К О Р О Т К І П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.95

В. П. Бурский, Е. В. Лесина (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КРУГЕ

We study the problem of solvability of the inhomogeneous third boundary-value problem in a bounded domain for a scalar improperly elliptic differential equation with complex coefficients and homogeneous symbol. It is shown that this problem has a unique solution in the Sobolev space for special classes of boundary data from the spaces of functions with exponentially decreasing Fourier coefficients.

Розглядається питання розв'язності неоднорідної третьої крайової задачі в обмеженій області для скалярного неправильно еліптичного диференціального рівняння з комплексними коефіцієнтами та однорідним символом. Доведено, що класами граничних даних, для яких задача має єдиний розв'язок у просторі Соболєва над кругом, є простори функцій з експоненціальним спаданням коефіцієнтів Фур'є.

Граничные задачи для неправильно эллиптических уравнений в ограниченной области изучались в работе одного из авторов [4], где получен критерий фредгольмовости общей дифференциальной граничной задачи для скалярного линейного неправильно эллиптического уравнения любого порядка в ограниченной области с гладкой границей. Применение этого критерия к задаче Дирихле и задаче Неймана показывает их нефредгольмовость.

В настоящей работе мы изучим неправильно эллиптическое уравнение второго порядка в модельной области — круге — и получим разрешимость третьей краевой задачи в обычной соболевской шкале пространств, при этом правая часть в граничном условии должна быть из некоторого класса аналитических функций. Эта работа продолжает исследование граничных задач для неправильно эллиптических уравнений, описанное в статьях [6 – 8], где была доказана разрешимость задач Дирихле, Неймана и задачи с косой производной для того же уравнения.

Напомним, что в указанных работах была доказана разрешимость граничных задач, причем в зависимости от свойств числа $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$, называемого углом между характеристиками уравнения (2), были рассмотрены три случая:

1) угол φ_0 веществен и π-рационален, т. е. $\varphi_0/\pi \in \mathbb{Q}$;
2) угол φ_0 веществен и π-иррационален;
3) угол φ_0 невеществен.

Первый из них — это случай нарушения единственности решения, когда имеется счетное число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи. Во втором и третьем случаях возникает необходимость вводить пространства аналитических правых частей для разрешимости в обычной соболевской шкале пространств, причем на свойства задач в случае 2, в отличие от случая 3, оказывают влияние теоретико-числовые свойства числа φ_0. При изучении третьей краевой задачи мы ограничимся рассмотрением случая невещественного угла φ_0.

Отметим, что результаты исследований в этом направлении изложены в работах А. В. Бицадзе и его учеников [2], Н. Е. Товмасяна [11, 12] и А. О. Бабаяна (см., например, [1]).

Напомним определение правильно (или собственно) эллиптического оператора [9].

Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$ называется эллиптическим в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, если его старший символ $l(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0$ для всех $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и правильно (или собственно) эллиптическим в открытой или замкнутой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, если m четно, $m = 2k$, и для любого $x \in \Omega$, для каждой пары линейно независимых действительных векторов ξ и η среди корней полинома $l(x, \xi + t\eta)$ от параметра t имеется ровно k корней $t_+^1, t_+^2, \ldots, t_+^k$ с положительной мнимой частью $\operatorname{Im} t_+^j > 0$ и k корней $t_-^1, t_-^2, \ldots, t_-^k$ с отрицательной мнимой частью $\operatorname{Im} t_-^j < 0$.

Ясно, что каждый правильно эллиптический линейный дифференциальный оператор является эллиптическим. Отметим, что при $n \ge 3$ каждый эллиптический линейный дифференциальный оператор является правильно эллиптическим, но при $n = 2$ это не так (например, оператор Коши – Римана $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)/2$), то же справедливо для всех n в случае, когда коэффициенты оператора вещественны [10] (см. также [9]).

Для случая $n = 2$ будем рассматривать общее уравнение второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами без младших членов

$$au_{x_1x_1} + bu_{x_1x_2} + cu_{x_2x_2} = 0. \tag{1}$$

Раскладывая оператор в левой части на линейные множители, уравнение (1) можно записать в виде

$$\big(a^1 \cdot \nabla\big)\big(a^2 \cdot \nabla\big)u = 0$$

с единичными комплексными векторами $a^j = \big(a_1^j, a_2^j\big)$, $j = 1, 2$, что позволяет при условии $a_2^j/a_1^j \neq \pm i$ перейти к виду

$$Lu \equiv \left(\sin\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)u = 0, \tag{2}$$

где углы φ_1 и φ_2 — комплексные числа, определенные равенствами $a_2^j/a_1^j = -\operatorname{tg}\varphi_j$, — это углы наклона характеристик, а угол $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ — угол между характеристиками.

Ниже мы будем предполагать, что $\varphi_1 \neq \varphi_2$ и $a_2^j/a_1^j \neq \pm i$; последнее из них означает существование (комплексных) углов φ_j, так как неравенство $q \neq \pm i$ является условием разрешимости уравнения $\operatorname{tg}\phi = q$.

Невещественность чисел φ_1 и φ_2 означает, что исходное уравнение является эллиптическим, т. е. $l(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, где $l(\xi) = (\xi_1 \sin\varphi_1 + \xi_2 \cos\varphi_1)\ (\xi_1 \sin\varphi_2 + \xi_2 \cos\varphi_2)$ — символ дифференциального оператора L. Под правильной эллиптичностью понимается, что корни λ_1, λ_2 квадратного уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ имеют мнимые части противоположных знаков, а это эквивалентно тому, что комплексные углы φ_1 и φ_2 имеют мнимые части противоположных знаков, и, стало быть, имеют мнимые части одного знака в неправильно эллиптическом случае.

Для неправильно эллиптического уравнения (2) в единичном круге K будем изучать корректную разрешимость третьей краевой задачи

$$(u'_{\nu_*} - gu)|_{\partial K} = \kappa - g\psi = \beta \tag{3}$$

в предположении, что правая часть в граничном условии $\beta \in H^m_\rho(\partial K)$, а коэффициент $g \in \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Здесь $H^m_\rho(\partial K)$ определяется как пространство Соболева с весом $\rho = \rho(n)$, элементами которого являются функции вида

$$\alpha(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n^C \cos n\tau + \alpha_n^S \sin n\tau\right) \tag{4}$$

из $L_2(\partial K)$ такие, что коэффициенты α_n^C, α_n^S разложения удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|\alpha_n^C|^2 + |\alpha_n^S|^2\right)\rho^2(n)\left(1+n^2\right)^m < \infty. \tag{5}$$

Отметим, что ниже в качестве веса принимается значение

$$\rho = \rho(n) = e^{n(|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|-|\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)},$$

причем $\left|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)\right| - \left|\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)\right| > 0$ для неправильно эллиптического уравнения.

Приведем теорему, доказанную в работе [3] и содержащую условие связи следов решения, записанное в виде интегрального равенства.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $u \in H^s(K)$, $s \geqslant 2$, была решением задачи*

$$u'_\tau|_{\partial K} = \gamma \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K), \qquad u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

для уравнения (2), *необходимо и достаточно*, *чтобы функции γ и κ удовлетворяли интегральному равенству*

$$\int\limits_{\partial K} \left[\kappa - (-1)^j \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right] Q(x \cdot \widetilde{a}^j) d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \tag{6}$$

с любым полиномом $Q \in \mathbb{C}[z]$. При этом функция u восстанавливается с точностью до аддитивной постоянной.

В теореме 1 $\widetilde{a}^1 = \left(-\overline{a}_2^1, \overline{a}_1^1\right)$, $\widetilde{a}^2 = \left(-\overline{a}_2^2, \overline{a}_1^2\right)$ — направляющие векторы множества комплексных характеристических направлений $\Lambda^j = \left\{\lambda\widetilde{a}^j | \lambda \in \mathbb{C}\right\}$, $j = 1, 2$, $\langle\widetilde{a}^j, a^j\rangle = 0$, $\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$, $\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ и $\dfrac{\partial}{\partial\nu_*} = l(\nu)\dfrac{\partial}{\partial\nu} - \dfrac{1}{2k}\Big[l\big(\nu(\tau)\big)\Big]'_\tau \dfrac{\partial}{\partial\tau}$ — производные по касательной и по конормали соответственно, k — кривизна кривой ∂K, $\triangle = \det \|a^1, a^2\|$, черта над $\triangle$ обозначает комплексное сопряжение.

Подставим в интегральное равенство (6) вместо полинома Q полином Чебышева первого рода, а вместо функций κ и γ их разложения вида (4) по системе $\{\cos n\tau, \sin n\tau\}$. В результате получим систему двух уравнений:

$$\begin{gathered}\left(\kappa_n^C + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma_n^C\right)\cos n\varphi_1 - \left(\kappa_n^S + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma_n^S\right)\sin n\varphi_1 = 0,\\ \left(\kappa_n^C - \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma_n^C\right)\cos n\varphi_2 - \left(\kappa_n^S - \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma_n^S\right)\sin n\varphi_2 = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Выразим коэффициенты разложения функций κ и γ через коэффициенты функций ψ и β. Из граничного условия (3) следует, что $\kappa = \beta + g\psi$, поэтому

$$\kappa_n^C = \beta_n^C + g\psi_n^C, \qquad \kappa_n^S = \beta_n^S + g\psi_n^S. \tag{8}$$

Далее, поскольку $\gamma = u'_\tau|_{\partial K} = \psi'_\tau$, то $\gamma(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n\psi_n^S \cos n\tau - n\psi_n^C \sin n\tau\right)$, и, соответственно,

$$\gamma_n^C = n\psi_n^S, \qquad \gamma_n^S = -n\psi_n^C. \tag{9}$$

Вернемся к системе (7) и подставим в нее выражения (8) и (9), после чего она преобразуется в систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов ψ_n^C, ψ_n^S :

$$\left(g\cos n\varphi_1 + \frac{\overline{\Delta}n}{2}\sin n\varphi_1\right)\psi_n^C + \left(\frac{\overline{\Delta}n}{2}\cos n\varphi_1 - g\sin n\varphi_1\right)\psi_n^S = \beta_n^S \sin n\varphi_1 - \beta_n^C \cos n\varphi_1,$$

$$\tag{10}$$

$$\left(g\cos n\varphi_2 - \frac{\overline{\Delta}n}{2}\sin n\varphi_2\right)\psi_n^C - \left(\frac{\overline{\Delta}n}{2}\cos n\varphi_2 + g\sin n\varphi_2\right)\psi_n^S = \beta_n^S \sin n\varphi_2 - \beta_n^C \cos n\varphi_2.$$

Определитель системы (10) $\triangle_n = -g\overline{\Delta}n\cos n\varphi_0 + \left(\dfrac{\overline{\Delta}^2 n^2}{4} - g^2\right)\sin n\varphi_0$. Отметим, что случай нарушения единственности решения рассматриваемой задачи, $\triangle_n = 0$, описан в книге [5], где указан счетный набор чисел g, при котором соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение.

Кроме того,

$$\triangle_n^C = \beta_n^C(\overline{\Delta}n\cos n\varphi_1\cos n\varphi_2 + g\sin n\varphi_0) - \beta_n^S\frac{\overline{\Delta}n}{2}\sin n(\varphi_1+\varphi_2),$$

$$\triangle_n^S = \beta_n^S(\overline{\Delta}n\sin n\varphi_1\sin n\varphi_2 + g\sin n\varphi_0) - \beta_n^C\frac{\overline{\Delta}n}{2}\sin n(\varphi_1+\varphi_2).$$

Поскольку

$$|\triangle_n| \geqslant \frac{\overline{\Delta}^2 n^2}{4} e^{n|\operatorname{Im}\varphi_0|},$$

$$|\triangle_n^C| \leqslant \left|\beta_n^C\right| \left(|\overline{\triangle}| n e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|} + |g| e^{n|\operatorname{Im}\varphi_0|}\right) + \left|\beta_n^S\right| \frac{|\overline{\Delta}|n}{2} e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|},$$

$$|\triangle_n^S| \leqslant |\beta_n^S| \left(|\overline{\triangle}| n e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|} + |g| e^{n|\operatorname{Im}\varphi_0|}\right) + \left|\beta_n^C\right| \frac{|\overline{\Delta}|n}{2} e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|},$$

то коэффициенты ψ_n^C, ψ_n^S разложения функции ψ, которые являются решениями системы (10), могут быть оценены сверху (в случае комплексного угла φ_0) следующим образом:

$$|\psi_n^C| = \left|\frac{\triangle_n^C}{\triangle_n}\right| \leqslant \left(|\beta_n^C| + |\beta_n^S|\right)\frac{\rho(n)}{n},$$

$$|\psi_n^S| = \left|\frac{\triangle_n^S}{\triangle_n}\right| \leqslant \left(|\beta_n^C| + |\beta_n^S|\right)\frac{\rho(n)}{n}.$$

В силу неравенства (5), определяющего весовое пространство, и из последних оценок для коэффициентов ψ_n^C, ψ_n^S заключаем, что $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\psi_n^C|^2 + |\psi_n^S|^2\right)n^{2(m+1)} < \infty$, а это означает принадлежность функции ψ пространству $H^{m+1}(\partial K)$. Учитывая этот факт и равенства (9), нетрудно установить принадлежность $\gamma \in H^m(\partial K)$. Кроме того, так как функция κ выражается через известную β и найденную ψ, в силу вложений $H_\rho^m(\partial K) \subset H^m(\partial K)$ и $H^{m+1}(\partial K) \subset \subset H^m(\partial K)$ получаем $\kappa \in H^m(\partial K)$.

Таким образом, решая систему (7), полученную путем подстановки разложений неизвестных функций γ и κ в интегральное равенство (6), а также оценивая в последующем решения системы (10), приходим к выводу о принадлежности γ и κ одному и тому же пространству Соболева. На основании теоремы 1 заключаем, что исходная задача (2), (3) имеет единственное решение, которое содержится в $H^{m+3/2}(K)$. Данный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть угол $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ между характеристиками уравнения* (2) *является комплексным невещественным, а правая часть в граничном условии* (3) *— элемент весового пространства $H_\rho^m(\partial K)$. Тогда решение $u(x)$ третьей краевой задачи* (2), (3) *в круге существует, единственно и принадлежит пространству $H^{m+3/2}(K)$.*

1. *Бабаян А. О.* О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка // Неклассические уравнения математической физики. – 2007. – С. 56 – 68.
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы дифференциальных уравнений с частными производными. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
3. *Бурский В. П.* О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 11. – С. 1476 – 1483.
4. *Бурский В. П.* Условия регулярности общей дифференциальной граничной задачи для неправильно эллиптических уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 6. – С. 754 – 761.
5. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002. – 316 с.
6. *Бурский В. П., Кириченко Е. В.* О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 2. – С. 156 – 164.
7. *Бурский В. П., Лесина Е. В.* Задача Неймана и одна задача с косой производной для неправильно эллиптического уравнения // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 4. – С. 451 – 462.
8. *Бурский В. П., Лесина Е. В.* Задача Неймана для неправильно эллиптического уравнения второго порядка // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2012. – **24**. – С. 37 – 44.
9. *Лионс Ж.-М., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
10. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1953. – **5**, № 2. – С. 123 – 151.
11. *Товмасян Н. Е.* Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1968. – **3**, № 6. – С. 497 – 521.
12. *Товмасян Н. Е.* Эффективные методы решения задачи Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в областях, ограниченных эллипсом // Дифференц. уравнения. – 1969. – **5**, № 1. – С. 60 – 71.

Получено 27.12.12