УДК 517.944

Н. Н. Чаус

Получение классов единственности решения задачи Коши из классов тривиальности решения

1. Для системы уравнений

$$\partial u/\partial x = P(x, D_t, D_y)\, u, \tag{1}$$

рассматриваемой в области $G = \{x > 0,\ 0 \leqslant t_i \leqslant 1,\ -\infty < y_j < \infty\}$, устанавливаются классы тривиальности решения.

Под классом тривиальности решения системы уравнений (1) понимается всякая совокупность определенных в области G функций $\Theta = \Theta(x, t_1, \ldots, t_\nu, y_1, \ldots, y_m)$, если к этой совокупности принадлежит своими компонентами $u_i(x, t_1, \ldots, t_\nu, y_1, \ldots, y_m)$, $i = 1, \ldots, N$, из всех классических решений системы (1) лишь решение $u_i \equiv 0$.

Будем предполагать, что элементы матрицы $P = P(x, D_t, D_y)$ — полиномы от $D_{t_i} = \partial/\partial t_i$ и $D_{y_j} = \partial/\partial y_j$ с коэффициентами, непрерывно зависящими от x и допускающими степенную мажорацию. Если каждый коэффициент $a_\gamma(x)$ в P заменить функцией $C_\gamma(1+x)^{\alpha_\gamma}$, где $|a_\gamma(x)| \leqslant C_\gamma(1+x)^{\alpha_\gamma}$, C_γ, $\alpha_\gamma \geqslant 0$, то полученную таким путем матрицу будем называть мажорирующей матрицу P.

Назовем матрицу $P(x, D_t, D_y)$ матрицей типа D_{y_1}, если при некотором натуральном ν все элементы матрицы $P^\nu(x, D_t, D_y)$ содержат множитель $\partial/\partial y_1$.

Назовем матрицу P матрицей типа $D_{y_1} \cup D_{y_2}$, если при некотором натуральном ν все элементы матрицы P^ν состоят из слагаемых, каждое из которых содержит хотя бы один из множителей $\partial/\partial y_1$ или $\partial/\partial y_2$. Например, если матрица P такая, что все ее элементы на главной диагонали и по какую-нибудь сторону от нее содержат множитель $\partial/\partial y_1$, то P — матрица типа D_{y_1}. Понятно, что матрица типа D_{y_1} является матрицей и типа $D_{y_1} \cup D_{y_2}$.

Аналогично определяется матрица типа $D_{y_1} \cup \ldots \cup D_{y_s}$.

Теорема 1. *Пусть $M_0(x)$ и $M(\zeta_2, \ldots, \zeta_m)$ — положительные и непрерывные функции при x, $\zeta_i \geqslant 0$ и при произвольном $h > 0$ $x_k^h M_0(x_k) \to 0$ для некоторой последовательности $x_k > 0$, стремящейся к ∞.*

Тогда класс функций $\Theta(x, t, y)$, выделяемых условием

$$|\Theta| \leqslant C_\Theta M_0(x)\, M(|y_2|, \ldots, |y_m|) \exp(-\delta |y_1|), \qquad \delta > 0,$$

является классом тривиальности решения системы уравнений (1) с матрицей $P(x, D_t, D_y)$ типа D_{y_1}.

Если $P(x, D_t, D_y)$ — *матрица типа* $D_{y_1} \cup \ldots \cup D_{y_s}$, *то функции* Θ *с условием*

$$|\Theta| \leqslant C_\Theta M_0(x) M(1, \ldots, 1, |y_{s+1}|, \ldots, |y_m|) \exp\left(-\delta \sum_{i=1}^{s} |y_i|\right), \qquad \delta > 0,$$

образуют класс тривиальности решения системы уравнений (1).

В доказательстве теоремы будет использована следующая лемма, несколько обобщающая утверждение из [3] о принадлежности классического решения задачи Коши множеству обобщенных решений и так же доказывающаяся.

Лемма. *Пусть функции* $u_k(x, t, y)$, $k = 1, \ldots, N$ *переменных* x, $t = (t_1, \ldots, t_\nu)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *определены в области* $G = \{x > 0,\ 0 \leqslant t_i \leqslant 1,\ -\infty < y_j < \infty\}$ *и связаны соотношением*

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \sum_{k=1}^{N} Q_k(x, \partial/\partial t, \partial/\partial y)\, u_k(x, t, y),$$

где $Q_k(x, \partial/\partial t, \partial/\partial y)$ — *дифференциальные выражения от* $\partial/\partial t_1, \ldots, \partial/\partial t_\nu$, $\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_m$ *порядка не выше* q *по совокупности переменных и с непрерывными при* $x > 0$ *коэффициентами*, $k = 1, \ldots, N$. *Предположим, что с некоторыми непрерывными при* $x > 0$ *и* $y \in R^m$ *функциями* $M(x)$ *и* $h(y)$ *выполняются оценки*

$$|u_k| \leqslant M(x)\, h(y), \qquad k = 1, \ldots, N,$$

и для некоторой достаточно гладкой $\psi(y)$ *выполнены условия*

$$\int_{R^m} h(y) \left|\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)^\beta \psi(y)\right| dy < \infty, \quad j = 1, \ldots, m,\ \beta = 0, 1, \ldots, q.$$

Пусть $\omega(t) = \omega(t_1, \ldots, t_\nu)$ — *бесконечно дифференцируемая функция с носителем в* $[0, 1]^\nu$. *Для* $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots$ *положим*

$$\left(u_k, \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)^\beta \omega\psi\right) = \int_{[0,1]^\nu} dt \int_{R^m} u_k(x, t, y) \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)^\alpha \omega(t) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)^\beta \psi(y)\, dy.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}(u_1, \omega\psi) = \sum_{k=1}^{N} (u_k, Q_k^+(x, \partial/\partial t, \partial/\partial y)\, \omega\psi),$$

где Q_k^+ — *формально сопряженное выражение к* Q_k.

Доказательство теоремы проведем для случая одномерного t и $y = (y_1, y_2)$. Докажем только первое утверждение теоремы, когда матрица P является матрицей типа D_{y_1}. Из него легко можно будет усмотреть и доказательство теоремы в полном объеме.

Итак, предположим, что $(u_1, \ldots, u_N)$ — решение системы уравнений (1) и

$$|u_i| \leqslant C M_0(x)\, M(|y_2|) \exp(-\delta |y_1|), \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Пусть $\omega(t)$ и $\varphi(y_2)$ — финитные, бесконечно дифференцируемые функции, причем $\omega(t) = 0$ при $t \bar{\in} [0, 1]$. Пусть $\rho(y_1)$ — полином от y_1. Введем в рассмотрение последовательность $H_{k,l,r}(x)$ по трем индексам $k, l, r = 0, 1, \ldots$ вектор-функций, полагая

$$H_{k,l,r}(x) = ((u_1, \omega^{(k)}\varphi^{(l)}\rho^{(r)}), \ldots, (u_N, \omega^{(k)}\varphi^{(l)}\rho^{(r)})),$$

$$(u_i, \omega^{(k)}\varphi^{(l)}\rho^{(r)}) = \int_0^1 dt \int_{R^2} u_i(x, t, y_1, y_2)\, \omega^{(k)}(t)\, \varphi^{(l)}(y_2)\, \rho^{(r)}(y_1)\, dy_1 dy_2.$$

Используя лемму, легко обнаружить, что $H_{k,l,r}(x)$ удовлетворяет системе уравнений

$$dH_{k,l,r}(x)/dx = Q(x, T, Y_1, Y_2) H_{k,l,r}(x). \tag{2}$$

В ней матрица $Q = Q(x, T, Y_1, Y_2)$ определяется элементами $Q_{ij} = (P_{ij})^+ = (P_{ij}(x, T, Y_1, Y_2))^+$, а операторы T, Y_1 и Y_2 перестановочны с операцией умножения на функции от x и увеличивают на единицу соответственно первый, второй и третий индексы последовательности. Если обозначить $|H_{k,l,r}(x)|$ вектор-функцию с компонентами, равными модулям соответствующих компонент вектор-функции $H_{k,l,r}(x)$, и далее $H(x) = |H_{0,0,0}(x)|$, то из системы уравнений (2) можно получить такое покомпонентное неравенство [1]:

$$H(x) \leqslant H(\xi) + \xi P_0(\xi, T, Y_1, Y_2) H(\xi) + \ldots + \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} P_0^{n-1}(\xi, T, Y_1, Y_2) H(\xi) + \\ + \int_x^{\xi} d\eta_1 \int_{\eta_1}^{\xi} \ldots \int_{\eta_{n-1}}^{\xi} P_n^0(\eta_n, T, Y_1, Y_2) H(\eta_n) d\eta_n, \qquad 0 < x < \xi. \tag{3}$$

В правой части этого неравенства ξ и n — параметры, а матрица P_0 — мажорирующая для P. Заметим, что матрица P_0 вместе с P— матрица типа D_{y_1}, так что при некотором ν все элементы матрицы P_0^{ν} имеют множитель d/dy_1. Положим теперь в (3) $n = \nu(p+1)$, где p — степень полинома $\rho(y_1)$. Так как

$$H(\eta_n) = |(u(\eta_n, t, y_1, y_2), \omega(t) \varphi(y_2) \rho(y_1))|,$$

то последнее слагаемое в формуле (3) содержит дифференцирование по y_1 порядка $p+1$ и поэтому обращается в нуль. Если учесть еще, что все коэффициенты матрицы P_0^s, $s = 0, 1, \ldots, \nu(p+1)-1$, оцениваются функцией $C_p(1+\xi)^{n_0(\nu(p+1)-1)}$, то согласно (3) получим:

$$H(x) \leqslant H(\xi) + \xi P_0 H(\xi) + \ldots + \frac{\xi^{\nu(p+1)-1}}{[\nu(p+1)-1]!} P_0^{\nu(p+1)-1} H(\xi) \leqslant \\ \leqslant C C_p (1+\xi)^{(1+n_0)(\nu(p+1)-1)} m_p M_0(\xi).$$

Устремляя в этом неравенстве параметр $\xi = x_k$ к ∞, получаем $H(x) \equiv 0$, или $(u_i(x, t, y_1, y_2), \omega(t) \varphi(y_2) \rho(y_1)) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, N$. Благодаря тому, что последнее равенство имеет место для произвольных $\omega(t) \in C_0^{\infty}(0, 1)$, $\varphi(y_2) \in C_0^{\infty}(-\infty, \infty)$ и $\rho(y_1) = y_1^p$, $p = 0, 1, \ldots$, заключаем, как в [2], что $u_i \equiv 0$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что для системы (1) с матрицей P типа $\bigcup_{k=1}^{m} D_{y_k}$ классом тривиальности решения будет класс функций Θ с ограничением

$$|\Theta| \leqslant C_{\Theta} M_0(x) \exp\left\{-\delta \sum_{k=1}^{m} |y_k|\right\}.$$

Этот предельный результат фактически содержится в [2], и теорема 1, таким образом, дополняет названную работу, давая классы тривиальности решения, несимметричные по переменным y_k.

2. В качестве простого следствия из теоремы 1 сформулируем классы единственности решения задачи Коши

$$\partial u/\partial \tau = P(\tau, D_y) u(\tau, y), \tag{4}$$

$$u|_{\tau=1} = u(y) \tag{5}$$

в области $\tau \in [0, 1]$, $y \in R^m$. Пусть коэффициенты матрицы P непрерывно зависят от τ, $\tau \in [0, 1]$, $u = (u_1, \ldots, u_N)$. Обозначим через $P_0(\tau, D_y)$ матрицу, определенную при $\tau \geqslant 0$, равную матрице $P(\tau, D_y)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ и матрице $P(1, D_y)$ при $\tau > 1$. Будем говорить, что матрица $P(\tau, D_y)$ системы уравнений (4) — матрица типа $D_{y_1} \cup \ldots \cup D_{y_s}$, если такой является матрица $P_0(\tau, D_y)$.

Теорема 2. *Задача Коши (4), (5) с матрицей $P(\tau, D_y)$ типа $D_{y_1} \cup \ldots \ldots \cup D_{y_s}$ может иметь лишь одно решение $u(\tau, y)$, попадающее при всех $\tau \in [0, 1]$ в класс функций $f(y)$ с условием*

$$|f(y)| \leqslant M_f(|y_{s+1}|, \ldots, |y_m|) \exp\left(-\delta \sum_{i=1}^{s} |y_i|\right), \qquad (6)$$

в котором $\delta > 0$, а $M_f(\zeta_{s+1}, \ldots, \zeta_m)$ — непрерывная положительная при $\zeta_\nu > 0$ функция.

Доказательство. Для начала заметим, что выделяемый теоремой 1 класс функций $\Theta(x, t, y)$ будет классом тривиальности не только классического решения, но и обобщенного решения $u^0(x, t, y)$, для которого $\frac{d}{dx}(u_j^0, \omega\psi) = \sum_{k=1}^{N} (u_k^0, (P_{jk})^+ \omega\psi)$ с функциями $\omega(t)$, $\psi(y)$ такими же, что и в доказательстве теоремы 1. Это следует из того, что доказательство теоремы 1 начинается с использования сформулированной вначале леммы.

Пусть $u(\tau, y)$ — решение задачи Коши (4), (5) с $u(y) \equiv 0$ — и его компоненты принадлежат классу функций $f(y)$, выделяемых теоремой. Покажем, что $u(\tau, y) \equiv 0$. Для этого продолжим $u(\tau, y)$ из области $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ $y \in R^m$ нулем в область $\tau > 1$, $y \in R^m$. Легко видеть, что полученная в, области $\tau > 0$, $y \in R^m$ функция $u^0(\tau, y)$ будет таким обобщенным решением системы уравнений $\partial u^0(\tau, y)/\partial\tau = P_0(\tau, D_y)\, u^0(\tau, y)$, на которое распространяется теорема 1. Из принадлежности $u^0(\tau, y)$ классу функций $f(y)$ и из финитности $u^0(\tau, y)$ по τ в силу теоремы 1 имеем равенство $u^0(\tau, y) \equiv 0$. Отсюда $u(\tau, y) \equiv 0$. Теорема 2 доказана.

Отметим, что классом единственности решения задачи Коши (4), (5), когда рассматриваемая система имеет приведенный порядок $p > 1$, является совокупность функций $f(y)$, выделяемых условием [3]:

$$|f(y)| \leqslant C_f \exp(a\|y\|^{p'}), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Классы единственности решения, полученные в теореме 2, качественно отличаются от общеизвестных: оценки (6) не зависят от порядка системы уравнений и, ввиду произвольности функции M, не имеется никаких ограничений на рост $|f(y)|$ по части переменных $y_{s+1}, \ldots, y_m$ при их стремлении к бесконечности.

В заключение отметим, что наряду с задачей Коши для системы уравнений (4), можно ставить вопрос о нахождении классов тривиальности решения в той же области $\tau \in [0, 1]$, $y \in R^m$. При этом каждый класс функций, являющийся классом тривиальности решения, формально будет и классом единственности решения задачи Коши. Фактически же в этом классе функций будет содержаться лишь решение задачи Коши с нулевым начальным условием. Поэтому при выделении класса функций в качестве класса единственности решения задачи Коши естественно следить за тем, чтобы этот класс функций не оказался классом тривиальности решения рассматриваемой системы уравнений. По этой причине добавим к теореме 2 элементарный пример, показывающий, что в общем случае она не тривиальна. Функция $u(\tau, y) = \exp(-|y_1|^2)$ является решением уравнения $\partial u/\partial\tau = \partial^2 u/\partial y_1 \partial y_2$ и принадлежит классу функций (6).

1. *Чаус Н. Н.* О поведении на бесконечности одного класса систем уравнений с переменными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 2, с. 273—278.
2. *Чаус Н. Н.* О классах тривиальности решений некоторых систем уравнений с переменными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 5, с. 641—647.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.— 276 с.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию 13.04.81