Ю. С. Мишура

Формула Ито для двупараметрических стохастических интегралов по мартингальным мерам

В статье выводится формула Ито для «чисто разрывных» мартингалов, заданных на плоскости как стохастические интегралы по мартингальным мерам. Ранее подобная формула была получена в [1] для интегралов по пуассоновской мере.

Пусть $t=(t_1, t_2)\in R^2_+$; $s\leqslant t$, если $s_1\leqslant t_1$, $s_2\leqslant t_2$; $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_t, t\in R^2_+\}$ — поток σ-алгебр, удовлетворяющих условиям $(F1)$ — $(F4)$ [2]. Через M_p, $p\geqslant 1$, обозначим класс случайных полей $\xi(t)$, $t\in R^2_+$, для которых $M|\xi(t)|^p<\infty$ для всех t из R^2_+.

Пусть D — пространство функций $x(t)\in R$, $t\in R^2_+$, без разрывов второго рода, т. е. имеющих пределы в каждой точке по каждому из 4-х квадрантов и удовлетворяющих условию $x(t)=\lim\limits_{\substack{s\to t\\ s\geqslant t}} x(s)$. Далее рассматриваются случайные поля, равные нулю на координатных осях, траектории которых с вероятностью 1 принадлежат D. Приращение поля $\xi(\cdot)$ на прямоугольнике $[s, t]$ обозначим через $\square_s\xi(t)$: $\square_s\xi(t)=\xi(t)-\xi(t_1, s_2)-\xi(s_1, t_2)+\xi(s)$; скачок $\square_{t-0}\xi(t)$ — через $\square\xi(t)$, 1- и 2-скачки — через $\Delta^1\xi(t)$ и $\Delta^2\xi(t)$ соответственно: $\Delta^1\xi(t)=\xi(t)-\xi(t_1-0, t_2)$, $\Delta^2\xi(t)=\xi(t)-\xi(t_1, t_2-0)$. Понятия слабого, обычного и сильного мартингала, используемые далее, содержатся, например, в [2]. Случайное поле $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t\in R^2_+\}$ назовем квазинепрерывным, если оно квазинепрерывно слева по каждой координате при фиксированной второй координате. Пространство квазинепрерывных мартингалов класса M_p обозначим через $\overline{M}_p$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра борелевских множеств из R, замыкание которых не содержит нуля, $\nu_\xi(t, A)$ — число скачков некоторого мартингала $\xi(\cdot)\in\overline{M}_2$ на множестве $[0, t]$, значения которых попали в $A\in\mathfrak{A}$, $\nu_\xi(\omega, \cdot)=0$, если $\xi(\omega, \cdot)\overline{\in} D$. (Тогда $\nu_\xi(t, A)<\infty$ $\forall\,\omega\in\Omega$.) По функции ν_ξ можно обычным образом построить меру на σ-алгебре борелевских множеств из $R^2_+\times R$. Эту меру далее будем также обозначать ν_ξ.

Пусть $[\xi]_i(t)$ — квадратическая вариация однопараметрического мартингала $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t_i\geqslant 0\}$. Согласно результатам статьи [3], при выполнении условия (**A**): $\{[\xi]_i(t), \mathfrak{F}_t, t\in R^2_+\}$, $i=1, 2,$ — квазинепрерывное поле, поле $\nu_\xi(t, A)$ также квазинепрерывно и допускает единственное представление вида $\nu_\xi(t, A)=\mu_\xi(t, A)+\pi_\xi(t, A)$, где $\mu_\xi(t, A)$ — локально квадратично интегрируемая мартингальная мера на плоскости, подчиненная потоку $\mathfrak{F}_t$ и удовлетворяющая условию слабой ортогональности: если $A_1\cap A_2=\varnothing$, то $\mu_\xi(t, A_1)\mu_\xi(t, A_2)$ — слабый мартингал; $\pi_\xi(t, A)$ — непрерывная монотонно неубывающая функция двух переменных при фиксированном A и мера по A при фиксированном t, $\pi_\xi(t, A)$ — слабая характеристика $\mu_\xi(t, A)$, т. е. $\mu^2_\xi(t, A)-\pi_\xi(t, A)$ — слабый мартингал. Индекс ξ будем далее опускать.

Предположим, что мера ν удовлетворяет условию (**B**): для всех $t\in R^2_+$ $\Delta^i\nu(t, R\setminus\{0\})\leqslant 1$, $i=1, 2$. (Условие (**B**) означает, что мартингал $\xi(\cdot)$, мера скачков которого — ν, имеет не более одного скачка $\square\xi(\cdot)$ вдоль любой линии, параллельной осям координат.)

Рассмотрим случайную функцию $\gamma(t, u)=\gamma(\omega, t, u)$, $(\omega, t, u)\in\Omega\times\times R^2_+\times R$, траектории которой с вероятностью 1 принадлежат D, $\gamma(t, u)$ $\mathfrak{F}_t$-измерима при фиксированном u, $\mathfrak{B}$-измерима по u при фиксированном t, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств из R. Будем называть такие функции $\mathfrak{F}$-измеримыми. Очевидно, при почти всех ω существуют интегралы Лебега $\gamma*\nu$, $\gamma*\pi$ и $\gamma*\mu$, где, например, $(\gamma*\nu)_t=\int\int_{[0,t]\times R}\gamma(s, u)\nu(ds, du)$. Предположим, что $\sup\limits_t M\mu^2(t, R\setminus\{0\})<\infty$.

Интеграл $\gamma*\mu$ можно для некоторого класса функций γ определить как стохастический, аналогично однопараметрическому случаю, а также теории интегрирования по двупараметрическим мартингалам [2, 4]. Обозначим через $L_2(\mathfrak{F})$ пространство $\mathfrak{F}$-измеримых функций γ, для которых $M\int\int_{R^2_+\times R}\gamma^2(s, u)\pi(ds, du)<\infty$.

Лемма 1. *Если $\gamma\in L_2(\mathfrak{F})$, то для любого $t\in R^2_+$ существует стохастический интеграл*

$$\xi(t)=\int\int_{[0,t]\times R}\gamma(s, u)\mu(ds, du)\overset{\text{def}}{=}\text{l. i. m.}\int\int_{[0,t]\times R}\gamma_n(s, u)\mu(ds, du),$$

где $\gamma_n(s, u)$ — последовательность простых функций, причем $\xi(t)$ обладает следующими свойствами:

1) $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t\in R^2_+\}$ — *квадратично интегрируемый мартингал со слабой характеристикой* $\langle\xi\rangle(t)=(\gamma^2*\pi)(t)$;

2) *для любых* $T\in R^2_+$, ε *и* $N>0$ $P\{\sup\limits_{t\leqslant T}|(\gamma*\mu)(t)|>\varepsilon\}\leqslant N\varepsilon^{-2}+ P\{(\gamma^2*\pi)(T)>N\}$.

Цель работы — вывести формулу Ито для мартингала $\xi(t)$.

Пусть $T\in R^2_+$, $\lambda=\{(t_1^i, t_2^k): 0=t_j^0<t_j^1<\ldots<t_j^n=T_j,\ j=1, 2\}$ — некоторое разбиение прямоугольника $[0, T]$, $\zeta_{ik}=\zeta(t_1^i, t_2^k)$, $\Delta^1\zeta_{ik}=\zeta_{ik}-\zeta_{i-1\,k}$, $\Delta^2\zeta_{ik}=\zeta_{ik}-\zeta_{i\,k-1}$, $\square\zeta_{ik}=\Delta^1\zeta_{ik}-\Delta^1\zeta_{i\,k-1}$. Рассмотрим случайные поля $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ ограниченной вариации: $\operatorname*{Var}\limits_{[0,T]}\zeta<\infty$, $\operatorname*{Var}\limits_{[0,T]}\eta<\infty$, $\operatorname*{Var}\limits_{[0,T]}\zeta=\sup\limits_\lambda\sum_{i,k=1}^n|\square_{ik}\zeta|$. Заметим, что тогда и однопараметрические вариации этих полей ограничены: $\operatorname*{Var}\limits_{[0,T_i]}\zeta(\cdot, T_j)<\infty$, $i=1$, $j=2$ или $i=2$, $j=1$.

Имеют место равенства:

$$\zeta(T)\eta(T)=\sum_{i=1}^n(\zeta_{i-1\,n}\Delta^1\eta_{in}+\eta_{i-1\,n}\Delta^1\zeta_{in}+\Delta^1\zeta_{in}\Delta^1\eta_{in});\qquad(1)$$

$$\zeta(T)\eta(T)=\sum_{k=1}^n(\zeta_{n\,k-1}\Delta^2\eta_{nk}+\eta_{n\,k-1}\Delta^2\zeta_{nk}+\Delta^2\zeta_{nk}\Delta^2\eta_{nk});\qquad(2)$$

$$\zeta(T)\eta(T)=\sum_{i,k=1}^n(\zeta_{i-1\,k-1}\square\eta_{ik}+\eta_{i-1\,k-1}\square\zeta_{ik}+\Delta^1\zeta_{i\,k-1}\Delta^2\eta_{i-1\,k}+$$

$$+\Delta^1\eta_{i\,k-1}\Delta^2\zeta_{i-1\,k}-\square\zeta_{ik}\square\eta_{ik})+\sum_{i=1}^n\Delta^1\zeta_{in}\Delta^1\eta_{in}+\sum_{k=1}^n\Delta^2\zeta_{nk}\Delta^2\eta_{nk}.\qquad(3)$$

В равенстве (1) перейдем к пределу при $|\lambda| \to 0$:

$$\zeta(T)\eta(T) = \int_0^{T_1} \zeta(t-, T_2)\,\eta(dt, T_2) + \int_0^{T_2} \eta(t-, T_2)\,\zeta(dt, T_2) + $$
$$+ \sum_{t \leqslant T_1} \Delta^1\zeta(t, T_2)\,\Delta^1\eta(t, T_2);$$

в частности,

$$\zeta^2(T) = 2\int_0^{T_1} \zeta(t-, T_2)\,\zeta(dt, T_2) + \sum_{t \leqslant T_1} (\Delta^1\zeta(t, T_2))^2. \qquad (4)$$

Применим полученное соотношение в дифференциальной форме к случайному полю $\zeta = \gamma * \nu$, где γ удовлетворяет условию (**C**): $\gamma(s, u) = 0$, если $|u| < \delta$ для некоторого $\delta > 0$. (Заметим, что в силу условия (**B**)

$$\sum_{t \leqslant T_1} (\Delta^1\zeta(t, T_2))^2 = \sum_{t \leqslant T_2} (\Delta^2\zeta(T_1, t))^2 =$$
$$= \sum_{t \leqslant T} (\square\, \zeta(t))^2 = \int\int_{[0,T]\times R} \gamma^2(s, u)\,\nu(ds, du),$$

а в силу условия (**C**) $\operatorname*{Var}_{[0,T]} \zeta < \infty \quad \forall\, T \in R^2_+$.) Получим $\zeta^2(dt_1, t_2) = 2\zeta(t_1-, t_2)\,(\gamma*\nu)(dt_1, t_2) + (\gamma^2*\nu)(dt_1, t_2)$. Но

$$(\gamma^n*\nu)(dt_1, t_2) = \int_0^{t_2} \int_R \gamma^n(t_1, s_2, u)\,\nu(dt_1, ds_2, du)$$

для любого целого $n > 0$. Поэтому

$$\zeta^2(dt_1, t_2) = \int_0^{t_2} \int_R ((\zeta(t_1-, t_2) + \gamma(t_1, s_2, u))^2 - \zeta^2(t_1-, t_2))\,\nu(dt_1, ds_2, du).$$

Применяя метод математической индукции, нетрудно показать, что

$$\zeta^n(dt_1, t_2) = \int_0^{t_2} \int_R ((\zeta(t_1, -t_2) + \gamma(t_1, s_2, u))^n - \zeta^n(t_1, -t_2))\,\nu(dt_1, ds_2, du). \qquad (5)$$

Аналогично из равенства (2) получаем

$$\zeta^n(t_1, dt_2) = \int_0^{t_1} \int_R ((\zeta(t_1, t_2-) + \gamma(s_1, t_2, u))^n - \zeta^n(t_1, t_2-))\,\nu(ds_1, dt_2, du). \qquad (6)$$

Рассмотрим равенство (3). При переходе в нем к пределу при $|\lambda| \to 0$ возникают интегралы второго рода. Обоснуем существование этих интегралов.

Лемма 2. *Пусть случайные поля $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ имеют ограниченную вариацию на любом прямоугольнике $[0, T]$. Тогда с вероятностью 1 существует предел* $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S_\lambda = \lim\limits_{|\lambda|\to 0} \sum_{i,k=1}^n \Delta^1\zeta_{i\,k-1}\Delta^2\eta_{i-1\,k} \overset{\text{det}}{=} \int_{[0,T]} \zeta(dt_1, t_2-)\,\eta(t_1-, dt_2)$.

Доказательство. Рассмотрим неслучайные функции ограниченной вариации $\zeta(t)$ и $\eta(t)$, $t \in [0, T]$. Пусть λ — некоторое разбиение $[0, T]$, λ' — подразбиение, измельчающее λ только вдоль координаты t_2. Тогда

$$|S_\lambda - S_{\lambda'}| = \Big|\sum_{i,k=1}^n \sum_{k' \in H_k} \Delta^2\eta_{i-1\,k'}\,(\Delta^1\zeta_{i\,k'-1} - \Delta^1\zeta_{i\,k-1})\Big|,$$

где суммирование по $k' \in H_k$ соответствует точкам разбиения λ', для которых $t_2^k < t_2^{k'} < t_2^{k+1}$. Полученное выражение оценим так:

$$|S_\lambda - S_{\lambda'}| \leqslant \sum_{i,k=1}^n \sum_{k' \in H_k} \sup_{t \in [0,T_1]\times[t_2^{k'}, t_2^{k+1}]} |\eta(t) - \eta(t_1, t_2^{k'})|\,|\square_{ik'}\zeta|.$$

Заметим, что функции $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ имеют для любого $\varepsilon > 0$ не более чем конечное число горизонтальных линий разрыва, вдоль которых 2-скачок хотя бы в одной точке превосходит ε. Поэтому разбиение λ можно выбрать так, чтобы оно само и все его измельчения «разделяли» линии разрыва функций η и ζ в следующем смысле: если $\sup\limits_{t, t' \in [0,T_1]\times[t_2^k, t_2^{k+1}]} |\eta(t) - \eta(t_1, t_2')| > \varepsilon$, то

$\operatorname{Var}\limits_{[0,T_1]\times[t_2^k,t_2^{k+1}]} \zeta < \varepsilon$. Следовательно,

$$|S_\lambda - S_{\lambda'}| \leqslant \varepsilon \operatorname{Var}\limits_{[0,T]} \zeta + \sum_{k=1}^n \sup_{t,t'\in[0,T_1]\times[t_2^k,t_2^{k+1}]} |\eta(t) - \eta(t_1, t_2')|\,\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon (\operatorname{Var}\limits_{[0,T]} \zeta + \operatorname{Var}\limits_{[0,T]} \eta).$$

Аналогично рассматриваем разбиение, измельчающее λ вдоль координаты t_1, и получаем доказательство в силу произвольного выбора ε.

Используя лемму 2, перейдем к пределу в равенстве (3)

$$\zeta(T)\eta(T) = \int_{[0,T]} (\zeta(t-)\eta(dt) + \eta(t-)\zeta(dt) + \zeta(dt_1, t_2-)\eta(t_1-, dt_2) +$$

$$+ \zeta(t_1-, dt_2)\eta(dt_1, t_2-)) + \sum_{t\leqslant T_1} \Delta^1\zeta(t, T_2)\Delta^1\eta(t, T_2) +$$

$$+ \sum_{t\leqslant T_2} \Delta^2\zeta(T_1, t)\Delta^2\eta(T_1, t) - \sum_{t\leqslant T} \square\zeta(t)\square\eta(t) \qquad (7)$$

В частности,

$$\zeta^2(T) = 2\int_{[0,T]} (\zeta(t-)\,d\zeta(t) + \zeta(dt_1, t_2-)\zeta(t_1-, dt_2)) +$$

$$+ \sum_{t\leqslant T_1} (\Delta^1\zeta(t, T_2))^2 + \sum_{t\leqslant T_2} (\Delta^2\zeta(T_1, t))^2 - \sum_{t\leqslant T} (\square\zeta(t))^2.$$

Применяя соотношение (4), полученное равенство перепишем в дифференциальной форме:

$$d\zeta^2(t) = [(\zeta(t-) + \gamma)^2 - \zeta^2(t-)]*\nu(dt) + 2\zeta(dt_1, t_2-)\zeta(t_1-, dt_2). \qquad (8)$$

Введем обозначения:

$$\check{a} = \begin{cases} a^{-1}, & \text{если } a \neq 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \end{cases} \quad \tilde{f}(\zeta(\cdot))*\nu(\cdot, dt_2) = \int_0^{t_1-}\int_R [f(\zeta(t-) + \gamma(s_1, t_2, u)) -$$

$$- f(\zeta(t-)) - f'(\zeta(t-))\gamma(s_1, t_2, u)]\,\check{\gamma}(s_1, t_2, u)\,\nu(ds_1, dt_2, du);$$

$$\tilde{f}(\zeta(\cdot))*\nu(dt_1, \cdot) = \int_0^{t_2-}\int_R [f(\zeta(t-) + \gamma(t_1, s_2, u)) - f(\zeta(t-)) -$$

$$- f'(\zeta(t-))\gamma(t_1, s_2, u)]\,\check{\gamma}(t_1, s_2, u)\,\nu(dt_1, ds_2, du).$$

Предполагаем, что функция $f(x)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет условиям, достаточным для существования указанных дифференциалов. Эти условия сформулированы в теореме.)

Л е м м а 3. *Для любого многочлена* $P(x)$, $x \in R$, *и случайного поля* $\zeta = \gamma * \nu$ *имеет место равенство*

$$dP(\zeta(t)) = [P(\zeta(t-) + \gamma(t, u)) - P(\zeta(t-))]*\nu(dt) + \zeta(dt_1, t_2-)\times$$

$$\times (\tilde{P}(\zeta(\cdot))*\nu(\cdot, dt_2)) + \zeta(t_1-, dt_2)(\tilde{P}(\zeta(\cdot))*\nu(dt_1, \cdot)). \qquad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай, когда $P(x) = x^n$. Равенство (9) имеет место для $n = 1$ и $n = 2$ (в силу (8)). Предположим, что (9) верно для некоторого n (все интегралы в правой части существуют, так как рассматриваемые случайные поля имеют ограниченную вариацию). Тогда для $n + 1$, в силу (7),

$$\zeta^{n+1}(T) = \int_{[0,T]} (\zeta^n(t-)\,d\zeta(t) + \zeta(t-)\,d\zeta^n(t) + \zeta(dt_1, t_2-)\zeta^n(t_1-, dt_2) +$$

$$+ \zeta^n(dt_1, t_2-)\zeta(t_1-, dt_2)] + \sum_{t\leqslant T_1} \Delta^1\zeta(t, T_2)\Delta^1\zeta^n(t, T_2) +$$

$$+ \sum_{t\leqslant T_2} \Delta^2\zeta(T_1, t)\Delta^2\zeta^n(T_1, t) - \sum_{t\leqslant T} \square\zeta(t)\square\zeta^n(t).$$

Заметим, что из условия (В), соотношений (5), (6) и предположения индукции вытекает

$$\sum_{t\leqslant T_1}\Delta^1\zeta(t,T_2)\,\Delta^1\zeta^n(t,T_2)=\sum_{t\leqslant T_2}\Delta^2\zeta(T_1,t)\,\Delta^2\zeta^n(T_1,t)=$$
$$=\sum_{t\leqslant T}\Box\zeta(t)\,\Box\zeta^n(t)=\iint_{[0,T]\times R}[(\zeta(t-)+\gamma(t,u))^n-$$
$$-\zeta^n(t-)]\,\gamma(t,u)\,\nu(dt,du).$$

Поэтому, вновь используя (5) и (6), получим

$$\zeta^{n+1}(T)=\int\int_{[0,T]\times R}((\zeta(t-)+\gamma(t,u))^{n+1}-\zeta^{n+1}(t-))\,\nu(dt,du)+$$
$$+\zeta(dt_1,t_2-)\,(\tilde{\zeta}^{n+1}(\cdot)*\nu(\cdot,dt_2))+\zeta(t_1-,dt_2)\,(\tilde{\zeta}^{n+1}(\cdot)*\nu(dt_1,\cdot)),$$

т. е. равенство (9) имеет место для $P(x)=x^{n+1}$, откуда следует доказательство леммы.

Замечание. Из формулы (9) следует, что поле $\zeta^n(t)$ имеет ограниченную вариацию.

Пусть теперь многочлен $P(t,x)$ содержит коэффициенты $\alpha_n(t)$ — $\mathfrak{F}_t$-измеримые непрерывные функции ограниченной вариации. Применим к $\alpha_n(t)$ и $\zeta^n(t)$ равенство (7) в дифференциальной форме: $d(\alpha_n(t)\,\zeta^n(t))=$ $=\zeta^n(t-)\,d\alpha_n(t)+\alpha_n(t)\,d\zeta^n(t)+\zeta^n(dt_1,t_2-)\,\alpha_n(t_1,dt_2)+\zeta^n(t_1-,dt_2)\times$ $\times\,\alpha_n(dt_1,t_2)$, откуда

$$dP(t,\zeta(t))=P(dt,\zeta(t))+[P(t,\zeta(t-)+\gamma(t,u))-P(t,\zeta(t-))]*\nu(dt)+$$
$$+\zeta(dt_1,t_2-)\,(\tilde{P}(\zeta(\cdot))*\nu(\cdot,dt_2))+\zeta(t_1-,dt_2)\,(\tilde{P}(\zeta(\cdot))*\nu(dt_1,\cdot))+$$
$$+\int_0^{t_2}\int_R[P(t_1,dt_2,\zeta(t-)+\gamma(t_1,s_2,u))-$$
$$-P(t_1,dt_2,\zeta(t-))]\,\nu(dt_1,ds_2,du)+\int_0^{t_1}\int_R[P(dt_1,t_2,\zeta(t-)+$$
$$+\gamma(s_1,t_2,u))-P(dt_1,t_2,\zeta(t-))]\,\nu(ds_1,dt_2,du).\tag{10}$$

Здесь символы $P(dt,u)$, $P(dt_1,t_2,u)$ и $P(t_1,dt_2,u)$ означают, что зависящие от времени коэффициенты многочлена нужно заменить соответствующими дифференциалами. Рассмотрим теперь случайное поле $\xi(t)=\zeta(t)-\alpha(t)$, где $\alpha=\gamma*\pi$, $\alpha(t)$ — $\mathfrak{F}_t$-измеримое непрерывное поле ограниченной вариации. Тогда $P(t,\xi(t))=P(t,\zeta(t)-\alpha(t))=\hat{P}(t,\zeta(t))$, где $\hat{P}(t,x)=$ $=P(t,x-\alpha(t))$, и равенство (10) останется верным, если в левой части заменить $\zeta(t)$ на $\xi(t)$, а в правой — $P(\cdot)$ на $\hat{P}(\cdot)$. Окончательно,

$$dP(t,\xi(t))=P'_{t_1}(t,\xi(t))\,dt_1+P'_{t_2}(t,\xi(t))\,dt_2-P'_x(\xi(t-))\,\gamma(t,u)*\pi(dt)+$$
$$+[P(t,\xi(t-)+\gamma(t,u))-P(t,\xi(t-))]*\nu(dt)+$$
$$+P''_{xx}(t,\xi(t-))\,\alpha(dt_1,t_2)\,\alpha(t_1,dt_2)+\zeta(dt_1,t_2-)\,(\tilde{P}(\xi(\cdot))*\nu(\cdot,dt_2))+$$
$$+\zeta(t_1-,dt_2)\,(\tilde{P}(\xi(\cdot))*\nu(dt_1,\cdot))+dt_1\,(P_{12,t}*\nu(\cdot,dt_2))+$$
$$+dt_2\,(P_{21,t}*\nu(dt_1,\cdot))-\alpha(dt_1,t_2)\,(P_{12,u}*\nu(\cdot,dt_2))-$$
$$-\alpha(t_1,dt_2)\,((P_{21,u}*\nu(dt_1,\cdot)),$$

где

$$f_{12,t}*\nu(\cdot,dt_2)=\int_0^{t_1}\int_R[f'_{t_1}(t,\xi(t-)+\gamma(s_1,t_2,u))-$$
$$-f'_{t_1}(t,\xi(t-))]\,\nu(ds_1,dt_2,du);\quad f_{12,x}*\nu(\cdot,dt_2)=\int_0^{t_1}\int_R[f'_x(t,\xi(t-)+$$
$$+\gamma(s_1,t_2,u))-f'_x(t,\xi(t-))]\,\nu(ds_1,dt_2,du);$$

функции $f_{21,t}*\nu(dt_1,\cdot)$, $f_{21,x}*\nu(dt_1,\cdot)$ определяются аналогично.

Полученную формулу можно обобщить, совершая ряд предельных переходов, аналогичных однопараметрическому случаю (см. [5]), на более широкий класс функций $f(t, x)$ и $\gamma(s, u)$. Сформулируем результат в терминах интегралов по мерам π и $\mu = \nu - \pi$.

Теорема. *Пусть выполняются условия (D):*

1) *функция* $\gamma = \gamma(\omega, t, u)$, $(\omega, t, u) \in \Omega \times R_+^2 \times R$, $\mathfrak{F}$*-измерима и* $M \int\int_{R_+^2 \times R} \gamma^2(s, u)\,\pi(ds, du) < \infty$, $\int\int_{[0,T]\times R} |\gamma(t, u)|\,\pi(dt, du) < \infty$ *с вероятностью 1 для всех* T;

2) *функция* $f(t, x), (t, x) \in R_+^2 \times R$, *непрерывно дифференцируема по* t_1 *и* t_2, *трижды непрерывно дифференцируема по* x *и*

$$M \int\int_{R_+^2 \times R} [f(t, \xi(t-) + \gamma(t, u)) - f(t, \xi(t-))]^2 \pi(dt, du) < \infty;$$

$$\int\int_{[0,T]\times R} |f(t, \xi(t-) + \gamma(t, u)) - f(t, \xi(t-)) - f_x'(t, \xi(t-)) \times$$

$$\times \gamma(t, u)|\,\pi(dt, du) < \infty; \quad \int\int_{[0,T]\times R} |f_{xx}''(t, \xi(t-))| \times$$

$$\times \alpha(dt_1, t_2)\,\alpha(t_1, dt_2) < \infty; \quad \int_0^{T_2} |\tilde{f}(\xi(\cdot))| * (\nu(\cdot, dt_2) + \pi(\cdot, dt_2)) < \infty;$$

$$\int_0^{T_1} |\tilde{f}(\xi(\cdot))| * (\nu(dt_1, \cdot) + \pi(dt_1, \cdot)) < \infty;$$

$$\int_0^{T_2} (|f_{12,t}| + |f_{12,x}|)(\nu(\cdot, dt_2) + \pi(\cdot, dt_2)) < \infty;$$

$$\int_0^{T_1} (|f_{21,t}| + |f_{21,x}|)(\nu(dt_1, \cdot) + \pi(dt_1, \cdot)) < \infty$$

для всех $T \in R_+^2$ *с вероятностью 1. Тогда*

$$df(t, \xi(t)) = f_{t_1}'(t, \xi(t))\,dt_1 + f_{t_2}'(t, \xi(t))\,dt_2 +$$

$$+ [f(t, \xi(t-) + \gamma(t, u)) - f(t, \xi(t-))]*\mu(dt) + [f(t, \xi(t-) +$$

$$+ \gamma(t, u)) - f(t, \xi(t-)) - f_x'(\xi(t-))\,\gamma(t, u)]*\pi(dt) +$$

$$+ f_{xx}''(t, \xi(t-))\,\alpha(dt_1, t_2)\,\alpha(t_1, dt_2) + [\xi + \alpha](dt_1, t_2-) \times$$

$$\times (\tilde{P}(\xi(\cdot)) * [\mu + \pi](\cdot, dt_2)) + [\xi + \alpha](t_1-, dt_2)(\tilde{P}(\xi(\cdot)) * [\mu + \pi](dt_1, \cdot)) +$$

$$+ dt_1(f_{12,t} * [\mu + \pi](\cdot, dt_2)) + dt_2(f_{21,t} * [\mu + \pi](dt_1, \cdot)) -$$

$$- \alpha(dt_1, t_2)(f_{12,x} * [\mu + \pi](\cdot, dt_2)) - \alpha(t_1, dt_2)(f_{21,x} * [\mu + \pi](dt_1, \cdot)).$$

1. *Mazziotto G., Szpirglas J.* Equations du filtrage pour un processus de Poisson melángé à deux indices.— Stochastics, 1980, **4**, N 2, p. 89—119.
2. *Cairoli R., Walsh J. B.* Stochastic integrals in the plane.— Acta Mathem., 1975, **134**, N 1—2, p. 111—183.
3. *Мишура Ю. С.* О некоторых свойствах разрывных двупараметрических мартингалов.— Теор. вероятн. и мат. статистика, 1983, вып. 29, с. 72—84.
4. *Гихман И. И.* К теории бимартингалов.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 6, с. 9—12.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 612 с.

Киев. гос. ун-т

Поступила 27.06.83