества в множества, выделяемые только неравенствами.

Положим $(y^0(y,\varphi),\varphi^0(y,\varphi))=(y,\varphi)$; $(y^{k+1}(y,\varphi),\varphi^{k+1}(y,\varphi))=f_k^{-1}\circ\ldots\circ f_0^{-1}(y,\varphi)$, где f_k — диффеоморфизмы, фигурирующие в лемме 2, $k=0,1,\ldots$.

Зафиксируем $(z_2,\ldots,z_s)\in\tilde{G}$, положим $z=z_1$, $\alpha(z)=w(z,z_2,\ldots,z_s)$. Для простоты будем считать, что область $\Pi=\{z\in\mathbb{C}\,||z|<\sigma(\beta_0)\}$, где $\sigma(\beta_0)\to\sigma$ при $\beta_0\to 0$, такова, что $\alpha(z)\in G_0-2\beta_0$, если $z\in\Pi$. Зафиксируем $\varphi\in\{\varphi\in\mathbb{C}^r\,||\operatorname{Im}\varphi_i|<4^{-1}\rho\}$, положим $\omega_{k+1}(y^k(\alpha(z),\varphi))=\Omega_k(z)$ и построим последовательность множеств в $\mathbb{C}$ следующим образом: $\Pi_0=\Pi-2\beta_0$,

$$\Pi_{k+1}=\left(\Pi_0-2\sum_{i=0}^{k+1}\beta_i\right)\cap\Big(\Pi_k\setminus\bigcup_{0<\|n\|\leqslant N_k}\{z\in\Pi_k\,||(n,\Omega_k(z))|\leqslant KL_k\},\quad k=0,$$

$1,\ldots$.

Лемма 3. *Положительные числа* T, T_1, T_2, α, δ, K, c_7, c_8 *можно выбрать таким образом, что для любого* $\delta_0\in(0,\delta]$ *и* $m=0,1,\ldots$ *точка* $(y^m(\alpha(z),\varphi),\varphi^m(\alpha(z),\varphi))$ *принадлежит множеству* $G_m\times U_m$, *как только* $z\in\Pi_m+2\beta_m$, $|\operatorname{Im}\varphi_i|<4^{-1}\rho$, *причем* $|d^j(\Omega_m(z)-\Omega_0(z))/dz^j|\leqslant c_7\sum_{i=0}^{m}\tilde{M}_i\times\times\beta_i^{-1}\beta_{i+1}^{-j}<c_8\delta_0$ *при* $j=0,1,\ldots,l+1$, *как только* $z\in\Pi_m+\beta_m$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы справедливо при $m=0,1,\ldots,k$ (при $m=0$ оно очевидно) и докажем, что оно выполняется для $m=k+1$.

Числа T, T_1, T_2, α, δ выберем так, чтобы $6\sum_{i=j+1}^{\infty}\beta_i<\beta_j$, $5\sum_{i=j+1}^{\infty}\beta_i++\sum_{i=j}^{\infty}\tilde{M}_i<\beta_j$, $j=0,1,\ldots$, и удовлетворялись условия леммы 2.

Пусть $z \in \Pi_{k+1} + 2\beta_{k+1}$. Тогда $z \in \Pi_k + \beta_k$. Обозначим $y^k = y^k(\alpha(z), \varphi)$, $\varphi^k = \varphi^k(\alpha(z), \varphi)$ и покажем, что $(y^k, \varphi^k) \in (G_{k+1} - \beta_{k+1}) \times (U_{k+1} - \beta_{k+1})$. Поскольку в силу леммы 2 $F_{k+1} - \beta_{k+1} \subset f_k(F_{k+1})$, то $(y^{k+1}, \varphi^{k+1}) \in$ $\in G_{k+1} \times U_{k+1}$. Так как $|\varphi^{k+1} - \varphi| \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} |\varphi^i - \varphi^{i-1}| < \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{M}_i < 4^{-1}\rho$, то $|\operatorname{Im} \varphi^{k+1}| < 2^{-1}\rho$, т. е. $\varphi^{k+1} \in U_\infty \subset U_{k+1} - \beta_{k+1}$.

Покажем теперь, что $y^k \in G_{k+1} - \beta_{k+1}$. В силу леммы 2

$$G_{k+1} - \beta_{k+1} = \left(G_0 - 4\sum_{i=1}^{k+1}\beta_i - \beta_{k+1}\right) \diagdown \bigcup_{j=0}^{k} \bigcup_{0<\|n\|\leqslant N_j} \left(\Delta_j(n) + \right.$$

$$\left. + 4\sum_{i=j+1}^{k+1}\beta_j + \beta_{k+1}\right),$$

где $\Delta_j(n) = \{y \in G_j \,|\, |(n, \omega_{j+1}(y))| \leqslant L_j\}$. Предположим, что y^k не принадлежит $G_{k+1} - \beta_{k+1}$. Поскольку $y^0 = \alpha(z) \in G_0 - 2\beta_0$, $|y^0 - y^k| \leqslant \sum_{i \geqslant 1} \tilde{M}_i < \beta_0$ и, следовательно, $y^k \in G_0 - 5\sum_{i=1}^{k+1}\beta_i$, то $y^k \in \Delta_j(n) + 4\sum_{i=j+1}^{k+1}\beta_j + \beta_{k+1}$ при некотором $0 \leqslant j \leqslant k$ и $0 \leqslant \|n\| \leqslant N_j$. Найдется точка $z^* \in \Pi_{k+1}$ такая, что $|z - z^*| < 2\beta_{k+1}$, причем отрезок, соединяющий точки z и z^*, целиком лежит в $\Pi_i + \beta_i$, $0 \leqslant i \leqslant k$. По предположению $y^j(\alpha(z^*))$ (аргумент φ опускаем) удовлетворяет условию

$$|\omega_{j+1}(y^j(\alpha(z^*))), n)| = |(n, \Omega_j(z^*))| > KL_j. \tag{9}$$

Найдется также точка $y^* \in \Delta_j(n)$ такая, что $|y^{(k)} - y^*| < 4\sum_{i=j+1}^{k+1}\beta_j + \beta_{k+1}$ и, следовательно,

$$|y^j - y^*| \leqslant \sum_{i=j}^{k-1} |y^i - y^{i+1}| + |y^k - y^*| \leqslant \sum_{i=j}^{\infty} \tilde{M}_i + 5\sum_{i=j+1}^{\infty}\beta_i < \beta_j. \tag{10}$$

При этом отрезок, соединяющий точки y^j и y^*, целиком расположен в $G_j + \beta_j$. Далее, из равенства $\Omega_j(z^*) = \Omega_j(z^*) - \Omega_j(z) + \omega_{j+1}(y^j) - \omega_{j+1}(y^*) +$ $+ \omega_{j+1}(y^*)$, неравенства Лагранжа, а также (10) и (8_{j+1}) получаем

$$|\Omega_j(z^*) - \Omega_j(z)| \leqslant (\sup_{z \in \Pi} |d\Omega_0/dz| + c_8\delta)\,|z - z^*| \leqslant c_9\beta_{k+1};$$

$$|\omega_{j+1}(y^j) - \omega_{j+1}(y^*)| \leqslant c_{10}\beta_j. \tag{11}$$

Учитывая, что $y^* \in \Delta_j(n)$, имеем:

$$|(n, \Omega_j(z^*))| \leqslant N_j(c_9\beta_{k+1} + c_{10}\beta_j) + L_j. \tag{12}$$

Но независимо от j выбором чисел T, T_1, T_2, α, δ можно добиться того, чтобы правая часть неравенства (12) была меньше $2^{-1}KL_j$. Это противоречит неравенству (9). Таким образом, доказано, что $(y^{k+1}, \varphi^{k+1}) \in G_{k+1} \times U_{k+1}$, если $z \in \Pi_{k+1} + 2\beta_{k+1}$, $|\operatorname{Im} \varphi_i| < 4^{-1}\rho$.

Далее, для таких значений z и φ $\Omega_{k+1}(z) - \Omega_k(z) = \omega_{k+2}(y^{k+1}) -$ $- \omega_{k+1}(y^{k+1}) + \omega_{k+1}(y^{k+1}) - \omega_{k+1}(y^k)$. Поэтому $|\Omega_{k+1}(z) - \Omega_k(z)| \leqslant$ $\leqslant rM_{k+1}\beta_{k+1}^{-1} + c_{10}\tilde{M}_k$. По неравенствам Коши для $z \in \Pi_{k+1} + \beta_{k+1}$ имеем $|d^l(\Omega_{k+1}(z) - \Omega_k(z)/dz^l| \leqslant c_7\tilde{M}_{k+1}\beta_{k+1}^{-1}\beta_{k+2}^{-l}$.

Лемма 3 доказана.

6. Оценка меры Лебега выбрасываемого множества. Вначале покажем, что $\operatorname{mes}\operatorname{Re}\Pi_\infty \to \operatorname{mes}\operatorname{Re}\Pi$ при $\delta_0 \to 0$. Зафиксируем $(z_2, \dots, z_s) \in \operatorname{Re}\widetilde{G}$, $\varphi \in \mathbb{R}^r$. Построим последовательность множеств на прямой $B_0 = \{z \in \mathbb{R} \mid |z| < \sigma(2\beta_0)\}$, $B_{k+1} = B_0 \setminus \bigcup\limits_{0<\|n\|\leqslant N_k} E_k(n)$, где $E_k(n) = \{z \in \in B_k \mid |(n, \Omega_k(z))| \leqslant KL_k\}$. Согласно условиям невырожденности имеет место разложение $\Omega_k(z) = b^{(1)}\lambda_k^{(1)}(\alpha(z)) + \dots + b^{(l)}\lambda_k^{(l)}(\alpha(z))$, а из леммы 3 вытекает, что для достаточно малого δ на множестве B_k выполняется неравенство $|\det(d\lambda_k/dz; \dots; d^l\lambda_k/dz^l)| \geqslant 2^{-1}\mu$, где $\lambda_k = (\lambda_k^{(1)}, \dots, \lambda_k^{(l)})^T$.

Лемма 4. *Существуют положительные числа C, ν, δ такие, что если $\delta_0 \in (0, \delta]$, то для любых $k = 0, 1, \dots$ и $n \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ на множестве B_k справедливы оценки*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant l+1}\left|\frac{d^i}{dz^i}\,\frac{(n, \Omega_k(z))}{\sqrt{(n, n)}}\right| \leqslant C, \quad \max_{1\leqslant i\leqslant l}\left|\frac{d^i}{dx^i}\,\frac{(n, \Omega_k(z))}{\sqrt{(n, n)}}\right| > \nu\|n\|^{-r-1}.$$

Доказательство следует из [6]. По терминологии [6] функция $\sqrt{(n, n)^{-1}}\,(n, \Omega_k(z))$ называется C, c-функцией, $c = \nu\|n\|^{-r-1}$. В [6] было показано, что для C, c-функции $f(z)$, заданной на отрезке I, множество $E = \{z \mid |f(z)| \leqslant \varepsilon\}$ состоит при $\varepsilon < \min((c/CC_1)^l, c/2)$, $C_1 = (2^l - 2)(2/c)^{1/l}$ из не более чем $(2l + 2)([C \operatorname{mes} I c^{-1}] + 1)$ отрезков, причем длина каждого не превосходит $C_1\varepsilon^{1/l}$.

Положим $\varepsilon = \varepsilon_k = KL_k$, $c = c_k = \nu N_k^{-r-1}$. Можно считать, что $\varepsilon_k < \min(c_k^l(C_1C)^{-l}, 2^{-1}c_k)$, $k = 0, 1, \dots$. Допустим, что множество B_k состоит из не более чем m_k интервалов I_{j_k}, $1 \leqslant j_k \leqslant m_k$. По лемме 4 множество $E_k(n) \cap I_{j_k}$, где $\|n\| \leqslant N_k$, состоит из не более чем $c_8c_k^{-1}$ отрезков и длина каждого не превосходит $c_9(\varepsilon_k c_k^{-1})^{1/l}$. Положительные постоянные c_8, c_9 зависят лишь от C и l. Тогда $E_k(n)$ состоит из не более чем $c_8mc_k^{-1}$ отрезков, а множество $\bigcup\limits_{0<\|n\|\leqslant N_k} E_k(n)$ — из не более чем $c_8 2^r N_k^r m_k c_k^{-1}$ отрезков. Теперь для числа интервалов, из которых состоит множество B_{k+1}, имеем $m_{k+1} \leqslant m_k(c_8 2^r N_k^r c_k^{-1} + 1) \leqslant c_8 2^{r+1} N_k^r m_k c_k^{-1} \leqslant N_k^{2r+2} m_k$. Отсюда

$$m_{k+1} \leqslant \prod_{i=0}^{k} N_i^{2r+2} \leqslant ((10\rho_0 \ln M_0^{-1})^k ((k+1)!)^2 (1+\alpha)^{k^2})^{2r+2}.$$

Но $\varepsilon_k = K\,\delta_0^{T_2(1+\alpha)^k}$, поэтому $\operatorname{mes}(B_0 \setminus B_\infty) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} \bigcup\limits_{0<\|n\|\leqslant N_k} E_k(n) \leqslant \leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_8c_9 2^r N_k^r m_k c_k^{-1}(\varepsilon_k c_k^{-1})^{1/l} \leqslant \Sigma(\delta_0)$, причем $\Sigma(\delta_0) \to 0$ при $\delta_0 \to 0$. Следовательно, $\operatorname{mes}\operatorname{Re}\Pi_\infty \to \operatorname{mes}\operatorname{Re}\Pi$ при $\delta_0 \to 0$.

Рассмотрим множество $\widehat{G}' = \bigcup\limits_{(z_2,\dots,z_s)\in\widetilde{G}} \Pi_\infty$. Воспользовавшись теоремой Фубини, нетрудно показать, что $\operatorname{mes}\operatorname{Re}\widehat{G}' \to \operatorname{mes}\operatorname{Re}\widehat{G}$ при $\delta_0 \to 0$. Положим $G' = \varpi(\operatorname{Re}\widehat{G}')$. Из приведенных рассуждений следует лемма.

Лемма 5. $\operatorname{mes}\operatorname{Re}G' \to \operatorname{mes}\operatorname{Re}G$ *при* $\delta_0 \to 0$.

7. Окончание доказательства теоремы 2. Из доказанного в пп. 5, 6 следует, что множество $G' \times \varphi$ при $|\operatorname{Im}\varphi_i| < 4^{-1}\rho$ посредством симплектического диффеоморфизма $f_{k-1}^{-1} \circ \dots \circ f_0^{-1}$ отображается в множество $G_k \times U_k$, $k = 1, 2, \dots$, на котором преобразованны гамильтониан имеет вид $H_k(y') + h_k(y', \varphi')$, причем $|h_k(y', \varphi')| \leqslant M_k \to 0$, $k \to \infty$.

Нетрудно доказать сходимость последовательности отображений $f_k^{-1} \circ \ldots \circ f_0^{-1}$. Положим $\prod_{k=0}^{\infty} f_k^{-1} \circ \ldots \circ f_0^{-1} (y_0, \varphi_0) = (y_*, \varphi_*)$, $\omega_* (y_*) = \omega_\infty (y_*)$. Тогда $(y(t), \varphi(t)) = \prod_{k=0}^{\infty} f_0 \circ \ldots \circ f_k (y_*, \omega_*(y_*) t + \varphi_*)$ — искомое квазипериодическое решение. Доказательство этого утверждения непосредственно следует из результатов § 13 гл. IV, § 5 гл. V работы [2].

З а м е ч а н и е. Теорему 2 для уравнения (3) при выполнении условия $\det \partial^2 H / \partial y_i \partial y_j \neq 0$, по-видимому, можно доказать проще, используя метод работы [4]. Однако наша цель состояла в том, чтобы показать, что число параметров, от которых невырожденным образом зависит вектор частот, никак не связано с размерностью этого вектора. Аналогичный результат для обратимых систем получен в работе [8].

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М. : Наука, 1974.— 432 с.
2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.— Успехи мат. наук, 1963, 18, вып. 6, с. 91—192.
3. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 304 с.
4. *Мозер Ю.* О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды.— Успехи мат. наук. 1969, 24, вып. 2, с. 165—211.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 248 с.
5. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия.— М. : Наука, 1979.— 760 с.
6. *Пяртли А. С.* Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства.— Функц. анализ и его прил., 1969, 3, вып. 4, с. 59—62.
8. *Парасюк И. О.* Сохранение квазипериодических движений обратимых многочастотных систем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 9, с. 19—22.

Киев. гос. ун-т

Поступила 16.06.83