УДК 517.51 + 519.21

М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков (Ін-т математики НАН України, Київ)

САМОАФІННІ СИНГУЛЯРНІ ТА НІДЕ НЕ МОНОТОННІ ФУНКЦІЇ, ПОВ'ЯЗАНІ З Q-ЗОБРАЖЕННЯМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

We study functional, differential, integral, self-affine, and fractal properties of continuous functions belonging to a finite-parameter family of functions with a continuum set of "peculiarities". Almost all functions of this family are singular (their derivative is equal to zero almost everywhere in the sense of Lebesgue) or nowhere monotone, in particular, nondifferentiable. We consider different approaches to the definition of these functions (using a system of functional equations, projectors of symbols of different representations, distribution of random variables, etc.).

Исследуются функциональные, дифференциальные, интегральные, самоаффинные и фрактальные свойства непрерывных функций, принадлежащих конечнопараметрическому семейству функций, каждая из которых имеет континуальное множество „особенностей". Почти все функции данного семейства являются сингулярными (имеют производную, равную нулю почти всюду в смысле меры Лебега) или нигде не монотонными, в частности недифференцируемыми. Рассматриваются разные подходы к определению таких функций (системой функциональных уравнений, проекторов символов различных представлений, распределением случайных величин и др.).

1. Вступ. Локальна поведінка неперервних на відрізку функцій може бути як тривіально простою, так і достатньо складною. Навіть серед строго монотонних функцій існують функції з надзвичайно неоднорідними локальними властивостями. До таких відносяться і сингулярні функції розподілу (неперервні функції, похідна яких дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега), інтерес до яких в останні десятиріччя постійно зростає. Ще складнішою є поведінка звивистих (ніде не монотонних) функцій [17]. Ці два класи функцій ми відносимо до сім'ї функцій зі складною локальною будовою (функцій, які мають „особливості" в кожному як завгодно малому інтервалі області визначення). Сингулярні функції часто виникають у дослідженнях з теорії ймовірностей при вивченні розподілів випадкових величин типу Джессена – Вінтнера та їх аналогів [5], зокрема нескінченних згорток Бернуллі. Зазначимо, що вони є домінуючими в класах функцій розподілу випадкових величин, символи (цифри) яких в тій чи іншій системі зображення (наприклад, ланцюговим дробом [15], рядами Остроградського 1- і 2-го видів [16], рядами Люрота, рядами Енгеля та ін.) є незалежними випадковими величинами. Теореми Банаха – Мазуркевича [5] та Замфіреску [12] свідчать про те, що сім'ї таких функцій „немалі", а точніше, є множинами другої категорії Бера у просторі неперервних на відрізку функцій з рівномірною метрикою та у просторі функцій розподілу з супремум-метрикою. Більше того, тісний зв'язок теорії таких функцій з теорією фракталів, яка в останній час бурхливо розвивається, підсилює вказаний інтерес.

Зауважимо, що для вказаної категорії функцій існує спільна проблема — проблема наявності ефективного „апарату" їх задання та дослідження. В останній час з цією метою широко використовуються різні системи зображення дійсних чисел (системи числення) та теорія рядів.

У даній роботі досліджується скінченнопараметрична сім'я неперервних функцій, кожна з яких є сингулярною або звивистою. Для їх задання ми використовуємо систему функціональних рівнянь і узагальнення s-кового запису дійсного числа, так зване *Q-зображення*, геометрія і метрична теорія якого є добре вивченими [5]. Нас цікавлять диференціальні і інтегральні, самоафінні і фрактальні властивості досліджуваних функцій.

2. *Q*-зображення дійсного числа. Введемо позначення, які будемо використовувати при подальшому викладі. Нехай $1 < s$ — фіксоване натуральне число, $A = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення, $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{s-1}\}$, $q_i > 0$, $q_0 + q_1 + \ldots + q_{s-1} = 1$, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_k = \sum_{j=0}^{k-1} q_j$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

Теорема 1 [1]. *Для довільного дійсного числа* $x \in [0, 1]$ *існує нескінченна послідовність* (α_n), $\alpha_n \in A$, $n \in N$, *така, що*

$$x = \gamma_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\gamma_{\alpha_k} \prod_{j=0}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] \equiv \Delta^Q_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}. \tag{1}$$

Подання числа x у вигляді ряду (1) називається *Q-зображенням* x, а його формальний скорочений запис $\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ — *Q-зображенням*. При цьому $\alpha_k = \alpha_k(x)$ називається k-м *Q-символом* (*Q-цифрою*) числа x.

Зліченна множина чисел має два Q-зображення. Це числа вигляду

$$\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0\ldots 0\ldots} \equiv \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)} = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}(\alpha_k - 1)((s-1))} \equiv \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}(\alpha_k-1)(s-1)\ldots(s-1)\ldots}.$$

Такі числа називаються *Q-раціональними*, а решта чисел — *Q-ірраціональними*. Для кожного Q-ірраціонального числа x k-й Q-символ $\alpha_k(x)$ є коректно визначеною функцією від x, а для Q-раціонального числа — після домовленості використовувати лише одне з двох зображень, наприклад перше. У випадку необхідності ми на цьому будемо акцентувати увагу окремо.

***Зауваження* 1.** Якщо $q_0 = q_1 = \ldots = q_{s-1} = \dfrac{1}{s}$, то Q-зображення є s-ковим розкладом числа. Тому Q-зображення є узагальненням s-кового зображення числа. Зазначимо, що Q-символи числа є індексами в його Q-зображенні, а не коефіцієнтами, як в s-ковому розкладі.

При вивченні геометрії Q-зображення і побудові відповідної метричної теорії, яка займається розв'язанням задач про міру множин чисел з умовами на їх зображення, продуктивним є поняття циліндра.

Означення 1. *Циліндром рангу* m *з основою* $c_1c_2\ldots c_m$, $c_i \in A$, *називається множина* $\Delta^Q_{c_1\ldots c_m}$, *що складається з усіх чисел відрізка* $[0, 1]$, *які мають Q-зображення, у якого перші* m *Q-символів збігаються з* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *відповідно, тобто*

$$\Delta^Q_{c_1\ldots c_m} = \left\{ x \colon \alpha_j(x) = c_i, i = \overline{1, m} \right\}.$$

Циліндри мають наступні властивості:

1) циліндр є відрізком, а саме, $\Delta^Q_{c_1\ldots c_m} = \left[\Delta^Q_{c_1\ldots c_m(0)}, \Delta^Q_{c_1\ldots c_m((s-1))} \right]$;

2) $\Delta^Q_{c_1\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} \Delta^Q_{c_1\ldots c_m i}$, $\sup \Delta^Q_{c_1\ldots c_m i} = \inf \Delta^Q_{c_1\ldots c_m (i+1)}$;

3) $\left| \Delta^Q_{c_1\ldots c_m} \right| = \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}$;

4) $\left| \Delta^Q_{c_1\ldots c_m i} \right| = q_i \left| \Delta^Q_{c_1\ldots c_m} \right|$;

5) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^Q_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta^Q_{c_1\ldots c_m\ldots} = x \in [0, 1]$;

6) циліндри є метрично незалежними множинами;

7) класу циліндрів, що відповідають Q-зображенню, достатньо для еквівалентного означення фрактальної розмірності Хаусдорфа – Безиковича.
Останню рівність ми називаємо *основним метричним відношенням*.

3. Основний об'єкт дослідження. Нехай $p_0, p_1, \ldots, p_{s-1}$ — дійсні числа такі, що $p_0+p_1+\ldots \ldots + p_{s-1} = 1$; $\beta_0 \equiv 0$, $\beta_k \equiv \sum_{i=0}^{k-1} p_i > 0$, $p_* \equiv \max_i |p_i| < 1$. Розглядається система s функціональних рівнянь

$$f\left(\Delta^Q_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \beta_i + p_i f\left(\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right), \quad i = \overline{0, s-1}. \tag{2}$$

Зауважимо, що система (2) для s-кового зображення має вигляд $f\left(\dfrac{i+x}{s}\right) = \beta_i + p_i f(x)$.

Знайдемо всі функції, які визначені на $[0,1]$, обмежені і задовольняють систему (2).

Теорема 2. *Існує лише одна функція f, яка визначена в кожній точці $[0,1]$, обмежена і задовольняє систему* (2), *причому її значення обчислюється за формулою*

$$f(x) = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j}\right), \quad \text{де} \quad x = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \tag{3}$$

Доведення. Використовуючи рівності (2) m разів, отримуємо розклад

$$f(x) = f\left(\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \beta_{\alpha_1} + p_{\alpha_1} f\left(\Delta^Q_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}\right) =$$

$$= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}p_{\alpha_1} + p_{\alpha_1}p_{\alpha_2} f\left(\Delta^Q_{\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \ldots$$

$$\ldots = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}p_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_m}\prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j} + \left(\prod_{j=1}^{m} p_{\alpha_j}\right) f\left(\Delta^Q_{\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{m+k}\ldots}\right).$$

Цей процес можна продовжувати до нескінченності, оскільки функція f визначена в усіх точках $[0,1]$, а отже, має зміст вираз $f\left(\Delta^Q_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+k}\ldots}\right)$. Оскільки

$$\left|\prod_{j=1}^{m} p_{\alpha_j}\right| \leqslant p_*^m \to 0 \quad (m \to \infty), \qquad \left|f\left(\Delta^Q_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+k}\ldots}\right)\right| \leqslant C = \text{const},$$

то залишковий член

$$\left(\prod_{j=1}^{m} p_{\alpha_j}\right) f\left(\Delta^Q_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+k}\ldots}\right)$$

прямує до нуля при $m \to \infty$. Тому послідовність

$$B_m = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}p_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_m}\prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j}$$

має границю, що є значенням функції f у точці x. Отже, має місце розклад (3).

Теорему 2 доведено.

Доведемо *коректність* означення функції f рівністю (3), тобто покажемо, що її значення від двох різних Q-зображень одного і того ж Q-раціонального числа

$$x = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)} = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n-1)((s-1))}$$

збігаються. З цією метою розглянемо різницю

$$\delta = f\left(\Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)}\right) - f\left(\Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n-1)((s-1))}\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n-1} p_{\alpha_j}\right)\left(\beta_{\alpha_n} - \beta_{\alpha_n-1} - \beta_{s-1}p_{\alpha_n-1}\left(1 + p_{s-1} + p_{s-1}^2 + \ldots + p_{s-1}^k + \ldots\right)\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n-1} p_{\alpha_j}\right)\left(\beta_{\alpha_n} - \left(\beta_{\alpha_n-1} + p_{\alpha_n-1}\right)\right) = 0.$$

Отже, відповідні значення збігаються і функція означена коректно.

***Зауваження* 2.** Зрозуміло, що система (2) задає систему ітерованих функцій, для якої атрактором буде деяка компактна множина в $\mathbb{R}^2$. Але висновок про те, що цією множиною буде графік неперервної функції на $[0,1]$, взагалі кажучи, є нетривіальним.

Лема 1. *Функція f, визначена рівністю* (3), *є неперервною в усіх точках відрізка* $[0,1]$.

Доведення. Розглянемо довільне $x_0 \in [0,1]$ і різницю

$$f(x) - f(x_0) = \left(\prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j}\right)\left(f\left(\Delta^Q_{\alpha_m(x)\alpha_{m+1}(x)\ldots\alpha_{m+k}(x)\ldots}\right) - f\left(\Delta^Q_{\alpha_m(x_0)\ldots\alpha_{m+k}(x_0)\ldots}\right)\right),$$

де $\alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0)$, але $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ при $i < m$.

1. Якщо x_0 — Q-ірраціональне число, то умова $x \to x_0$ рівносильна $m \to \infty$ і

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \leqslant C\prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j} \ \to\ 0 \ (m \ \to\ \infty),$$

тобто $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, і функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0 за означенням.

2. Якщо x_0 — Q-раціональне число, тобто $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)} = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n-1)((s-1))}$, то можна скористатись міркуваннями з пункту 1, але при розгляді випадку, коли x прямує до x_0 зліва, досить використати друге зображення числа x_0, а коли x прямує до x_0 справа — перше.

Лему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Система функціональних рівнянь* (2) *у класі неперервних на* $[0,1]$ *функцій має єдиний розв'язок — функцію, означену рівністю* (3).

4. Умови монотонності та звивистості функції. Приріст функції f на відрізку $\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m}$ позначатимемо через $\mu_f\left(\Delta^Q_{c_1\ldots c_m}\right)$, тобто

$$\mu_f\left(\Delta^Q_{c_1\ldots c_m}\right) \equiv f\left(\Delta^Q_{c_1\ldots c_m((s-1))}\right) - f\left(\Delta^Q_{c_1\ldots c_m(0)}\right).$$

Лема 2. *Має місце рівність* $\mu_f\left(\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \prod_{i=1}^m p_{c_i}$.

Справді, використовуючи вираз значення функції (3), маємо

$$\mu_f(\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m}) = \left(\prod_{i=1}^{m} p_{c_i}\right)\left(\beta_{s-1} - \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{s-1} p^k_{s-1}\right) = \prod_{i=1}^{m} p_{c_i}.$$

Наслідок 2. *Функція f є сталою на циліндрі $\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m}$ тоді і тільки тоді, коли існує $p_{c_k} = 0$, де $k \leqslant m$.*

Лема 3. *Якщо $\prod_{i=0}^{s-1} p_i \neq 0$ і серед чисел $p_0, p_1, \ldots, p_{s-1}$ знайдеться $p_i < 0$, то функція f не має жодного проміжку монотонності (є звивистою).*

Доведення. Припустимо, що при виконанні умов леми знайдеться інтервал $(a, b) \subset [0, 1]$ монотонності функції f. Але очевидно, що існує циліндр $\Delta^Q_{c_1\ldots c_m}$, який повністю належить (a, b), а отже, є проміжком монотонності f.

Оскільки $p_0 p_1 \ldots p_{s-1} \neq 0$, то згідно з лемою 2

$$\mu_f(\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m}) = \prod_{i=1}^{m} p_{c_i} \neq 0$$

і $\mu_f\big(\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m 0}\big) \cdot \mu_f\big(\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m i}\big) < 0$, тобто на одному з циліндрів $\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m 0}$, $\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m i}$ функція має додатний, а на іншому — від'ємний приріст. А це суперечить монотонності функції f на циліндрі $\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m}$, що і доводить лему.

5. Самоафінні властивості. Нагадаємо, що перетворення простору $\mathbb{R}^2$ (бієктивне відображення множини $\mathbb{R}^2$ на себе) називається *афінним*, якщо воно зберігає колінеарність точок, тобто кожні три точки, які лежать на одній прямій (є колінеарними), переводить в три точки, що теж лежать на одній прямій. Афінні перетворення $\mathbb{R}^2$ утворюють групу відносно операції „композиція" (суперпозиція) перетворень, головним інваріантом якої є збереження простого відношення трьох точок.

Означення 2. *Множина E простору $\mathbb{R}^2$ називається самоафінною, якщо існує набір φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $n > 1$, афінних перетворень $\mathbb{R}^2$ таких, що*

$$E = \varphi_1(E) \cup \varphi_2(E) \cup \ldots \cup \varphi_n(E), \qquad \text{де} \quad \varphi_i(E) \neq \varphi_j(E) \qquad \text{при} \quad i \neq j. \tag{4}$$

Як відомо, кожне афінне перетворення φ_i аналітично задається формулами

$$\begin{aligned} x' &= a^{(i)}_{11} x + a^{(i)}_{12} y + x^{(i)}_0, \\ y' &= a^{(i)}_{21} x + a^{(i)}_{22} y + y^{(i)}_0, \end{aligned} \tag{5}$$

причому $a^{(i)}_{11} a^{(i)}_{22} - a^{(i)}_{12} a^{(i)}_{21} \neq 0$.

Означення 3. *Самоафінною розмірністю самоафінної множини* (4), (5) *називається число, яке є розв'язком рівняння*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left| \begin{vmatrix} a^{(i)}_{11} & a^{(i)}_{12} \\ a^{(i)}_{21} & a^{(i)}_{22} \end{vmatrix} \right| \right)^{x/2} = 1.$$

Легко бачити, що самоафінність множини є узагальненням самоподібності [1, 5]. Можна довести, що самоафінна розмірність є числом, не меншим за розмірність Хаусдорфа–Безиковича [5], а при деяких умовах збігається з нею. Якщо самоафінна множина є самоподібною, то її самоафінна розмірність збігається з самоподібною розмірністю.

Теорема 3. *Якщо* $\prod_{i=0}^{s-1} p_i \neq 0$, *то графік* Γ *функції є самоафінною множиною простору* $\mathbb{R}^2$, *причому*

$$\Gamma = \varphi_0(\Gamma) \cup \varphi_1(\Gamma) \cup \ldots \cup \varphi_{s-1}(\Gamma), \tag{6}$$

де

$$\varphi_i \colon \begin{cases} x' = q_i x + \gamma_i, \\ y' = p_i y + \beta_i, \end{cases}$$

$$\varphi_i(\Gamma) \cap \varphi_{i+1}(\Gamma) = C_{i+1}\left(\frac{i+1}{s}; \beta_{i+1}\right). \tag{7}$$

Самоафінна розмірність графіка Γ *є розв'язком рівняння*

$$\sum_{i=0}^{s-1} |q_i p_i|^{x/2} = 1.$$

Доведення. Для доведення рівності (6) спочатку покажемо, що

$$\varphi_0(\Gamma) \cup \varphi_1(\Gamma) \cup \ldots \cup \varphi_{s-1}(\Gamma) \equiv G \subset \Gamma.$$

Нехай $M \in G$, а отже, існує i таке, що $M \in \varphi_i(\Gamma)$, тобто $x_M = x' = q_i x + \gamma_i$, $y_M = y' = p_i y + \beta_i$. Тоді $f(x') = f\left(\Delta^Q_{i\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \beta_i + p_i f\left(\Delta^Q_{\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = y'$, тобто $M \in \Gamma$.

Тепер покажемо, що $\Gamma \subset G$. Нехай $M\big(x; f(x)\big) \in \Gamma$. Розглянемо число $x_1 = \Delta^Q_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)\ldots}$. Оскільки $\alpha_1(x) \in A$, то $f(x) = p_i f(x_1) + \beta_i$ і з того, що $\overline{M}\big(x_1; f(x_1)\big) \in \Gamma$, випливає $\varphi_i(\overline{M}) = M\big(x; f(x)\big) \in G$. Рівність (6) доведено.

Оскільки

$$O(0;0) \xrightarrow{\varphi_i} C_i(\gamma_i; \beta_i), \qquad C(1;1) \xrightarrow{\varphi_i} C_{i+1}(\gamma_{i+1}; \beta_{i+1}), \quad i \in A,$$

то має місце рівність (7).

Самоафінна розмірність графіка Γ є розв'язком вказаного рівняння згідно з означенням самоафінної розмірності самоафінної множини.

Теорему 3 доведено.

6. Інтегральні властивості.

Теорема 4. *Для інтеграла Лебега має місце рівність*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\sum_{i=0}^{s-1} \beta_i q_i}{1 - \sum_{i=0}^{s-1} p_i q_i}. \tag{8}$$

Доведення. Використовуючи адитивну властивість інтеграла Лебега, маємо

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^{s-1} \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{s-1} \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f\left(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}\right) dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \left[\beta_i + p_i f\left(\Delta^Q_{\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}\right)\right] dx = \sum_{i=0}^{s-1} \beta_i q_i + \sum_{i=0}^{s-1} p_i \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f\left(\Delta^Q_{\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}\right) dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} \beta_i q_i + \sum_{i=0}^{s-1} p_i \int_0^1 f(t)\, d(\gamma_i + q_i t) = \sum_{i=0}^{s-1} \beta_i q_i + \sum_{i=0}^{s-1} p_i q_i \int_0^1 f(t)\, dt,$$

де $t = \Delta^Q_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)\ldots}$. Звідси

$$\left(1 - \sum_{i=0}^{s-1} p_i q_i\right) \int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{s-1} \beta_i q_i,$$

а отже, має місце рівність (8).

Теорему 4 доведено.

7. Сингулярні функції.

Лема 4. *Якщо $p_i = q_i$ для всіх $i \in A$, то $f(x) = x$.*

Доведення. Справді, якщо $x = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, то, використовуючи рівності (2), маємо

$$f(x) = f\left(\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \gamma_{\alpha_1} + q_{\alpha_1}\left(\Delta^Q_{\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) =$$

$$= \gamma_{\alpha_1} + q_{\alpha_1}\left(\gamma_{\alpha_2} + q_{\alpha_2} f(\Delta^Q_{\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots})\right) = \ldots$$

$$\ldots = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \ldots + \gamma_{\alpha_n} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} \ldots q_{\alpha_{n-1}} + \ldots = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = x.$$

Лема 5. *Якщо $p_i \geqslant 0$, $i = \overline{0, s-1}$, то f є неперервною функцією розподілу ймовірностей на відрізку $[0,1]$.*

Доведення. Оскільки $f(0) = f\left(\Delta^Q_{(0)}\right) = 0 + p_0 f\left(\Delta^Q_{(0)}\right)$, то $(1 - p_0) f(\Delta^Q_{(0)}) = 0$, а отже, $f(0) = 0$. З огляду на те, що $f(1) = f\left(\Delta^Q_{(s-1)}\right) = \beta_{s-1} + p_{s-1} f\left(\Delta^Q_{(s-1)}\right)$, отримуємо $(1 - p_{s-1}) f\left(\Delta^Q_{(s-1)}\right) = \beta_{s-1} = p_0 + \ldots + p_{s-2} = 1 - p_{s-1}$, а отже, $f(1) = 1$.

Нехай $x_1 < x_2$. Тоді існує m таке, що $\alpha_i(x_1) = \alpha_i(x_2)$ при $i < m$ і $\alpha_m(x_1) < \alpha_m(x_2)$. Тому

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j}(x_1)\right) \times$$

$$\times \left(\beta_{\alpha_m(x_2)} - \beta_{\alpha_m(x_1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_{m+k}(x_2)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{\alpha_{m+j}(x_2)}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_{m+k}(x_1)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{\alpha_{m+j}(x_1)}\right)\right).$$

Але

$$\beta_{\alpha_m(x_2)} - \beta_{\alpha_m(x_1)} = p_{\alpha_m(x_1)} + p_{\alpha_m(x_1)+1} + \ldots + p_{\alpha_m(x_2)-1} \geqslant p_{\alpha_m(x_1)},$$

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_{m+k}(x_2)}\prod_{j=0}^{k-1}p_{\alpha_{m+j}(x_2)}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_{m+k}(x_1)}\prod_{j=0}^{k-1}p_{\alpha_{m+j}(x_1)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_{m+k}(x_1)}\prod_{j=0}^{k-1}p_{\alpha_{m+j}(x_1)}\right) \geqslant -p_{\alpha_m(x_1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\beta_{s-1}p_{s-1}^k\right] = -p_{\alpha_m(x_1)}.$$

Тому $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$ і функція f є неспадною. Таким чином, будучи неперервною згідно з лемою 1 і маючи доведені властивості, вона є неперервною функцією розподілу ймовірностей на $[0, 1]$.

Лему 5 доведено.

Теорема 5. *Функція f є функцією розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими Q-символами, а саме*:

$$\xi = \Delta^Q_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}, \qquad \textit{де} \quad \eta_k \quad \textit{— незалежні і} \quad \mathrm{P}\{\eta_k = i\} = p_i, \quad i = \overline{0, s-1}.$$

Доведення. Згідно з означенням функції розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ маємо $F_\xi(x) = \mathrm{P}\{\xi < x\}$. Оскільки

$$\{\xi < x\} = \big\{\eta_1 < \alpha_1(x)\big\} \cup \big\{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 < \alpha_2(x)\big\} \cup \ldots$$

$$\ldots \cup \big\{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 = \alpha_2(x), \ldots, \eta_{k-1} = \alpha_{k-1}(x), \eta_k < \alpha_k(x)\big\} \cup \ldots,$$

причому події, що входять до об'єднання, несумісні і η_k є незалежними,

$$\mathrm{P}\big\{\eta_1 = \alpha_1(x),\ \eta_2 = \alpha_2(x), \ldots, \eta_{k-1} = \alpha_{k-1}(x),\ \eta_k < \alpha_k(x)\big\} = \beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1}p_{\alpha_j(x)},$$

то має місце рівність (3). Отже, $f(x) = F_\xi(x)$.

Теорему 5 доведено.

Нагадаємо, що *спектром* монотонно неспадної функції називається множина всіх її точок зростання. Відомо [5], що спектр є замкненою множиною, а для неперервної функції — досконалою.

Лема 6 [5]. *Якщо $p_i \geqslant 0$, то спектром функції F_ξ (функції розподілу випадкової величини ξ) є множина $S_F = \big\{x\colon x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}, p_{\alpha_j} > 0\ \forall j \in N\big\}$, яка збігається з $[0, 1]$ при $p_i > 0$ для кожного $i \in A$, а якщо існує $p_i = 0$, є ніде не щільною самоподібною множиною з самоподібною розмірністю, яка є розв'язком рівняння $\sum_{i:p_i\neq 0} q_i^x = 1$.*

Лема 7. *Якщо в Q-ірраціональній точці x_0 існує скінченна або нескінченна похідна $f'(x_0)$, то вона має вигляд*

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n}p_{\alpha_j(x_0)}}{\prod_{j=1}^{n}q_{\alpha_j(x_0)}} = \prod_{j=1}^{\infty}q^{-1}_{\alpha_j(x_0)}p_{\alpha_j(x_0)}. \tag{9}$$

Доведення. Оскільки $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, то

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_f\left(\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)}{\left|\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n} p_{\alpha_j(x_0)}}{\prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j(x_0)}} = \prod_{j=1}^{\infty} q^{-1}_{\alpha_j(x_0)} p_{\alpha_j(x_0)}.$$

***Наслідок* 3.** *Якщо існує $p_m = 0$, то функція f є сингулярною.*

***Зауваження* 3.** Якщо існують $p_m = 0$ і $p_i < 0$, то функція f не є монотонною на $[0,1]$, але є сингулярною.

***Наслідок* 4.** *Якщо $q_i^{-1}|p_i| > 1$ для довільного $i = \overline{0, s-1}$, то функція f не має скінченної похідної в жодній Q-ірраціональній точці відрізка* $[0,1]$.

Наприклад, умови даного твердження виконуються, якщо $p_0 = p_1 = \ldots = p_{s-3} = p_{s-1} = \dfrac{2}{s}$, $p_{s-2} = \dfrac{2-s}{s}$, зокрема при $s = 3$ маємо $p_0 = p_2 = \dfrac{2}{3}$, $p_1 = -\dfrac{1}{3}$.

Теорема 6. *Якщо всі $p_i \geqslant 0$ і існує $p_k \neq q_k$, то функція $f(x) = F_\xi(x)$ є сингулярною, причому строго зростаючою, якщо $p_i > 0$, $i = \overline{0, s-1}$, і канторівського типу, якщо існує $p_m = 0$.*

***Наслідок* 5.** *Якщо $s = 2$, то f є сингулярною строго зростаючою функцією.*

Для $q_i = \dfrac{1}{s}$, $p_i > 0$, $i = \overline{0, s-1}$, сингулярність функції f уперше довів Салем [2], використавши метод нормальних чисел, дещо пізніше для $s = 2$ це зроблено в роботі [10]. Ця функція також фігурувала в роботі [6].

Якщо всі $p_i \geqslant 0$, причому існує $p_m = 0$, то спектром функції f буде множина канторівського типу чисел, в Q-зображеннях яких не використовується цифра m. Вона, як відомо, має нульову міру Лебега. На суміжних з цією множиною інтервалах функція є сталою, тому має похідну, що дорівнює нулю. З огляду на це сингулярність функції в даному випадку є очевидною.

8. Функція F_ξ як неперервне перетворення відрізка $[0,1]$. Кажуть [14], що *перетворення g відрізка* $[0,1]$ *зберігає розмірність* Хаусдорфа – Безиковича [5], якщо для довільної борелівської множини $E \subset [0,1]$ і її образу $E' = g(E)$ розмірності Хаусдорфа – Безиковича збігаються, тобто $\alpha_0(E) = \alpha_0(E')$. Якщо знайдеться борелівська множина $E \subset [0,1]$ така, що $\alpha_0(E) \neq \alpha_0(E')$, то кажуть, що перетворення g не зберігає розмірності Хаусдорфа – Безиковича [14]. Очевидно, що множина всіх перетворень відрізка $[0,1]$, які зберігають розмірність Хаусдорфа – Безиковича, відносно операції „композиції" (суперпозиції) утворює групу, нейтральним елементом якої є тотожне перетворення, а симетричним для кожного елемента — обернене перетворення.

Легко бачити, що клас неперервних перетворень відрізка $[0,1]$ вичерпується строго зростаючими функціями розподілу ймовірностей на $[0,1]$ та функціями вигляду $q(x) = 1 - F(x)$, де F — функція розподілу. З попереднього випливає, що функція (3) є строго зростаючою функцією розподілу тоді і тільки тоді, коли всі $p_i > 0$.

Теорема 7. *Для того щоб строго монотонна функція $f = F_\xi$, тобто $p_i > 0$, $i = \overline{0, s-1}$, зберігала розмірність Хаусдорфа – Безиковича, необхідно і достатньо, щоб $p_i = q_i$ при всіх $i \in A$.*

Доведення. *Достатність* є очевидною на підставі леми 4. Доведемо *необхідність*.

Скористаємося методом від супротивного. Припустимо, що функція f зберігає розмірність Хаусдорфа – Безиковича і при цьому існує $p_i \neq q_i$. Нехай, $\alpha_j(x)$ — j-й Q-символ числа x, $N_i\,(x,n) = \#\{j\colon \alpha_j(x) = i, j \leqslant n\}$, $i \in A$.

Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_i\,(x,n)}{n} \equiv \nu_i(x),$$

то вона називається *частотою цифри* i у Q-зображенні числа x.

Розглянемо множину

$$E \equiv E\big[p_0, p_1, \ldots, p_{s-1}\big] = \big\{x\colon \nu_0(x) = p_0,\ \nu_i(x) = p_i,\ i = \overline{0, s-1}\big\}.$$

Як відомо [5], розмірність Хаусдорфа – Безиковича множини E дорівнює

$$\alpha_0\,(E) = \frac{\ln\big(p_0^{p_0} p_1^{p_1} \ldots p_{s-1}^{p_{s-1}}\big)}{\ln\big(q_0^{p_0} q_1^{p_1} \ldots q_{s-1}^{p_{s-1}}\big)}$$

і є меншою за 1 при $q_i \neq p_i$.

Образом множини E при перетворенні F_ξ є множина $E'\big[p_0, p_1, \ldots, p_{s-1}\big]$ чисел $[0,1]$, Q'-зображення $\big($при цьому $Q' = \{p_0, p_1, \ldots, p_{s-1}\}\big)$ яких мають частоти Q'-символів $p_0, p_1, \ldots, p_{s-1}$ відповідно. Тоді

$$\alpha_0\,(E') = \frac{\ln\big(p_0^{p_0} p_1^{p_1} \ldots p_{s-1}^{p_{s-1}}\big)}{\ln\big(p_0^{p_0} p_1^{p_1} \ldots p_{s-1}^{p_{s-1}}\big)} = 1.$$

Отже, $\alpha_0\,(E) \neq \alpha_0\,(E')$, що суперечить умові і доводить твердження.

9. Диференціальні властивості звивистих функцій. Розглянемо випадок, коли серед чисел $p_0,\ p_1, \ldots,\ p_{s-1}$ є від'ємні, але $p_0 p_1 \ldots p_{s-1} \neq 0$. У цьому випадку $s > 2$.

Дослідимо детально випадок $s = 3$.

Теорема 8. *Якщо* $s = 3$ *і* $p_1 < 0$, $p_2 > 0$, *то функція* $f(x)$ *не має ні скінченної, ні нескінченної похідної в жодній* Q*-раціональній точці відрізка* $[0,1]$.

Доведення. Нехай x_0 є Q-раціональною точкою, тобто $x_0 = \Delta^Q_{a_1 \ldots a_n (0)} = \Delta^Q_{a_1 \ldots a_{n-1}(a_n - 1) 22 \ldots 2 \ldots}$, де $a_n \neq 0$. Розглянемо дві послідовності

$$x_k' = \Delta^Q_{a_1 \ldots a_{n-1} a_n \underbrace{0 \ldots 01}_{k}(0)}, \qquad x_k'' = \Delta^Q_{a_1 \ldots a_{n-1}(a_n - 1)\underbrace{22 \ldots 2(0)}_{k}},$$

які, очевидно, прямують до x_0. Для них

$$A_k' = \frac{f(x_k') - f(x_0)}{x_k' - x_0} = \frac{\mu_f\Big(\Delta^Q_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{a_n - 1} \alpha_n \underbrace{00 \ldots 0}_{k}}\Big)}{\Big|\Delta^Q_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{a_n - 1} \alpha_n \underbrace{00 \ldots 0}_{k}}\Big|} = C \frac{p_{\alpha_n}}{q_{\alpha_n}} \left(\frac{p_0}{q_0}\right)^k,$$

$$A_k'' = \frac{f(x_0) - f(x_k'')}{x_0 - x_k''} = \frac{\mu_f\left(\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{a_n-1}(\alpha_n-1)\underbrace{22\ldots2}_{k}}\right)}{\left|\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{a_n-1}(\alpha_n-1)\underbrace{22\ldots2}_{k}}\right|} = C\frac{p_{\alpha_n-1}}{q_{\alpha_n-1}}\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^k,$$

де $C = \prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_{a_i}}{q_{a_i}}$ — ненульова стала, причому $\frac{p_{\alpha_n}}{q_{\alpha_n}}\frac{p_{\alpha_n-1}}{q_{\alpha_n-1}} < 0$.

Оскільки $p_0 + p_2 > 1$, а $q_0 + q_2 < 1$, то принаймні одне з відношень $\frac{p_0}{q_0}$, $\frac{p_2}{q_2}$ більше за 1. Тому принаймні одна з послідовностей $\left(A_k'\right)$, $\left(A_k''\right)$ прямує до $\pm\infty$, а якщо обидві, то до нескінченності різних знаків, оскільки $\left(A_k'\right)\left(A_k''\right) < 0$. Якщо ж $\frac{p_i}{q_i} < 1$, то $A_k^{(i)} \to 0$, $k \to \infty$. Таким чином, у жодному з випадків функція не має ні скінченної, ні нескінченної похідної.

Теорему 8 доведено.

Вивчимо питання про існування похідної функції f у раціональній точці $x_0 = \Delta^Q_{c_1\ldots c_m(d)}$, Q-зображення якої має простий період (d). Зауважимо, що кожна Q-раціональна точка належить цьому класу.

Розглянемо послідовність $\left(x_m^{(r)}\right)$ таку, що

$$x_m^{(r)} = \Delta^Q_{c_1\ldots c_m\underbrace{d\ldots dr(d)}_{k-1}}, \qquad \text{де} \quad r \neq d.$$

Очевидно, що $x_m^{(r)} \to x_0\ (k \to \infty)$. Тоді

$$x_m^{(r)} - x_0 = \left(q_d^{k-1}\prod_{i=1}^m q_{c_i}\right)\left(\gamma_r - \gamma_d + \gamma_d q_r - \gamma_d q_d + \gamma_d q_r q_d - \gamma_d q_d^2 + \ldots\right) = \left(q_d^{k-1}\prod_{i=1}^m q_{c_i}\right)A,$$

де $A = \left(\gamma_r - \gamma_d + \gamma_d\frac{q_r - q_d}{1 - q_d}\right)$,

$$f\left(x_m^{(r)}\right) - f(x_0) = \left(p_d^{k-1}\prod_{i=1}^m p_{c_i}\right)\left(\beta_r - \beta_d + \beta_d p_r - \beta_d p_d + \beta_d p_r p_d - \beta_d p_d^2 + \ldots\right) =$$

$$= \left(p_d^{k-1}\prod_{i=1}^m p_{c_i}\right)B,$$

де $B = \beta_r - \beta_d + \beta_d\frac{p_r - p_d}{1 - p_d}$, і

$$\delta \equiv \frac{f\left(x_m^{(r)}\right) - f(x_0)}{x_m^{(r)} - x_0} = \frac{B}{A}\prod_{i=1}^m\left(p_{c_i}q_{c_i}^{-1}\right)\left(p_d q_d^{-1}\right)^{k-1}.$$

Оскільки $\frac{B}{A}\prod_{i=1}^m\left(p_{c_i}q_{c_i}^{-1}\right) = \mathrm{const}$, то при $p_d q_d^{-1} > 1$ не існує скінченної похідної функції f у точці x_0. Більше того, якщо, крім цього, $p_d < 0$, то границі $\lim_{k\to\infty}\delta$ не існує навіть нескінченної.

Розглянемо ще одну послідовність

$$x_m^{(r+)} = \Delta^Q_{c_1\ldots c_m \underbrace{d\ldots d(r)}_{k-1}}, \qquad \text{де} \quad r \neq d.$$

Очевидно, що $x_m^{(r+)} \to x_0 \ (k \to \infty)$. Тоді

$$x_m^{(r+)} - x_0 = \left(q_d^{k-1} \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}\right)\Big(\gamma_r - \gamma_d + \left(\gamma_r q_r + \gamma_r q_r^2 + \ldots\right) - \left(\gamma_d q_d + \gamma_d q_d^2 + \ldots\right)\Big) =$$

$$= \left(q_d^{k-1} \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}\right) C,$$

де $C = \left(\gamma_r - \gamma_d + \dfrac{\gamma_r q_r}{1-q_r} - \dfrac{\gamma_d q_d}{1-q_d}\right)$,

$$f\left(x_m^{(r+)}\right) - f\left(x_0\right) = \left(p_d^{k-1} \prod_{i=1}^{m} p_{c_i}\right)\left(\beta_r - \beta_d + \beta_r p_r - \beta_d p_d + \beta_r p_r^2 - \beta_d p_d^2 + \ldots\right) =$$

$$= \left(p_d^{k-1} \prod_{i=1}^{m} p_{c_i}\right) D,$$

де $D = \beta_r - \beta_d + \dfrac{\beta_r p_r}{1-p_r} - \dfrac{\beta_d p_d}{1-p_d}$, і

$$\delta \equiv \frac{f\left(x_m^{(r)}\right) - f\left(x_0\right)}{x_m^{(r)} - x_0} = \frac{D}{C} \prod_{i=1}^{m} \left(p_{c_i} q_{c_i}^{-1}\right) \left(p_d q_d^{-1}\right)^{k-1}.$$

При $p_d q_d^{-1} = 1$ не існує похідної $f'\left(x_0\right)$. Це випливає з того, що

$$\frac{B^{(r)}}{A^{(r)}} \neq \frac{D^{(r+)}}{C^{(r+)}} \qquad \text{або} \qquad \frac{B^{(r_1)}}{A^{(r_1)}} \neq \frac{D^{(r_2)}}{C^{(r_2)}}, \qquad \text{де} \quad r_1 \neq d \neq r_2 \neq r_1 \in A \ni r_2.$$

Отже, має місце наступне твердження.

Лема 8. *Якщо* $q_d^{-1}\left|p_d\right| \geqslant 1$, *то* $f'\left(\Delta^Q_{c_1\ldots c_m(d)}\right)$ *не існує.*

З даної леми і наслідку 4 випливає таке твердження.

Теорема 9. *Якщо* $q_i^{-1}\left|p_i\right| > 1$ *для всіх* $i \in A$, *то* f *є ніде не диференційовною функцією.*

1. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
2. *Salem R.* On some singular monotonic functions which are stricly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – P. 423 – 439.
3. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 256 с.
4. *Серпинскій В.* Элементарный примъръ возрастающей функціи имъющей пости всюду производную равную нулю // Мат. сб. – 1916. – **30**, вып. 3.
5. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

6. *Marsalia G.* Random variables with independent binary digits // Ann. Math. Statist. – 1971. – **42**, № 2. – P. 1922 – 1929.
7. *Minkowski H.* Gesammeine Abhandlungen. – Berlin, 1911. – Bd 2.
8. *Takagi T.* A simple example of the continuous function without derivate // Proc. Phys. Math. Soc. Jap. – 1903. – **1**. – P. 176 – 177.
9. *Albeverio S., Goncharenco Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits // Random Operators and Stochast. Equat. – 2007. – **15**, № 1. – P. 89 – 97.
10. *Chatterji S. D.* Certain induced measures on the unit interval // J. London Math. Soc. – 1963. – **38**. – P. 325 – 331.
11. *Лебег А.* Интегрирование и отыскание примитивных функций. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 324 с.
12. *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular // Amer. Math. Mon. – 1981. – **88**. – P. 47 – 49.
13. *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа – Безиковича // Укр. мат. конгр. Динамічні системи. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 77 – 93.
14. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff – Besicovitch dimension // Ergod. Theory and Dynam. Systems. – 2004. – **24**. – P. 1 – 16.
15. *Працьовитий М. В.* Сингулярність розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 8. – С. 1086 – 1095.
16. *Працьовита І. М.* Про знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1- та 2-го виду // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 7. – С. 958 – 968.
17. *Козырев С. Б.* О топологической густоте извивающихся функций // Мат. заметки. – 1983. – **33**, № 1. – С. 71 – 76.
18. *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2011. – **23**. – С. 178 – 189.

Одержано 08.02.13