УДК 517.946

І. М. Ісарюк, І. Д. Пукальський (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ПРО НЕЛОКАЛЬНУ ПАРАБОЛІЧНУ ЗАДАЧУ З ВИРОДЖЕННЯМ

We study the problem for a second-order linear parabolic equation with a nonlocal integral condition in the time variable and power singularities in the coefficients of any order with respect to the time and space variables. By using the maximum principle and a priori estimates, we establish the existence and uniqueness of the solution of this problem in Hölder spaces with power weights.

Рассмотрена задача для линейного параболического уравнения второго порядка с нелокальным интегральным условием по временной переменной и степенными особенностями в коэффициентах произвольного порядка как по временной, так и по пространственных переменных. С помощью принципа максимума и априорных оценок установлены существование и единственность решения поставленной задачи в гельдеровых пространствах со степенным весом.

Рівняння з виродженнями за просторовими змінними описують різні процеси. Зокрема, рівнянням із сингулярним оператором Бесселя у тілах із симетрією моделюються дифузійні процеси та радіальні коливання. Дослідженню крайових задач з виродженнями та особливостями для рівнянь із частинними похідними присвячено праці [1 – 5]. У праці [6] побудовано теорію класичних розв'язків задачі Коші та крайових задач для рівномірно параболічних рівнянь, які мають степеневі особливості обмеженого порядку на межі області в коефіцієнтах при молодших похідних.

Класичну розв'язність основних задач математичної фізики з нелокальною умовою за часовою змінною для рівномірно параболічних рівнянь встановлено в [7]. Дослідження крайових задач з нелокальними умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними стимулювалося різними обставинами, зокрема розв'язання обернених задач для рівнянь теплопровідності [8], задач із теорії фізики плазми [9]. Нелокальним крайовим задачам присвячено праці [10 – 12]. Дослідження загальної параболічної крайової задачі з інтегральними умовами для рівняння з гладкими коефіцієнтами наведено у статті [13].

У даній статті розглядається задача для лінійного параболічного рівняння другого порядку з нелокальною інтегральною умовою за часовою змінною і степеневими особливостями довільного порядку у коефіцієнтах за часом та просторовими змінними. За допомогою принципу максимуму та апріорних оцінок встановлено існування та єдиність розв'язку поставленої задачі у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

1. Постановка задачі й основні обмеження. Нехай t_0, T — фіксовані додатні числа, $t_0 < T$, $(x_1, \ldots, x_n)$ — координати точки $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_j = \{x, x \in \mathbb{R}^n, x_j = 0\}$, $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Omega_j$, $\Pi_{(0)} = \big\{(t,x) | t \in [0,T), x \in \Omega\big\} \bigcup \big\{(t,x) | t = t_0, x \in \mathbb{R}^n\big\}$.

В області $\Pi = \mathbb{R}^n \times [0,T)$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $(t,x) \in \Pi \setminus \Pi_{(0)}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} - A_0(t,x)\right] u(t,x) = f(t,x) \qquad (1)$$

і нелокальну умову за часовою змінною

$$u(0,x)+\int\limits_0^T g(\tau,x)u(\tau,x)d\tau=\varphi(x). \tag{2}$$

Виродження коефіцієнтів рівняння (1) у точці $P(t,x)\in\Pi\setminus\Pi_{(0)}$ будуть характеризувати функції $s(\beta_i;P)=s_1(\beta_i^{(1)},t)s_2\Big(\beta_i^{(2)},x_i\Big)$, де $s_1\Big(\beta_i^{(1)},t\ \Big)=|t-t_0|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-t_0|\le 1$ і $s_1(\beta_i^{(1)},t)=1$ при $|t-t_0|\ge 1$; $s_2\Big(\beta_i^{(2)},x_i\Big)=|x_i|^{\beta_i^{(2)}}$ при $|x_i|\le 1$; $s_2\Big(\beta_i^{(2)},x_i\Big)=1$ при $|x_i|\ge 1$; $\beta_i\in\Big\{\beta_i^{(1)},\beta_i^{(2)}\Big\}$, $\beta_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $\beta_i^{(\nu)}$ — дійсні числа, $\nu\in\{1,2\}$.

Позначимо через l, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_j^{(\nu)}$, α дійсні числа, $\nu\in\{1,2\}$, $j\in\{0,\ldots,n\}$, $\gamma^{(\nu)}\ge 0,[l]$ — ціла частина l. Нехай D — довільна замкнена підобласть $\mathbb{R}^n$, $Q=D\times[0,T)$, $\bar Q\subset\Pi$, $\Big(x_1^{(1)},\ldots,x_i^{(1)},\ldots$ $\ldots,x_n^{(1)}\Big)$ — координати точки $x^{(1)}$ області $\bar D$, $\Big(x_1^{(1)},\ldots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)}\ldots,x_n^{(1)}\Big)$ — координати точки $x^{(2)}$ області $\bar D$, $P_1\big(t_1,x^{(1)}\big)$, $P_2\big(t_2,x^{(2)}\big)$, $H_i\big(t_1,x^{(2)}\big)$ — довільні точки області $\overline{Q}$, $S(\gamma;P)=s_1\big(\gamma^{(1)},t\big)\min_i\big\{s_2(\gamma^{(2)};x_i)\big\}$.

Визначимо функціональні простори, в яких буде розглядатися задача (1), (2).

$C^l(\gamma,\beta,a;\Pi)$ — множина функцій простору $L_1(Q)$, які мають частинні похідні в $\bar Q$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2j+|k|\le[l]$, і скінченне значення норми

$$\|u;\gamma;\beta;a;\Pi\|_l=\|u;\gamma;\beta;a;\Pi\|_{[l]}+\langle u;\gamma;\beta;a;\Pi\rangle_l,$$

де, наприклад,

$$\|u;\gamma,\beta;0;\Pi\|_0=\sup_{\overline{Q}}|u|\equiv\|u;Q\|_0,$$

$$\langle u;\gamma,\beta;a;\Pi\rangle_l=\sum_{2j+|k|=[l]}\sum_{i=1}^n\sup_{(P_1,H_i)\subset\overline{Q}}\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|^{-\{l\}}\times$$

$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_i)\right|S(l\gamma;\tilde P)s_1\left(-\{l\}\beta_i^{(1)},t_1\right)s_2\left(-\{l\}\beta_i^{(2)},\tilde x_i\right)\times$$

$$\times\prod_{r=1}^n s_2\left(-k_r\beta_r^{(2)},\tilde x_r\right)s_1\left(-k_r\beta_r^{(1)},t_1\right)+\sum_{2j+|k|=[l]}\sum_{i=1}^n\sup_{(P_2,H_i)\subset\overline{Q}}|t_1-t_2|^{-\{l/2\}}\times$$

$$\times S(l\gamma;\tilde P)\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_2)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_i)\right|\prod_{r=1}^n s_2\left(-k_r\beta_r^{(2)},x_r^{(2)}\right)s_1\left(-k_r\beta_r^{(1)},t_2\right).$$

Тут $S(a\gamma;\tilde P)=\min\big\{S(a\gamma;P_1),S(a\gamma;P_2),S(a\gamma;H_i)\big\}$, $s_2(a,\tilde x_i)=\min\Big\{s_2\big(a,x_i^{(1)}\big),s_2\Big(a,x_i^{(2)}\Big)\Big\}$, $\partial_x^k=\partial_{x_1}^{k_1}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}$, $|k|=k_1+\ldots+k_n$.

Дослідження задачі (1), (2) будемо проводити за таких умов:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{ij=1}^{n} s(\beta_i; P)s(\beta_j; P)A_{ij}(P)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2,$$

де π_1, π_2 — фіксовані додатні сталі, $s(\beta_i; P)s(\beta_j; P)A_{ij}(P) \in C^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; \Pi)$, $s(\mu_i; P)A_i(P) \in \in C^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; \Pi)$, $s(\mu_0; P)A_0(P) \in C^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; \Pi)$, $A_0 \le K < \infty$, K — стала,

$$\gamma^{(\nu)} = \max\left\{\max_i \left(1 + \beta_i^{(\nu)}\right), \max_i \left(\mu_i^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}\right), 2^{-1}\mu_0^{(\nu)}\right\};$$

б) $f \in C^{\alpha}(\gamma; \beta; \mu_0; \Pi)$, $\varphi \in C^{(2+\alpha)}(\tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \mathbb{R}^n)$, $\tilde{\gamma} = \left(0, \gamma^{(2)}\right)$, $\tilde{\beta} = \left(0, \beta^{(2)}\right)$, $g \in C^{2+\alpha}(\Pi)$, $\int_0^T \left|g(\tau, x)\right| e^{-\lambda\tau} d\tau \le \lambda_0 < 1$, де λ — довільне число, яке задовольняє нерівність $\lambda < -K$.

Справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1), (2) *виконано умови* а), б). *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; \Pi)$ *і для нього має місце оцінка*

$$\|u; \gamma; \beta; 0; \Pi\|_{2+\alpha} \le c\left(\|f; \gamma; \beta; \mu_0; \Pi\|_{\alpha} + \|\varphi; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \mathbb{R}^n\|_{2+\alpha}\right). \quad (3)$$

Для дослідження задачі (1), (2) побудуємо послідовність розв'язків задач з гладкими коефіцієнтами, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1), (2).

Оцінка розв'язків задач із гладкими коефіцієнтами. Нехай

$$\Pi_m = \Pi \cap \left\{(t, x) \in \Pi \middle| s_1(1, t) \ge m_1^{-1}, s_2(1, x_i) \ge m_2^{-1}\right\},$$

$$m = (m_1, m_2), \quad m_1 \ge 1, \quad m_2 \ge 1$$

— послідовність областей, яка збігається до Π при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$. Розглянемо в області Π задачу знаходження функції $u_m(t, x)$, яка задовольняє рівняння

$$(L_1 u_m)(t, x) = \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t, x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x)\partial_{x_i} - a_0(t, x)\right] u_m(t, x) = f_m(t, x) \quad (4)$$

і нелокальну умову

$$u_m(0, x) + \int_0^T g(\tau, x) u_m(\tau, x) d\tau = \varphi_m(x). \quad (5)$$

В області Π_m коефіцієнти диференціального виразу L_1 збігаються з коефіцієнтами виразу L, а функції $f_m = f$, $\varphi_m = \varphi$.

В області $\Pi \setminus \Pi_m$ коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0 і функції f_m, φ_m є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0 і функцій f, φ із області Π_m [15, с. 83].

В задачі (4), (5) виконаємо заміну

$$u_m(t, x) = v_m(t, x)e^{-\lambda t},$$

де λ задовольняє умову б). Тоді $v_m(t, x)$ задовольняє рівняння

$$\big((L_1-\lambda)v_m\big)(t,x)=f_m(t,x)e^{\lambda t} \tag{6}$$

і нелокальну умову

$$v_m(0,x)+\int\limits_0^T g(\tau,x)e^{-\lambda\tau}v_m(\tau,x)d\tau=\varphi_m(x). \tag{7}$$

Існування розв'язку задачі (6), (7) у просторі $C^{2+\alpha}(\Pi)$ обґрунтовується за схемою доведення теореми 2.11 [4, с. 66].

Знайдемо оцінку розв'язку $v_m(t,x)$. У просторі $C^{2+\alpha}(\Pi)$ введемо норму $\|v_m;\gamma;\beta;a;\Pi\|_l$, еквівалентну при кожному фіксованому (m_1,m_2) гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;a;\Pi\|_l$, тільки замість функцій $s(\beta_i;P)$, $S(\gamma;P)$ беремо відповідно $d(\beta_i;P)$, $R(\gamma;P)$, де $d(\beta_i;P)=d_1\Big(\beta_i^{(1)},t\Big)d_2\Big(\beta_i^{(2)},x_i\Big)$, $d_1\Big(\beta_i^{(1)},t\Big)=\max\Big(s_1(\beta_i^{(1)},t),m_1^{-\beta_i^{(1)}}\Big)$ при $\beta_i^{(1)}\geq 0$ і $d_1\Big(\beta_i^{(1)},t\Big)=\min\Big(s_1(\beta_i^{(1)},t),m_1^{-\beta_i^{(1)}}\Big)$ при $\beta_i^{(1)}\leq 0$; $d_2\Big(\beta_i^{(2)},x_i\Big)=\max\Big(s_2(\beta_i^{(2)},x_i),m_2^{-\beta_i^{(2)}}\Big)$ при $\beta_i^{(2)}\geq 0$ і $d_2\Big(\beta_i^{(2)},x_i\Big)=\min\Big(s_2(\beta_i^{(2)},x_i),m_2^{-\beta_i^{(2)}}\Big)$ при $\beta_i^{(2)}<0$; $R(\gamma;P)=$ $=\min_i\big\{d_2(\gamma^{(2)},x_i)\big\}d_1(\gamma^{(1)},t)$.

Для розв'язку задачі (6), (7) справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай v_m — класичний розв'язок задачі* (6), (7) *в області* Π *і виконано умови* а), б). *Тоді для $v_m(t,x)$ має місце оцінка*

$$|v_m|\leq\max\left\{\Big\|f_m e^{\lambda t}(-\lambda-a_0)^{-1};\Pi\Big\|_0,\left\|\varphi_m\left(1-\int\limits_0^T\big|g(\tau,x)\big|e^{-\lambda\tau}d\tau\right)^{-1};\mathbb{R}^n\right\|_0\right\}. \tag{8}$$

Нерівність (8) доводиться за схемою доведення теореми 2.1 із [14, с. 22], тобто аналізуються всі можливі значення додатного максимуму і від'ємного мінімуму розв'язку $v_m(t,x)$.

Відмінність наявна лише у випадку, коли $\sup_{\overline{Q}}|v_m|=\sup_{\overline{D}}|v_m|=|v_m(0,x^{(3)}|$. Використовуючи умову (7), маємо рівність

$$v_m\big(0,x^{(3)}\big)+\int\limits_0^T g\big(\tau,x^{(3)}\big)e^{-\lambda\tau}v_m\big(\tau,x^{(3)}\big)d\tau=\varphi_m\big(x^{(3)}\big),$$

з якої випливає нерівність

$$\Big|v_m(0,x^{(3)})\Big|\leq\left\|\varphi_m\left(1-\int\limits_0^T\big|g(\tau,x)\big|e^{-\lambda\tau}d\tau\right)^{-1};\mathbb{R}^n\right\|_0.$$

Теорема 3. *Якщо виконано умови теореми* 1, *то для розв'язку задачі* (6), (7) *виконується нерівність*

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha}\leq c\big(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi\|_\alpha+\|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n\|_{2+\alpha}\big). \tag{9}$$

Доведення. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [12, 15], маємо

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha} \le (1+\varepsilon^{\alpha})\langle v_m;\gamma,\beta;0;\Pi\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m;\Pi\|_0,$$

де ε — довільне дійсне число, $\varepsilon \in (0,1)$. Тому досить оцінити півнорму $\langle v_m;\gamma,\beta;0;\Pi\rangle_{2+\alpha}$. Із означення півнорми випливає існування в Π точок P_1, P_2, H_i, для яких виконується одна із нерівностей

$$\lambda_1\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha} \le E_\delta, \quad \delta \in \{1,2\}, \tag{10}$$

де

$$E_1 = \sum_{2j+|k|=2}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|\partial_t^j\partial_x^k v_m(H_i) - \partial_t^j\partial_x^k v_m(P_1)\right|\times$$

$$\times R\big((2+\alpha)\gamma;P\big)\prod_{\nu=1}^{n} d_2\Big(-k_\nu\beta_\nu^{(2)},\tilde{x}_\nu\Big)d_1\Big(-k_\nu\beta_\nu^{(1)}t^{(1)}\Big)\times$$

$$\times d_1\Big((-\alpha)\beta_i^{(1)},t^{(1)}\Big)d_2\Big(-\alpha\beta_i^{(2)},\tilde{x}_i\Big),$$

$$E_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{2j+|k|=2}\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\left|\partial_t^j\partial_x^k v_m(P_2) - \partial_t^j\partial_x^k v_m(H_i)\right|\times$$

$$\times R\big((2+\alpha)\gamma;\tilde{P}\big)\prod_{\nu=1}^{n} d_2\Big(-k_\nu\beta_\nu^{(2)},\ x_\nu\Big)d_1\Big(-|k|\beta_i^{(1)},\tilde{t}\Big),$$

$$\lambda_1 \in \left(\frac{1+\lambda_0}{2},1\right),$$

$$R(\gamma;\tilde{P}) = \min\left\{R(a\gamma;P^{(1)}),R(a\gamma;P^{(2)}),R(a\gamma;H_i)\right\},$$

$$d_2(a,\tilde{x_i}) = \min\left\{d_2\big(a,x_i^{(1)}\big),d_2\big(a,x_i^{(2)}\big)\right\}.$$

Якщо $|t_1 - t_2| \ge R(2\gamma;\tilde{P})\dfrac{\varepsilon_1}{16} \equiv T_1$, ε_1 — довільне число, $\varepsilon_1 \in (0,1)$, то

$$E_2 \le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_2. \tag{11}$$

Якщо $\left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right| \ge n^{-1}R(\gamma;\tilde{P})d_1\Big(-\beta_i^{(1)},t_1\Big)d_2\Big(-\beta_i^{(2)},\tilde{x}_i\Big)\dfrac{\varepsilon_1}{4} \equiv T_2$, то

$$E_1 \le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_2. \tag{12}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (11) і (12), знаходимо

$$E_\delta \le \varepsilon^{\alpha}\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m;\Pi\|_0. \tag{13}$$

Нехай $\left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right| \le T_2$ і $|t_1 - t_2| \le T_1$. Будемо вважати, що $R(\gamma; \tilde{P}) = R(\gamma; P_1)$.

Запишемо задачу (6), (7) у вигляді

$$(L_2 v_m)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right] v_m =$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} \big[a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1)\big]\partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m + \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\partial_{x_i} v_m + \big(a_0(P) - \lambda\big)v_m + f_m(t,x)e^{\lambda t} \equiv$$

$$\equiv F_m^{(1)}(t,x;v_m) + f_m(t,x)e^{\lambda t}, \tag{14}$$

$$v_m(0,x) = \varphi_m(x) - \int\limits_0^T g(\tau,x)e^{-\lambda\tau} v_m(\tau,x)d\tau \equiv \Phi_m(x;v_m). \tag{15}$$

Нехай V_r — область із Π, $V_r = \Big\{(t,x) \in \Pi, \left|t - t^{(1)}\right| \le r^2 T_1, \left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right| \le rT_2, i \in \in \{1,2,\ldots,n\}\Big\}$. В задачі (14), (15) виконаємо заміну $v_m(t,x) = \omega_m(t,y)$, $y_i = d(\beta_i;P_1)x_i$. В результаті одержимо

$$(L_3\omega_m)(t,y) = \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)d(\beta_i;P_1)d(\beta_j;P_1)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\right]\omega_m \equiv$$

$$\equiv F_m^{(1)}(t,\tilde{y};\omega_m) + f_m(t,\tilde{y})e^{\lambda t}, \tag{16}$$

$$\omega_m(0,y) = \Phi_m(\tilde{y};\omega_m), \tag{17}$$

де $\tilde{y} = \big(d(-\beta_1;P_1)x_1, \ldots, d(-\beta_n;P_1)x_n\big)$.

Позначимо $y_i^{(1)} = d(\beta_i;P_1)x_i^{(1)}$, $V_r^{(1)} = \Big\{(t,y)\Big| |t - t^{(1)}| \le rT_1, \left|y_i - y_i^{(1)}\right| \le n^{-1}r\sqrt{T_1}, i \in \in \{1,\ldots,n\}\Big\}$, і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in V_{1/4}^{(1)}, \quad 0 \le \eta(t,y) \le 1, \\ 0, & (t,y) \notin V_{3/4}^{(1)}, \quad |\partial_t^j \partial_y^k \eta| \le c_{jk} R\big(-(2j+|k|)\gamma; P_1\big). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,y) = \omega_m(t,y)\eta(t,y)$ буде розв'язком задачі Коші

$$(L_3 W_m)(t,y) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)d(\beta_i;P_1)d(\beta_j;P_1)\big[\partial_{y_j}\eta\partial_{y_i}\omega_m + \partial_{y_i}\eta\partial_{y_j}\omega_m\big] +$$

$$+\omega_m\left[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)d(\beta_i;P_1)d(\beta_j;P_1)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta - \partial_t\eta\right] +$$

$$+\eta\big(F_m^{(1)} + f_m e^{\lambda t}\big) \equiv F_m^{(2)}(t,\tilde{y};\eta;\omega_m) + \eta f_m e^{\lambda t}, \tag{18}$$

$$W_m(0,y) = \eta \Phi_m(\tilde{y}; \omega_m). \tag{19}$$

Згідно з теоремою 5.1 із [14, с. 364], для розв'язку задачі (18), (19) виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2)\Big|\partial_t^j \partial_y^k W_m(M_1) - \partial_t^j \partial_y^k W_m(M_2)\Big| \le$$

$$\le c\left(\Big\|F_m^{(2)} + \eta f_m e^{\lambda t}\Big\|_{C^{\alpha}(V_{3/4}^{(1)})} + \|\Phi_m \eta\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4}^{(1)})}\right), \tag{20}$$

де $(M_1, M_2) \in V_{1/4}^{(1)}$, $d(M_1, M_2)$ — параболічна відстань між точками M_1 і M_2, $2j + |k| = 2$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,y)$, знаходимо

$$\Big\|F_m^{(2)} + \eta f_m e^{\lambda t}\Big\|_{C^{\alpha}(V_{3/4}^{(1)})} \le cR\big(-(2+\alpha)\gamma; P_1\big)\left(\Big\|\omega_m; \gamma; 0; 0; V_{3/4}^{(1)}\Big\|_2 + \right.$$

$$\left. + \Big\|\omega_m; V_{3/4}^{(1)}\Big\|_0 + \Big\|F_m^{(1)}; \gamma; 0; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)}\Big\|_\alpha + \Big\|f_m; \gamma; 0; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)}\Big\|_\alpha\right), \tag{21}$$

$$\|\eta \Phi_m\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4}^{(1)})} \le cR\big(-(2+\alpha)\gamma; P_1\big)\Big\|\Phi_m; \gamma; 0; 0; V_{3/4}^{(1)}\Big\|_{2+\alpha}. \tag{22}$$

Підставляючи (21), (22) у (20) і повертаючись до змінних (t,x), одержуємо

$$E_\delta \le c_1(\|F_m^{(1)}; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}\|_\alpha + \|\Phi_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}\|_{2+\alpha} + \|\omega_m; V_{3/4}\|_0 + \|v_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}\|_2. \tag{23}$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності і оцінки норм кожного доданка виразів $F_m^{(1)}$, Φ_m, маємо

$$E_\delta \le \big(\lambda_0 + \varepsilon^\alpha(n+2) + (\varepsilon_1 n)^2\big)\|v_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}\|_{2+\alpha} + c_1\|v_m; V_{3/4}\|_0 +$$

$$+ c_3\big(\|f_m; \gamma; \beta; 2\gamma; \Pi\|_\alpha + \|\varphi_m; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \mathbb{R}^n\|_{2+\alpha}\big). \tag{24}$$

Використовуючи нерівності (8), (10), (13), (24) і вибираючи $\varepsilon, \varepsilon_1$ досить малими, одержуємо оцінку

$$\|v_m; \gamma; \beta; 0; \Pi\|_{2+\alpha} \le c_2\big(\|f_m; \gamma; \beta; 2\gamma; \Pi\|_\alpha + \|\varphi_m; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \mathbb{R}^n\|_{2+\alpha}\big). \tag{25}$$

Оскільки $\|f_m; \gamma; \beta; 2\gamma; \Pi\|_\alpha \le c\|f; \gamma; \beta; \mu_0; \Pi\|_\alpha$, $\|\varphi_m; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \mathbb{R}^n\|_{2+\alpha} \le c\|\varphi; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \mathbb{R}^n\|_{2+\alpha}$, то з нерівності (25) випливає нерівність (8).

Доведення теореми **1.** На підставі заміни $v_m = u_m e^{\lambda t}$ і нерівності (8) для розв'язків задачі (4), (5) справджується оцінка

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi\|_{2+\alpha} \le c_3\big(\|f; \gamma; \beta; \mu_0; \Pi\|_\alpha + \|\varphi; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \mathbb{R}^n\|_{2+\alpha}\big),$$

права частина якої не залежить від $m = (m_1, m_2)$. Крім того, послідовності $\{U_m^{(0)}\} = \{u_m\}$, $\{U_m^{(1)}\} = \{d(\gamma - \beta_i; P)\partial_{x_i} u_m(P)\}$, $\{U_m^{(2)}\} = \{R(2\gamma; P)\partial_t u_m(P)\}$, $\{U_m^{(3)}\} = \{d(\gamma - \beta_i; P)d(\gamma - \beta_j; P)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(P)\}$ рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні в області $\overline{Q}$. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{U_{\tilde{m}_k}^{\nu}\}$, рівномірно збіжні в $\overline{Q}$ до $\{U_{(0)}^{(\nu)}\}$, $\nu \in \{0,1,2,3\}$.

Оскільки Q — довільна область, $\overline{Q} \subset \Pi$, то, переходячи до границі при $m_{1k} \to \infty$, $m_{2k} \to \infty$ в задачі (4), (5), переконуємося, що $u(t,x) = U_{(0)}^{(0)}$ — єдиний розв'язок задачі (1), (2), $u \in \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $\tilde{m_k} = (m_{1k}, m_{2k})$.

1. *Бицадзе А. Б* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.
3. *Dziubarski J.* Note on H^1 spaces related to degenerate Schrödinger operators // J. Math. – 2005. – **49**, № 4. – P. 1271 – 1257.
4. *Han Pigong.* Asymptotic behavior of solutions to semilinear elliptic equations with Harby potential // Proc. Amer. Math. Soc. – 2007. – **135**, № 2. – P. 365 – 372.
5. *Базалий Б. В., Краснощек Н. В.* Классическая разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного сильно вырождающегося параболического уравнения // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 10. – С. 1299 – 1320.
6. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
7. *Chabrowski I.* One non-local problems for parabolic equations // Nagoya Math. J. – 1984. – **93**. – P. 109 – 131.
8. *Вабищевич П. Н.* Нелокальная параболическая задача и обратные задачи теплопроводности // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 7. – С. 1183 – 1199.
9. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. – 1989. – **185**, № 4. – С. 739 – 740.
10. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
11. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
12. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
13. *Матійчук М. І., Губка А. О.* Загальна параболічна крайова задача з інтегральними умовами // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту: Зб. наук. праць. Математика. – 2005. – Вип. 269. – С. 26 – 35.
14. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
15. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

Одержано 12.02.13,
після доопрацювання — 28.05.13