УДК 517.922

Л. Г. Просенюк, С. А. Яценко

О поведении решений одного вещественного дифференциального уравнения второго порядка, не разрешенного относительно старшей производной

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\omega(t)\, d^2x/dt^2 = a\,dx/dt + x^3 f(t, x, dx/dt, d^2x/dt^2), \tag{1}$$

где $\omega(t) \in C^1(0, t_0)$, $\omega > 0$, $d\omega/dt > 0$, $\omega(+0) = d\omega(+0)/dt = 0$, $a = \text{const} > 0$, $\int\limits_0^{t_0} \frac{dt}{\omega t} = +\infty$, $\omega (d\omega/dt)^{-1} = o(1)$ и $\omega^{-k} \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{\omega(t)}\right| = o(1)$, когда $t \to 0$ при любом $k > 0$ функция f непрерывна в области $D\,[0 \leqslant t \leqslant t_0,\ |x| \leqslant R,\ |dx/dt| \leqslant R_1,\ |d^2x/dt^2| \leqslant R_2]$ и имеет там непрерывные частные производные по x, dx/dt, d^2x/dt^2.

В работе выясняется вопрос о существовании и асимптотике нетривиальных решений уравнения (I), обладающих свойством: $x \to 0$, $dx/dt \to 0$, $d^2x/dt^2 \to 0$ при $t \to 0$.

Аналогичным вопросам посвящен ряд работ, например [1, 2]. Так, в [1] приводятся достаточные условия существования и единственности решения системы уравнений, частично разрешенных относительно производной. В [2] разработанный автором метод степенных рядов прилагается к решению уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. В отличие от этих и других работ в данной статье выясняется асимптотика решений и их производных уравнения более общего типа чем ранее.

Сформулируем и докажем основной результат.

Т е о р е м а. *Для каждого числа c можно указать по крайней мере одно решение $x(t)$ уравнения (1), при достаточно малых t удовлетворяющее неравенствам*

$$\left| x(t) - \frac{c}{a}\,\omega(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{a\,dt}{\omega(t)}\right]\right| \leqslant \left(\frac{|c|}{a}+1\right)\int_{0}^{t}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{a\,dt}{\omega(t)}\right]d\omega(t),$$

$$\left|\frac{dx(t)}{dt} - c\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{a\,dt}{\omega(t)}\right]\right| \leqslant \exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{2a\,dt}{\omega(t)}\right],$$

$$\left|\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{ca}{\omega(t)}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{a\,dt}{\omega(t)}\right]\right| \leqslant \frac{a+\omega(t)}{\omega(t)}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{2a\,dt}{\omega(t)}\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Основой доказательства служит хорошо известный принцип Шаудера неподвижной точки. В связи с этим доказательство разбито на три этапа: 1) введение пространства Банаха и выбор в нем определенного множества S; 2) построение оператора P, отображающего S в себя; 3) доказательство вполне непрерывности этого оператора.

Рассмотрим множество функций $x(t)$, непрерывных на промежутке $[0, t_0]$ с нормой $\|x(t)\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}|x(t)|$. В этом пространстве Банаха выберем множество S, состоящее из функций $x(t)$ таких, что

$$\left| x(t) - \frac{c}{a}\,\omega(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{a\,dt}{\omega(t)}\right]\right| \leqslant \left(\frac{|c|}{a}+1\right)\int_{0}^{t}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{a\,dt}{\omega(t)}\right]d\omega(t).$$

Здесь c — произвольно фиксированная постоянная. Совершенно очевидно, что S — ограниченное, замкнутое и выпуклое множество.

Перейдем к построению оператора P. Возьмем произвольно $x_0(t)\in S$ и подставим в уравнение (1). Получим $\omega(t)\,d^2x/dt^2 = a\,dx/dt + x_0^3(t)\,f(t, x_0(t), dx/dt, d^2x/dt^2)$, или, понизив порядок последнего заменой $dx/dt = y$,

$$\omega(t)\,dy/dt = ay + x_0^3(t)\,f(t, x_0(t), y, dy/dt). \tag{2}$$

В уравнении (2) вместо неизвестных y и dy/dt введем новые $Y(t)$ и $Z(t, Y)$ по формулам

$$y = c\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{a\,dt}{\omega(t)}\right] + \exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{(a-\alpha)\,dt}{\omega(t)}\right]Y, \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ca}{\omega(t)}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{a\,dt}{\omega(t)}\right] + \frac{1}{\omega(t)}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{(a-\alpha)\,dt}{\omega(t)}\right]Z, \tag{4}$$

где $\alpha = \mathrm{const}$, $0 < \alpha < a$. Обозначив при этом для краткости

$$c\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{a\,dt}{\omega(t)}\right] = m_1,\ \frac{ca}{\omega(t)}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{a\,dt}{\omega(t)}\right] = m_2,\ x_0^3(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{(a-\alpha)\,dt}{\omega(t)}\right] =$$

$$= m_3,\ \exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{(a-\alpha)\,dt}{\omega(t)}\right] = m_4,\ \frac{1}{\omega(t)}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{(a-\alpha)\,dt}{\omega(t)}\right] = m_5,$$

получим равенство

$$Z = aY + m_3 f(t, x_0, m_1 + m_4 Y, m_2 + m_5 Z). \tag{5}$$

Отметим, что $m_i \to 0$ при $t \to 0$, $i = \overline{1, 5}$. Равенство (5) определяет неявную функцию $Z(t, x_0, m_1, \ldots, m_5, Y)$, непрерывную в некоторой области D_1 $[0 \leqslant t \leqslant t_1$, $|x_0| \leqslant \bar{R}_0$, $|m_i| \leqslant \bar{R}_i$, $i = \overline{1, 5}$, $|Y| \leqslant \bar{R}_6]$. Запишем найденную функцию в виде $Z = aY + Z_0(t, x_0(t), Y)$, $Z_0(0, 0, 0) = 0$, и установим свойства Z_0. Так, из (5)

$$Z_0 \equiv m_3(t) f(t, x_0(t), m_1(t) + m_4(t) Y, m_2(t) + am_5(t) Y + m_5(t) Z_0).$$

Поскольку Z_0 ограничена в D_1, а f — в D, то можно считать t_0 таким, что

$$|Z_0| < \omega(t) \exp\left[\int_{t_0}^{t} \frac{(a+\alpha)\, dt}{\omega(t)}\right] \tag{6}$$

для всех $t \in (0, t_0)$, $|Y| \leqslant R_6$. Причем легко убедиться, что эта оценка справедлива при любой функции $x_0(t) \in S$. Кроме того, для двух функций $x_0(t)$, $x_1(t)$ из S можно найти постоянные $L > 0$, $L_1 > 0$ такие, что

$$Z_0(t, x_1, Y_1) - Z_0(t, x_0, Y)| \equiv \exp\left[\int_{t}^{t_0} \frac{(a-\alpha)\, dt}{\omega(t)}\right] |(x_1^3 - x_0^3) f(t, x_1, m_1(t) +$$

$$+ m_4(t) Y_1, m_2(t) + am_5(t) Y_1 + m_5(t) Z_0(t, x_1, Y_1)) + x_0^3 (f(t, x_1, m_1(t) +$$

$$+ m_4(t) Y_1, m_2(t) + am_5(t) Y_1 + m_5(t) Z_0(t, x_1, Y_1)) - f(t, x_0, m_1(t) + m_4(t) Y,$$

$$m_2(t) + am_5(t) Y + m_5(t) Z_0(t, x_0, Y))) | \leqslant \exp\left[\int_{t}^{t_0} \frac{(a-\alpha)\, dt}{\omega(t)}\right] (L_1 | x_1^2 + x_1 x_0 +$$

$$+ x_0^2 | | x_1 - x_0 | + Lx_0^3 (| x_1 - x_0 | + (m_4(t) + a\, m_5(t)) | Y_1 - Y | + m_5(t) \times$$

$$\times | Z_0(t, x_1, Y_1) - Z_0(t, x_0, Y) |)), \quad Y^2 + Y_1^2 \leqslant R_6^2,$$

или окончательно

$$|Z_0(t, x_1, Y_1) - Z_0(t, x_0, Y)| \leqslant \frac{\exp\left[\int_{t}^{t_0} \frac{(a-\alpha)\, dt}{\omega(t)}\right]}{1 - Lm_3(t)\, m_5(t)} [(L_1 | x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2 | +$$

$$+ Lx_0^3) | x_1 - x_0 | + Lx_0^3 (m_4(t) + am_5(t)) | Y_1 - Y |]. \tag{7}$$

Продифференцируем далее обе части равенства (3) и затем правую часть приравняем к правой части (4), где вместо Z подставим найденную ранее функцию. Имеем

$\omega(t)\, dY/dt = (\alpha - a) Y + Z(t, Y)$ или

$$\omega(t)\, dY/dt = \alpha Y + Z_0(t, x_0(t), Y). \tag{8}$$

Ясно, что каждое решение уравнения (8) со свойством $|Y| < \bar{R}_6$ после подстановки в (3) даст нам решение уравнения (2). Поэтому ниже детально остановимся на уравнении (8).

Рассмотрим функцию

$$u(t, Y) = Y^2 - \exp\left[2 \int_{t_0}^{t} \frac{(a+\alpha)}{\omega(t)}\, dt\right]$$

и порождаемую ею область Q $[(t, Y): 0 < t < t_0, u < 0]$. На поверхности

$u=0$ производная вдоль траекторий уравнения (8) от функции u такова

$$\frac{du}{dt}=\left[2YZ_0(t,\,x_0(t),\,Y)-2a\exp\left[2\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(a+\alpha)\,dt}{\omega(t)}\right]\right]\omega^{-1}(t).$$

Учитывая неравенство (6), можно выбрать t_0 так, что $\operatorname{sgn} du/dt=-1$. Тогда будет существовать хотя бы одно решение уравнения (8), находящееся на интервале $(0,\ t_0)$ в области Q. Этот вывод справедлив для любой функции $x_0(t)\in S$. Ниже мы покажем, что на самом деле эта область содержит только одно решение уравнения (8). Доказательство проведем от противного. Пусть $Y_0(t)$ и $Y_1(t)$ — решения уравнения (8), которые при $0<t\leqslant t_1$ $(t_1\leqslant t_0)$ лежат в области Q. Введем однопараметрическое семейство поверхностей

$$V(t,\,Y,\,\delta)=0,\ V=(Y-Y_0(t))^2-\delta^2\exp\left[2\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(a+\alpha-\nu)\,dt}{\omega(t)}\right],\ t\in(0,\,t_1],$$

$\nu=\mathrm{const}$, $a-\nu>0$, $\nu>0$, δ — параметр, и покажем, что все точки этих поверхностей при $0<t<t_1$ — точки входа [3]. Действительно, dV/dt вдоль траекторий уравнения (8) имеет вид

$$dV/dt=2\omega^{-1}(t)\Bigg[\alpha(Y-Y_0(t))^2+(Z_0(t,\,x_0(t),\,Y)-Z_0(t,\,x_0(t),\,Y_0(t)))\times$$
$$\times(Y-Y_0(t))-\delta^2(a+\alpha-\nu)\exp\left[2\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(a+\alpha-\nu)\,dt}{\omega(t)}\right]\Bigg].$$

На поверхности $V=0$, согласно (7), имеет место неравенство

$$\frac{dV}{dt}\leqslant2\delta^2\omega^{-1}(t)\exp\left[2\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(a+\alpha-\nu)\,dt}{\omega(t)}\right]\left(\nu-a+\frac{Lm_3(t)\,(m_4(t)+am_5(t))}{1-Lm_3(t)\,m_5(t)}\right).$$

Отсюда следует, что при достаточно малом t_0 не зависимо от δ справедливо соотношение $\operatorname{sgn} dV/dt=-1$. Другими словами, поверхности $V(t,\,Y,\,\delta)=0$ состоят при $0<t<t_1$ только из точек входа. Зафиксируем δ_0 так, чтобы точка $(t_1,\,Y_1(t_1))$ находилась вне области $V(t,\,Y,\,\delta_0)\leqslant0$.

Очевидно при убывании t решение $Y_1(t)$ войдет в эту область и останется там. Но тогда поверхность $V(t,\,Y,\,\delta_0)=0$ имеет точку выхода, а это, как доказано выше, невозможно. Полученное противоречие говорит о том, что в области Q существует только одно решение $Y_0(t)$ уравнения (8). Подставив его в (3), получим

$$y_0(t)=c\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{adt}{\omega(t)}\right]+\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(a-\alpha)\,dt}{\omega(t)}\right]Y_0(t).$$

Функцию $y_0(t)$ доопределим до непрерывной в точке $t=0$ и везде далее будем считать таковой. Зададим оператор $P:x_0(t)\to\int\limits_0^t y_0(t)\,dt$. Он переводит множество S в себя. В самом деле,

$$\left|\int\limits_0^t y_0(t)\,dt-\frac{c}{a}\,\omega(t)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{adt}{\omega(t)}\right]\right|=\Bigg|-\frac{c}{a}\int\limits_0^t\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{adt}{\omega(t)}\right]\times$$
$$\times d\omega(t)+\int\limits_0^t\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(a-\alpha)\,dt}{\omega(t)}\right]Y_0(t)\,dt\Bigg|,$$

и, учитывая неравенство $|Y_0(t)| \leqslant \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} \frac{(a+\alpha)\,dt}{\omega(t)}\right]$, нетрудно видеть, что

$$\left|\int\limits_0^t y_0(t)\,dt - \frac{c}{a}\,\omega(t)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{adt}{\omega(t)}\right]\right| \leqslant \left(\frac{|c|}{a}+1\right)\int\limits_0^t \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{adt}{\omega(t)}\right] d\omega(t).$$

Остается доказать вполне непрерывность P. Прежде всего покажем, что оператор P каждое подмножество из S переводит в компактное множество. Действительно, если взять какое-либо подмножество из S, то его образ будет множеством функций равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных. Последнее следует из того, что производные полученных функций ограничены по модулю сверху одним и тем же числом. Следовательно, из любой бесконечной последовательности таких функций можно выбрать сходящуюся, т.е. искомое множество компактно. Возьмем последовательность функций $\{x_n(t)\}$ из S такую, что $\|x_0(t) - x_n(t)\| = \varepsilon_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. Функции $x_n(t)$ соответствует решение $Y_n(t)$ уравнения

$$\omega(t)\,dY/dt = \alpha Y + Z_0(t, x_n(t), Y), \tag{9}$$

лежащее в области Q. Покажем, что $Y_n(t)$ по норме мало отличается от $Y_0(t)$. Для этого рассмотрим область $Q \cap Q_1$, где

$$Q_1\left[(t, Y): 0 < t < t_0,\ u_1 < 0,\ u_1(t, Y) = (Y - Y_0(t))^2 - \varepsilon_n^2 \exp\left[2\int\limits_{t_0}^{t}\frac{adt}{\omega(t)}\right]\right].$$

На поверхности $u_1 = 0$ для производной вдоль траекторий уравнения (9) от функции u_1 справедлива оценка

$$dU_1/dt = \frac{2}{\omega(t)}\Bigg(\alpha(Y - Y_0(t))^2 + (Y - Y_0(t))\,(Z_0(t, x_n(t), Y) -$$

$$- Z_0(t, x_0(t), Y_0(t))) - \varepsilon_n^2 a \exp\left[2\int\limits_{t_0}^{t}\frac{adt}{\omega(t)}\right]\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon_n^2}{\omega(t)}\Bigg(\left(\alpha - a + \frac{Lm_3(t)\,(m_4(t) + am_5(t))}{1 - Lm_3(t)\,m_5(t)}\right)\exp\left[2\int\limits_{t_0}^{t}\frac{adt}{\omega(t)}\right] +$$

$$+ \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\alpha dt}{\omega(t)}\right]\frac{L_1|x_0^2(t) + x_n(t)\,x_0(t) + x_n^2(t)| + Lx_0^3(t)}{1 - Lm_3(t)\,m_5(t)}\Bigg).$$

Теперь вполне очевидно, что при достаточно малом t_0 не зависимо от ε_n имеет место равенство $\operatorname{sgn}(dU_1/dt) = -1$. Стало быть, в области $Q \cap Q_1$ находится хотя бы одно решение уравнения (9). Несомненно, что там находится $Y_n(t)$. Итак,

$$|Y_n(t) - Y_0(t)| \leqslant \varepsilon_n \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{adt}{\omega(t)}\right].$$

А тогда можно установить следующую оценку

$$\left|\int\limits_0^t y_n(t)\,dt - \int\limits_0^t y_0(t)\,dt\right| < \varepsilon_n t.$$

Значит, если $x_n(t) \to x_0(t)$, то $Px_n(t) \to Px_0(t)$, $n \to \infty$. Непрерывность P

доказана. Согласно принципу Шаудера P имеет неподвижную точку, которая представляет собой решение уравнения (1). Оценка этого решения вытекает из свойств множества S оценки функции Z и (3), (4). Теорема доказана.

1. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных.— Изв. вузов. Математика, 1971, № 9, с. 79—84.
2. *Фильчаков П. Ф.* О построении интегралов дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1969, № 7, с. 606—611.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 720 с.

Одесский
инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
15.10.82