УДК 517

Нгуен Донг Ань

Многочастотные случайные колебания в механических системах с одной степенью свободы под действием «белого шума», проходящего через линейный фильтр, имеющий все пары чисто мнимых характеристических чисел

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, уравнение движения которой имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \omega_0 t) + \sqrt{\varepsilon}\sigma q(t), \tag{1}$$

где $q(t)$ — случайное действие, результат прохождения «белого шума» через линейный фильтр

$$L_{2n} q(t) \equiv \frac{d^{2n} q(t)}{dt^{2n}} + \sum_{k=1}^{2n} l_k \frac{d^{2n-k} q(t)}{dt^{n-k}} = \dot{\xi}(t), \qquad l_k = \text{const}, \tag{2}$$

$\dot{\xi}(t)$ — «белый шум» с единичной интенсивностью. Рассмотрим случай, когда фильтр L_{2n} имеет только пары чисто мнимых характеристических чисел, т. е. его характеристическое уравнение $h_{2n}(\lambda) \equiv \lambda^{2n} + \sum\limits_{k=1}^{2n} l_k \lambda^{2n-k} = 0$ имеет только n пар корней вида

$$\lambda = \pm i\omega_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Предположим также, что в рассматриваемой системе нет внутренних резонансов, т. е.

$$m_s\omega_s \neq \omega_p m_p; \qquad s, p = 0, 1, \ldots, n; \qquad s \neq p, \tag{4}$$

m_s, m_p — натуральные числа. Исключая $q(t)$ из системы уравнений (1), (2), получим дифференциальное стохастическое уравнение порядка $(2n+2)$ для $x(t)$:

$$L_{2n}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = \varepsilon L_{2n} F(x, \dot{x}, \omega_0 t) + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t). \tag{5}$$

Характеристическое уравнение линейной порождающей системы имеет вид $h_{2n}(\lambda)(\omega_0^2 + \lambda^2) = 0$ и, как следует из (3), (4), допускает $(n+1)$ пар различных корней $\lambda = \pm i\omega_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Решение уравнения (5) ищется в виде

$$\overset{(2s)}{x} \equiv \frac{d^{2s}x}{dt^{2s}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^s \omega_k^{2s} A_k(t) \cos\psi_k(t),$$

$$\overset{(2s+1)}{x} \equiv \frac{d^{2s+1}x}{dt^{2s+1}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{s+1} \omega_k^{2s+1} A_k(t) \sin\psi_k(t), \quad \psi_k(t) = \omega_k t + \theta_k(t),$$
$$s = 0, 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $A_k(t)$, $\theta_k(t)$ — марковские дифференциальные случайные процессы, удовлетворяющие системе стохастических дифференциальных уравнений $dA_k(t) = H_{1k}dt + N_{1k}d\xi(t)$, $d\theta_k(t) = H_{2k}dt + N_{2k}d\xi(t)$. Дифференцируя соотношения (6), с использованием формулы Ито [1] получим систему стохастических дифференциальных уравнений для $A_k(t)$, $\theta_k(t)$:

$$dA_s = \{(-\varepsilon L_{2n} F \sin\psi_s/\omega_s + \varepsilon\sigma^2 \cos^2\psi_s/2A_s\omega_s^2 \prod_{i=0, i\neq s}^{n} (\omega_i^2 - \omega_s^2)\, dt -$$
$$- (\sqrt{\varepsilon}\sigma \sin\psi_s/\omega_s)\, d\xi(t)\} / \prod_{i=0, i\neq s}^{n} (\omega_i^2 - \omega_s^2), \quad d\theta_s(t) = \Big\{ -\varepsilon \Big(L_{2n} F \cos\psi_s/A_s\omega_s +$$
$$+ \sigma^2 \sin\psi_s \cos\psi_s/A_s^2\omega_s^2 \prod_{i=0, i\neq s}^{n} (\omega_i^2 - \omega_s^2) \Big) dt - (\sqrt{\varepsilon}\sigma \cos\psi_s/A_s\omega_s)\, d\xi\ t) \Big\} /$$
$$/ \prod_{i=0, i\neq s}^{n} (\omega_i^2 - \omega_s^2).$$

Усредненное уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК) для стационарной плотности вероятностей $w(A_0, \theta_0, \ldots, A_n, \theta_n)$ имеет вид [1]

$$\sum_{s=0}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial A_s}[D_s w] + \frac{\partial}{\partial \theta_s}[C_s w] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial A_s^2}[D_{ss} w] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \theta_s^2}[C_{ss} w] \right\} = 0, \tag{7}$$

$$D_s = \underset{t}{M} \Big\{ - L_{2n} F \sin\psi_s/\omega_s \prod_{i=0, i\neq s}^{n} (\omega_i^2 - \omega_s^2) +$$
$$+ \sigma^2 \cos^2\psi_s/2A_s\omega_s^2 \prod_{i=0, i\neq s}^{n} (\omega_i^2 - \omega_s^2)^2 \Big\},$$

$$C_s = \underset{t}{M} \Big\{ - L_{2n} F \cos\psi_s/A_s\omega_s \prod_{i=0, i\neq s}^{n} (\omega_i^2 - \omega_s^2) -$$
$$- \sigma^2 \sin\psi_s \cos\psi_s/A_s^2\omega_s^2 \prod_{i=0, i\neq s}^{n} (\omega_i^2 - \omega_s^2)^2 \Big\},$$

$$D_{ss} = \sigma^2/2\omega_s^2 \prod_{i=0, i\neq s}^{s} (\omega_i^2 - \omega_s^2)^2, \quad C_{ss} = \sigma^2/2A_s^2\omega_s^2 \prod_{i=0, i\neq s}^{n} (\omega_i^2 - \omega_s^2)^2.$$

Из уравнения (7) видно, что оно будет иметь решение, если ([4]) $D_s w - (D_{ss}/2)\,\partial w/\partial A_s = 0$, $C_s w - (C_{ss}/2)\,\partial w/\partial \theta_s = 0$. Отсюда

$$\frac{\partial \ln w}{\partial A_s} = \frac{2D_s}{D_{ss}}, \quad \frac{\partial \ln w}{\partial \theta_s} = \frac{2C_s}{C_{ss}}. \tag{8}$$

Укажем условия совместности системы (8).

$$\frac{\partial}{\partial \theta_s}\left(\frac{D_i}{D_{ii}}\right) = \frac{\partial}{\partial A_i}\left(\frac{C_s}{C_{ss}}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \theta_s}\left(\frac{C_i}{C_{ii}}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{C_s}{C_{ss}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial A_s}\left(\frac{D_i}{D_{ii}}\right) = \frac{\partial}{\partial A_i}\left(\frac{D_s}{D_{ss}}\right), \qquad s,\, i = 0,\, 1,\, \dots,\, n. \tag{9}$$

Если выполняются условия (9), из (8) получим стационарную плотность вероятностей амплитуд и фаз

$$w(A_0, \theta_0, \dots, A_n, \theta_n) = h \exp\left\{\int \sum_{s=0}^{n}\left[\frac{2D_s}{D_{ss}}\,dA_s + \frac{2C_s}{C_{ss}}\,d\theta_s\right]\right\}. \tag{10}$$

В качестве примера рассмотрим уравнение Ван дер Поля под действием периодической силы и узкополосного стационарного случайного процесса

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon(1 - \gamma x^2)\,\dot{x} + \varepsilon P \cos\omega_0 t + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma q(t), \tag{11}$$

где $q(t)$ — узкополосный стационарный случайный процесс, у которого

$$K_{qq}(\tau) = \sigma_1^2 \exp(-\varepsilon\alpha\,|\,\tau\,|)\,[\cos\omega_1\tau + \varepsilon\alpha \sin\omega_1\,|\,\tau\,|/\omega_1],$$

$$\Phi_{qq}(\tau) = \frac{2\varepsilon\sigma_1^2\alpha}{\pi}\,\frac{(\omega_1^2 + \varepsilon^2\alpha^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2 - \varepsilon^2\alpha^2)^2 + 4\varepsilon^2\alpha^2\omega^2}.$$

Как известно [2, 3], такой случайный процесс можно считать результатом прохождения «белого шума» $\dot{\xi}(t)$ через фильтр

$$L_2 q \equiv \ddot{q} + 2\varepsilon\alpha\dot{q} + (\omega_1^2 + \varepsilon^2\alpha^2)\,q = \dot{\xi}(t). \tag{12}$$

Исключая $q(t)$ из системы (11), (12) и пренебрегая членами малости выше ε, получим

$$\ddot{\ddot{x}} + (\omega_0^2 + \omega_1^2)\,\ddot{x} + \omega_0^2\omega_1^2 x = \varepsilon[\dddot{x} - x^2\dddot{x} - 2\dot{x}^3 - 6x\dot{x}\ddot{x} + (\omega_1^2 - \omega_0^2)\,P\cos\omega_0 t +$$

$$+ \omega_1^2\dot{x} - \omega_1^2 x^2\dot{x} - 2\alpha\dddot{x} - 2\alpha\omega_0^2 x]. \tag{13}$$

В данном случае $n = 1$. Решение уравнения (13) ищется в виде

$$x(t) = A_0\cos\psi_0 + A_1\cos\psi_1, \quad \dot{x}(t) = -\omega_0 A_0 \sin\psi_0 - \omega_1 A_1 \sin\psi_1,$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A_0\cos\psi_0 - \omega_1^2 A_1\cos\psi_1,$$

$$\dddot{x}(t) = \omega_0^3 A_0\sin\psi_0 + \omega_1^3 A_1\sin\psi_1, \quad \psi_0 = \omega_0 t + \theta_0, \quad \psi_1 = \omega_1 t + \theta_1, \quad \omega_0 \neq \omega_1.$$

Соответствующее усредненное уравнение ФПК для стационарной плотности вероятностей $w(A_0, \theta_0, A_1, \theta_1)$, как видно из (7), имеет вид

$$\sum_{s=0}^{1}\left\{\frac{\partial}{\partial A_s}(D_s w) + \frac{\partial}{\partial \theta_s}(C_s w) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial A_s^2}(D_{ss} w) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \theta_s^2}(C_{ss} w)\right\} = 0,$$

где

$$D_0 = \sigma^2/4A_0\omega_0^2(\omega_1^2-\omega_0^2)^2 + A_0/2 - \gamma A_0^3/8 - \gamma A_1^2A_0/4 + P\sin\theta_0/2\omega_0,$$

$$C_0 = -P\cos\theta_0/2\omega_0,\quad D_1 = \sigma^2/4A_1\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_0^2)^2 + A_1/2 - \gamma A_1^3/8 - \gamma A_0^2A_1/4,$$

$$C_1 = 0,\quad D_{00} = \sigma^2/2\omega_0^2(\omega_1^2-\omega_0^2)^2,\quad C_{00} = \sigma^2/2A_0^2\omega_0^2(\omega_1^2-\omega_0^2)^2,$$

$$D_{11} = \sigma^2/2\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_0^2)^2,\quad C_{11} = \sigma^2/2A_1^2\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_0^2)^2.$$

Нетрудно проверить, что в данном случае условие совместности (9) выполняется, и по формуле (10) получим

$$w(A_0,\theta_0,A_1) = hA_0A_1\exp\{(\omega_1^2-\omega_0^2)^2\,[A_0^2\omega_0^2 + A_1^2\omega_1^2 - \gamma(\omega_0^2A_0^4/8 + \omega_1^2A_1^4/8) - \gamma A_1^2A_0^2/2 - 2P\omega_0A_0\sin\theta_0]/\sigma^2\}.$$

Плотность вероятностей (10) будет достигать экстремума в точках (A_0, θ_0, A_1), где

$$\sigma^2/4A_0\omega_0^2(\omega_1^2-\omega_0^2)^2 + A_0/2 - \gamma A_0^3/8 - \gamma A_1^2A_0/4 + P\sin\theta_0/2\omega_0 = 0,$$

$$-P\cos\theta_0/2\omega_0 = 0,\quad \sigma^2/4A_1\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_0^2)^2 + A_1/2 - \gamma A_1^3/8 - \gamma A_0^2A_1/4 = 0. \quad (14)$$

Из (14) следует, что имеет место именно двухчастотное случайное колебание.

1. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах.—В кн.: Приближенные методы исследования нелинейных систем. Киев, 1976, с. 102—147.
2. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем.— М. : Наука, 1979.— 336 с.
3. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний.— М.: Наука, 1980.— 368 с.
4. *Нгуен Донг Ань.* Случайные колебания механической системы с одной степенью свободы под воздействием периодической силы и «белого шума».—Укр. мат. журн., 1982, 4, № 5, с. 633—636.

НЦНИ Вьетнама, Ин-т механики

Поступила 01.02.84