УДК 518:517.948

Н. И. Ронто

О методе коллокации для многоточечной краевой задачи

Применение метода коллокации к двухточечным краевым задачам для нелинейного дифференциального уравнения высшего порядка впервые выполнено в [1], а для систем нелинейных дифференциальных уравнений нормального вида — в [2].

Установим сходимость и оценим погрешность метода коллокации для систем нелинейных дифференциальных уравнений, рассматриваемых при многоточечных линейных краевых условиях вида

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{\nu} B_i x(\tau_i) = d, \quad a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_\nu = b. \tag{2}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E_m$, $f(t, x) = (f_1(t, x), \ldots, f_m(t, x))$ — вектор-функция со значениями в E_m, определенная и непрерывная по t, x для $t \in [a, b]$, $x \in D \subset E_m$, B_i — заданные постоянные матрицы, удовлетворяющие условию

$$\det\left(R = \sum_{i=0}^{\nu} B_i\right) \neq 0, \tag{3}$$

D — замкнутая, ограниченная область пространства E_m.

Согласно методу коллокации приближенное решение задачи (1), (2) находится в виде полинома, удовлетворяющего краевым условиям при произвольных значениях определенного числа коэффициентов. При этом вид приближенного решения определяется рассматриваемыми краевыми условиями. Например, для двухточечной краевой задачи (1), (2) в случае, когда матрицы B_0 и B_1 диагональны, приближенное решение $x_n(t) = (x_{n1}(t), \ldots, x_{nm}(t))$ можно искать [2] в виде линейной комбинации координатных функций $\varphi_k(t)$: $x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} Q_k \varphi_k(t)$, где $Q_k \varphi_k(t) = (Q_{k1}\varphi_{k1}(t), \ldots, Q_{km}\varphi_{km}(t))$, а функции $\varphi_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, удовлетворяют двухточечным краевым условиям $B_0 \varphi_k(a) + B_1 \varphi_k(b) = d$.

Если краевые условия (2) периодические, т.е. $x(a) = x(b)$, то, очевидно, $\det R = 0$ и при нахождении периодических решений следует использовать метод тригонометрической коллокации [2], задающий приближенное решение в виде тригонометрических полиномов.

Для задачи (1), (2) приближенное решение $x_n(t)$ ищется в виде векторного полинома $(n+1)$-й степени

$$x_n(t) = Q_0 + Q_1 t + \dots + Q_{n+1} t^{n+1}, \tag{4}$$

где $Q_k = (Q_{k1}, Q_{k2}, \dots, Q_{km})$, $k = 0, 1, \dots, n+1$. Можно подобрать коэффициент Q_0 таким образом, чтобы приближенное решение (4) удовлетворяло краевым условиям (2) при произвольных значениях остальных коэффициентов Q_k, $k = 1, 2, \dots, n+1$:

$$x_n(t) = d + R^{-1} \sum_{k=1}^{n+1} H_k Q_k + \sum_{k=1}^{n+1} Q_k t^k, \tag{5}$$

где $H_k = -\sum_{i=0}^{\nu} \tau_i^k B_i$. Неизвестные коэффициенты Q_k, $k = 1, 2, \dots, n+1$, определяются по методу коллокации из условия, чтобы приближенное решение (5) удовлетворяло системе дифференциальных уравнений (1) в $(n+1)$ узлах коллокации $t_0, t_1, \dots, t_n$. При этом за эти точки выбираются корни полинома $(n+1)$-й степени $\psi_{n+1}(t)$, принадлежащего к системе ортогональных с весом $\rho(t)$ на отрезке $[a, b]$ многочленов $\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, где $\int_a^b \rho^{-1}(t)\, dt < \infty$. Тогда для нахождения Q_k, $k = 1, 2, \dots, n+1$, придем к системе определяющих алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n+1} k Q_k t_i^{k-1} = f\left(t_i, R^{-1} \sum_{k=1}^{n+1} H_k Q_k + \sum_{k=1}^{n+1} Q_k t_i^k\right), \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{6}$$

Предполагая, что краевая задача (1), (2) разрешима, покажем, что, начиная с достаточно больших $n \geqslant n_0$, система определяющих уравнений (6) также разрешима и при $n \to \infty$ приближенное решение (5), (6) сходится к точному.

Под нормой вектор-функции $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ в пространствах $C[a, b]$ и $L_s^2[a, b]$ понимается соответственно

$$|x(t)|_C = \max_{i=1,2,\dots,m} \max_{t \in [a,b]} |x_i(t)|,$$

$$\|x(t)\| = \max_{i=1,2,\dots,m} \|x_i(t)\| \max_{i=1,2,\dots,m} \left[\int_a^b \rho(s)\, |x_i(s)|^2\, ds\right]^{1/2}.$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $x_0(t)$ — решение краевой задачи* (1)—(3), *элементы вектор функции $f(t, z)$ и матрицы Якоби $F(t, z) = (\partial f_i(t, z)/\partial z_j)$ определены и непрерывны при*

$$t \in [a, b], \ |z - x_0|_C \leqslant \delta, \ \delta > 0. \tag{7}$$

Кроме того, линейное уравнение в вариациях для (1) *относительно ее решения $x_0(t)$*

$$\dot{x} = F(t, x_0(t))\, x \tag{8}$$

при однородных краевых условиях (2) *имеет только нулевое решение.*

Тогда будет существовать такое $\varkappa > 0$, для которого решение $x_0(t)$ краевой задачи (1)—(2) *будет единственным в шаре*

$$\|\dot{x} - \dot{x}_0\| \leqslant \varkappa, \tag{9}$$

и система определяющих алгебраических уравнений метода коллокации (6) *будет разрешимой в шаре* (9) *при достаточно больших $n \geqslant n_0$ единственным образом. При этом приближенное решение для $n \to \infty$ равномерно сходится к точному решению $x_0(t)$, а $\dot{x}_n(t)$ сходится к $\dot{x}_0(t)$ в метрике пространства $L_\rho^2[a, b]$.*

Для скорости сходимости будут выполняться оценки

$$| x_n(t) - x_0(t) |_C \leqslant c_1 E_n(\dot{x}_0), \tag{10}$$

$$\| \dot{x}_n(t) - \dot{x}_0(t) \| \leqslant c_2 E_n(\dot{x}_0), \quad E_n(\dot{x}_0) = \max_{i=1,2,\ldots,m} E_n(\dot{x}_{0i}), \tag{11}$$

где $E_n(\dot{x}_{0i})$ — наилучшее равномерное приближение функции $\dot{x}_{0i}(t)$ многочленом степени не выше n, c_1, c_2 — не зависящие от n постоянные.

Доказательство проведем по схеме, изложенной в [1]. Введем в рассмотрение функцию Грина $G(t, s)$ дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = 0$ при однородных краевых условиях (2). По аналогии с [3] можно показать, что

$$G(t, s) = \begin{cases} E - R^{-1} \sum\limits_{i=k}^{v} B_i, & \text{при } s < t, \ \tau_{k-1} \leqslant s < \tau_k, \\ -R^{-1} \sum\limits_{i=k}^{v} B_i, & \text{при } s \geqslant t, \ \tau_{k-1} \leqslant s < \tau_k, \end{cases}$$

где E — единичная матрица. Нетрудно доказать, что $Gv = R^{-1}d + \int\limits_a^b G(t, s)\, v(s)\, ds$ — линейный вполне непрерывный оператор из пространства $L_\rho^2[a, b]$ в пространство $C[a, b]$. Обозначая $v_0(t) = \dot{x}_0(t)$, получаем, что $x_0 = Gv_0$. В силу ограниченности оператора G, в пространстве L_ρ^2 можно выбрать шар $\| v - v_0 \| \leqslant \varkappa_1$ такого радиуса $\varkappa_1$, при котором функции $z = Gv$ удовлетворяют условию (7). Тогда, если на шаре $\| v - v_0 \| \leqslant \varkappa_1$ рассматривать оператор $K \in [L_\rho^2 \to C] : Kv = f(t, Gv)$, то из непрерывности $f(t, x)$ и вполне непрерывности G получим, что оператор K на шаре $\| v - v_0 \| \leqslant \varkappa_1$ вполне непрерывен.

Если через P обозначить оператор вложения пространства $C[a, b]$ в пространство, L_ρ^2, $[a, b]$, то краевую задачу (1), (2) сведем к уравнению

$$v = PKv. \tag{12}$$

Между решениями v_0, x_0 уравнения (12) и краевой задачи (1), (2) существует связь: $v_0 = \dot{x}_0$, $x_0 = Gv_0$.

Аналогичным образом, положив $v_n = \dot{x}_n$, имеем, что $x_n = Gv_n$ и система определяющих уравнений метода коллокации (6) равносильна операторному уравнению $P_n v_n = P_n K v_n$, где P_n — линейный оператор, сопоставляющий каждой непрерывной функции ее интерполяционный многочлен Лагранжа степени не выше n, построенный по рассматриваемым нами узлам — корням полинома $\psi_{n+1}(t)$. Выбор в качестве узлов коллокации корней полинома $\psi_{n+1}(t)$ обеспечивает среднеквадратическую с весом $\rho(t)$ сходимость интерполяционного полинома Лагранжа к приближаемой функции. Это означает, что последовательность операторов $P_n \in [C \to L_\rho^2]$ сильно стремится к оператору P и, следовательно, по теореме Банаха—Штейнгауза $\| P_n \| \leqslant c_4 = \mathrm{const}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Так как $x_n(t)$ — полином степени $(n+1)$, то $v_n(t) = \dot{x}_n(t)$ — полином степени не выше n, поэтому $P_n v_n = v_n$, что позволяет свести систему алгебраических уравнений метода коллокации к уравнению

$$v_n = P_n K v_n. \tag{13}$$

Предположение о том, что уравнение (8) при однородных краевых условиях (2) имеет лишь тривиальное решение, обеспечивает существование лишь нулевого решения операторного уравнения $v - PK'(v_0)\, v = 0$, $K'(v) = \partial f(t, Gv)/\partial z \times G$.

Это, в свою очередь, позволяет заключить, что v_0 — изолированное решение уравнения (12) с ненулевым индексом. Тогда для операторных уравнений (12), (13) в банаховом пространстве L_ρ^2 будут выполняться все условия теоремы 3 из [1], в силу которых решение v_0 уравнения (12) будет единственным в шаре $\| v - v_0 \| \leqslant \varkappa$, а при $n \geqslant n_0$ уравнение (13) будет иметь в этом шаре единственное решение v_n такое, что

$$\| v_n - v_0 \| \leqslant c_3 \| v_0 - P_n P^{-1} v_0 \|, \quad c_3 = \text{const}, \tag{14}$$

и при $n \to \infty$ $\| v_n - v_0 \| \to 0$, где $P^{-1} v_0$ означает, что v_0 рассматривается как элемент пространства C.

Если ввести вспомогательный произвольный векторный многочлен степени не выше $n: p_n(t) = (p_{n1}(t), \ldots, p_{nm}(t))$, то с учетом формулы $P_n P^{-1} p_n(t) = p_n(t)$ из неравенства (14) нетрудно получить доказываемую оценку (11):

$$\| v_n - v_0 \| \leqslant c_3 (\| v_0 - p_n \| + \| P_n P^{-1} (v_0 - p_n) \|) =$$

$$= c_3 \max_{i=1,2,\ldots,m} [\| v_{0i} - p_{ni} \| + \| P_n P^{-1} (v_{0i} - p_{ni}) \|] \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \max_{i=1,2,\ldots,m} \left[\left(\int_a^b \rho(s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} + c_4 \right] \max_{t \in [a,b]} | v_{0i}(t) - p_{ni}(t) | \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \left[\left(\int_a^b \rho(s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} + c_4 \right] \max_{i=1,2,\ldots,m} E_n(v_{0i}) \leqslant c_2 E_n(\dot{x}_0).$$

Справедливость неравенства (10) можно установить аналогично соответствующему неравенству [2], используя неравенство Коши—Буняковского, оценку (11) и выражение

$$x_n(t) - x_0(t) = \int_a^b G(t, s) (v_n(s) - v_0(s))\, ds.$$

Теорема доказана.

1. *Вайникко Г.* О сходимости метода коллокации для нелинейных дифференциальных уравнений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, 6, № 1, с. 35—42.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища школа, 1976.— 180 с.
3. *Urabe M.* An existence theorem for multipoint boundary value problems.— Funk. Ekvacioj, 1966, 9, N 1—3, p. 43—60.

Институт проблем моделирования
в энергетике АН УССР

Поступила в редакцию
12.05.82