1983 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 35, № 4

УДК 517.432

Е. В. Черемных

Спектральный анализ некоторых несамосопряженных разностных операторов

В работах [1] и [4] рассматривается спектральный анализ оператора умножения на независимое переменное, возмущенного некоторым несамосопряженным интегральным оператором. В работе [4] в случае $H = L^2(0, 1)$ указана конструкция спектральных проекторов и построено равенство Парсеваля.

В настоящей заметке продолжен анализ, начатый в [4], именно: изучены корневые пространства возмущенного оператора и указано приложение к разностным операторам.

1. Предварительные понятия. В пространстве $H = L^2(0, 1)$ рассматривается оператор $T = S + V$, $Sf(x) = xf(x)$, $V = A^*B$, где, например, $Af = \int\limits_0^1 f(x)\,\alpha(x)\,dx$ и $\alpha(x)$ — вектор-функция со значениями во вспомогательном гильбертовом пространстве G, голоморфная в некоторой окрестности Ω интервала $[0, 1]$. Аналогично, оператор B задается функцией $\beta(x)$. Обозначим $\Phi = A^2(\Omega)$, и пусть $\overline{\Phi}$ — пространство функций, комплексно сопряженных к элементам из Φ, причем $(\bar\varphi, \bar\psi)_{\overline{\Phi}} = \overline{(\varphi, \psi)_\Phi}$, $\bar\varphi$, $\bar\psi \in \overline{\Phi}$. Положим $\tilde{\Phi} = \Phi \oplus \overline{\Phi}$.

В [4] для резольвенты $T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}$ получено разложение

$$(T_\zeta\varphi, \psi)_H = (\varphi, b_{\bar\zeta})(a_\zeta, \psi)\, m(\zeta) + (\tilde{T}_\zeta\varphi, W\psi)_{\tilde{\Phi}}, \quad \varphi, \psi \in \Phi, \tag{1}$$

где a_ζ, $b_{\bar\zeta}$ — собственные функционалы операторов T и T^*, $m(\zeta)$ — некоторая функция, имеющая $\zeta_0 = 0$ и $\zeta_1 = 1$ точками ветвления, $\tilde{T}_\zeta = \tilde{S}_\zeta - \tilde{S}_\zeta A^* N(\zeta)^{-1} \tilde{B}\tilde{S}_\zeta$ — резольвента оператора $\tilde{T} = \tilde{S} + A^*\tilde{B}$, при этом $\tilde{S}_\zeta$ — резольвента оператора $\tilde{S}: \tilde{\Phi} \to \tilde{\Phi}$, построенная согласно [5]. Нам понадобится из [5] соотношение

$$\tilde{S}_\zeta\varphi = \mathcal{R}_\zeta\varphi + \varphi(\zeta)\,\overline{K}_\zeta, \quad \varphi \in \Phi \subset \tilde{\Phi}, \tag{2}$$

где $\mathcal{R}_\zeta\varphi(z) = (\varphi(z) - \varphi(\zeta))/(z - \zeta)$ и $\overline{K}_\zeta$ — ядро Бергмана области Ω. Далее, в соотношении (1) $W: \Phi \to \tilde{\Phi}$ — некоторый нормировочный оператор, с помощью которого определяется также оператор $\tilde{B}: \tilde{\Phi} \to G$ соотношением $(\tilde{B}f, d)_G = (f, WB^*d)_{\tilde{\Phi}}$, $d \in G$, $f \in \tilde{\Phi}$ и, наконец, $N(\zeta) = 1 + \tilde{B}\tilde{S}_\zeta A^*$.

Модифицируем резольвенту $\tilde{T}_\zeta$, пробуя представить ее (подобно $\tilde{S}_\zeta$) как минимальное продолжение некоторой псевдорезольвенты. Пользуясь (2) и учитывая, что $(\varphi, b_{\bar\zeta}) = \varphi(\zeta) - (N(\zeta)^{-1}\tilde{B}\tilde{S}_\zeta\varphi, \alpha(\bar\zeta))_G$, сразу получаем $\tilde{T}_\zeta\varphi = \mathcal{R}_{0\zeta}\varphi + (\varphi, b_{\bar\zeta})\,\overline{K}_\zeta$, где $\mathcal{R}_{0\zeta}\varphi = \mathcal{R}_\zeta\varphi - \mathcal{R}_\zeta A^* N(\zeta)^{-1}\tilde{B}\tilde{S}_\zeta\varphi$.

Нетрудно подобрать элемент $l \in \Phi$ такой, что выражения $\mathcal{R}_{0\zeta}\, l$ и $k(\zeta) = (l, b_{\bar\zeta}) \not\equiv 0$ голоморфны в Ω, и нетрудно проверить также, что выражение

$$\mathcal{R}_{1\zeta}\varphi = \mathcal{R}_{0\zeta}\varphi - (\varphi, \hat{b}_{\bar\zeta})\,\mathcal{R}_{0\zeta}l, \quad (\varphi, \hat{b}_{\bar\zeta}) = (\varphi, b_{\bar\zeta})/k(\zeta),$$

определяет псевдорезольвенту в пространстве Φ с одномерным ядром $L=\{l\}$. Из (1) следует $\mathcal{R}_{1\zeta}(T-\zeta)\varphi=\varphi$, т. е. оператор $T:\Phi\to\Phi$ ассоциирован с псевдорезольвентой $\mathcal{R}_{1\zeta}$.

Положим $a_k(\zeta)=k(\zeta)a(\zeta)$ и $c(\varphi)(\zeta)=(\mathcal{R}_{0\zeta}l,\varphi)_\Phi$ для $a,\varphi\in\Phi$ и введем оператор $U\in\mathcal{B}(\tilde{\Phi})$, задавая сопряженный к нему соотношением

$$U^*\{\varphi,\bar{a}\}=\{\varphi,\overline{c(\varphi)+a_k}\}. \tag{3}$$

Из (3) сразу следует, что подпространство нулей $Z(U)$ порождается цепочками, отвечающими всем корням $\theta\in\Omega$ функции $k(\zeta)$, каждая из которых состоит из элементов

$$-\mathcal{R}_{0\theta}l+\bar{K}_\theta,\ \dots,\ -\mathcal{R}_{0\theta}^{(s-1)}l+\overline{K_\theta^{(s-1)}}, \tag{4}$$

где s — кратность θ как корня функции $k(\zeta)$.

Лемма. 1 [5]. *Пусть $\tilde{T}_{1\zeta}$ — минимальное продолжение псевдорезольвенты $\mathcal{R}_{1\zeta}$, построенное по оператору $T:\Phi\to\Phi$. Тогда*

$$(\tilde{T}_{1\zeta}\varphi,W_1\psi)_{\tilde{\Phi}}=(\tilde{T}_\zeta\varphi,W\psi)_{\tilde{\Phi}},\quad \varphi,\psi\in\Phi, \tag{5}$$

где $W_1:\Phi\to\tilde{\Phi}$ — некоторый нормировочный оператор.

2. *Резольвенты $\tilde{T}_{1\zeta}$ и $\tilde{T}_\zeta$ подобны в том смысле, что*

$$U\tilde{T}_{1\zeta}=\tilde{T}_\zeta U, \tag{6}$$

причем $U\in B(\tilde{\Phi})$, $R(U)=\tilde{\Phi}$ и сужение оператора U на пространство $Z(U)^\perp$ имеет ограниченный обратный оператор.

2. Корневые пространства оператора T. Рассмотрим корневые пространства $\mathfrak{N}_\lambda=\bigcup\limits_{j\geq 1}Z((T-\lambda)^j)$. Так как $K(\zeta)-1$ — оператор Гильберта — Шмидта, то определитель $\Delta(\zeta)=\det K(\zeta)$, $\zeta\notin[0,1]$, определяемый как произведение всех собственных значений, существует и функция $\Delta(\zeta)$ голоморфна при $\zeta\notin[0,1]$. Аналогично [1] доказывается теорема.

Теорема 1. *Размерность* $\dim\mathfrak{N}_\lambda$ *корневого пространства* $\mathfrak{N}_\lambda$, $\lambda\notin[0,1]$, *равна кратности m_λ собственного значения λ оператора T как корня определителя возмущения $\Delta(\zeta)$.*

Заменяя в доказательстве этой теоремы пространство H на $\tilde{\Phi}$ и S_ζ на $\tilde{S}_\zeta$, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Размерность* $\dim\tilde{\mathfrak{N}}_\lambda$ *корневого пространства* $\tilde{\mathfrak{N}}_\lambda$, $\lambda\in\Omega$, *равна порядку n_λ собственного значения λ оператора $\tilde{T}$ как корня определителя возмущения* $\det N(\zeta)$.

Точки ветвления резольвенты ζ_ν, $\nu=0,1$, названы в [4] спектральными особенностями, если проекторы $P_{\zeta_\nu}=-\operatorname*{Res}\limits_{\zeta=\zeta_\nu}\tilde{T}_\zeta$ нетривиальны. Модифицируем теперь спектральные проекторы, полагая в дальнейшем $P_{\zeta\nu}=-\operatorname*{Res}\limits_{\zeta=\zeta_\nu}\tilde{T}_{1\zeta}$. При таком определении равенство Парсеваля в [4] видоизменится согласно (5), кроме того, $P_{\zeta_\nu}\tilde{\Phi}=P_{\zeta_\nu}\Phi$ и, если $\mathcal{P}_{\zeta_\nu}=-\operatorname*{Res}\limits_{\zeta=\zeta_\nu}\mathcal{R}_{1\zeta}$, то $P_{\zeta_\nu}\varphi=\mathcal{P}_{\zeta_\nu}\varphi+\sum c_j(\varphi)\overline{K_{\zeta_\nu}^{(j)}}$, где $c_j(\varphi)$ — некоторые функционалы. Согласно теореме о вычете псевдорезольвенты [6], проектор $\mathcal{P}_{\zeta_\nu}$ проектирует Φ на L-корневое пространство, отвечающее нормальному L-собственному значению ξ_ν оператора $T:\Phi\to\Phi$, более того,

$$P_{\zeta_\nu}\varphi=\sum c_{ij}(\varphi)\varphi_{ij}+\sum d_{ij}(\varphi)\left(\psi_{ij}+\frac{1}{j!}\overline{K_{\zeta_\nu}^{(i)}}\right),$$

где $\{\varphi_{ij}\}$ — элементы корневого и $\{\psi_{ij}\}$ — элементы L-корневого пространства оператора T. Таким образом, размерность пространства $P_{\zeta_\nu}\Phi$ определяется свойствами оператора T и не зависит от конструкции пространства $\widetilde{\Phi}$. Аналогичное утверждение справедливо для проекторов $P_\sigma^\pm$, $\sigma\in(0, 1)$.

Аналогично [1] доказывается также следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть все полюса функции* $N(\zeta)^{-1}$ *в* Ω *лежат на интервале* $[0,1]$ *и пусть* $P_\sigma = -\operatorname*{Res}_{\zeta=\sigma}\widetilde{T}_\zeta$. *Если* $f\in H$ *и* $(f, b_\xi)\equiv 0$, $\xi\in[0, 1]$, *то* $f\in\Phi$, $P_\sigma f\in\Phi$.

Теорема 4. 1. *Для того чтобы* $\sigma\in(0, 1)$ *было спектральной особенностью оператора* T, *необходимо и достаточно, чтобы* $\det K_+(\sigma)=0$ *или* $\det K_-(\sigma)=0$.

2. *Для того чтобы* $\sigma\in[0, 1]$ *было собственным значением* T, *необходимо и достаточно, чтобы порядок* n_σ *значения* σ *как корня* $\det N(\zeta)$ *был больше порядка* q_σ *значения* σ *как полюса функции* $B^*N(\overline{\zeta})^{-1*}\alpha(\zeta)$. *При этом соответствующее корневое пространство* $\mathfrak{N}_\sigma^{(0)}$ *будет иметь размерность*

$$\dim\mathfrak{N}_\sigma^{(0)} = n_\sigma - q_\sigma. \tag{7}$$

Доказательство. Утверждение, аналогичное 1, содержится в [1]. Согласно теореме 3 для доказательства 2 достаточно найти размерность корневого пространства оператора $T:\Phi\to\Phi$, отвечающего собственному значению $\sigma\in[0, 1]$. Из (6) следует, что пространство $Z(U)$ инвариантно относительно $\widetilde{T}_1$. Пусть $\widetilde{\mathfrak{N}}_{1\sigma}$ — корневое пространство $\widetilde{T}_1$, отвечающее σ, и пусть $n_\sigma^{(L)}$ ($n_\sigma^{(0)}$) означает размерность L-корневого (корневого) пространства $\mathfrak{N}_\sigma^{(L)}$ ($\mathfrak{N}_\sigma^{(0)}$) оператора $T:\Phi\to\Phi$. Согласно [6]

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_{1\sigma} = \mathfrak{N}_\sigma^{(0)} \dotplus \{g_j\}_{j=0}^{\widetilde{q}_\sigma-1}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{N}_\sigma^{(L)} = \mathfrak{N}_\sigma^{(0)} \dotplus \{\psi_j\}_{j=0}^{\widetilde{q}_\sigma-1}, \tag{9}$$

где $g_j=\left\{\psi_j,\ \frac{1}{j!}\overline{K_\sigma^{(j)}}\right\}$. Сопоставляя (8), (4) и (6), находим

$$\dim\widetilde{\mathfrak{N}}_{1\sigma} = n_\sigma + s_\sigma. \tag{10}$$

При построении $\widetilde{T}_{1\zeta}$ согласно [5] роль функционала $\Delta_{\overline{\zeta}}$ играет выражение $(\varphi, b_{\overline{\zeta}})/k(\zeta)$, поэтому число $\widetilde{q}_\sigma - s_\sigma$ совпадает с порядком σ как полюса формы $(\varphi, b_{\overline{\zeta}})$. Множество элементов $\widetilde{\widetilde{BS}}_\sigma\varphi$, $\varphi\in\Phi$, плотно в G, поэтому из представления $(\varphi, b_{\overline{\zeta}})$ следует $\widetilde{q}_\sigma = q_\sigma + s_\sigma$. Векторы ψ_j линейно независимы, поэтому из (9) получаем $n_\sigma^{(L)} = n_\sigma^{(0)} + q_\sigma + s_\sigma$. Отсюда в силу (10) следует (7), так как $n_\sigma^{(L)} = \dim\widetilde{\mathfrak{N}}_{1\sigma}$, что и требовалось доказать.

3. Применение к разностным операторам. Рассмотрим разностное выражение l, преобразующее последовательность $u = (u_{-r+1}, \ldots, u_0, u_1, \ldots)$ в последовательность $lu=((lu)_1, \ldots)$ по формуле $(lu)_j = \sum_{k=-r}^{r} a_{kj}u_{j+k}$, где a_{kj} — действительные числа, удовлетворяющие соотношениям $a_{kj}=a_{-k,j+k}$, $k=-r, \ldots, r$, $j=1, 2, \ldots$, и при некоторых C и C_k — оценкам

$$0<\frac{1}{a_{rj}}<C,\quad |a_{kj}|<C_k,\quad j=1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Краевым условиям $u_{-r+1}=\ldots=u_0=0$ и выражению l сопоставим оператор L, заданный в $H=l^2[1,\infty)$ соотношением $Lu=lu$. Легко видеть, что L — самосопряженный оператор. Будем считать, для определенности, что спектр оператора L находится в интервале $[0, 1]$. Решения уравнения $lu-\lambda u=0$, удовлетворяющие условиям $u_j=\delta_{jk}$, $j=-r+1, \ldots, r$, $k=1, 2, \ldots, r$, обозначим через $P(k,\lambda)=\{P_j(k,\lambda)\}$. L-преобразованием финитной последовательности будем называть вектор-функцию $\widetilde{u}(x)=\{\widetilde{u}_j(x)\}$, где $\widetilde{u}_j(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_iP_i(j,x)$.

Известно [3], что для самосопряженного оператора L существует единственная спектральная функция $\sigma(x)=\{\sigma_{jk}(x)\}$ такая, что оператор U, заданный соотношением

$$(Uf)_i=\sum_{j,k=1}^{r}\int_0^1 f_j(x)\,P_i(k,x)\,d\sigma_{jk}(x),$$

отображает изометрически L_σ^2 на H и преобразует S в L, т. е. $S=U^{-1}LU$. Существует также $\rho>0$ такое, что для каждого $k=-r, \ldots, r$ справедлива оценка $|P_j(k,z)|\leqslant C\rho^j$, $j=1, 2, \ldots$, $z\in\Omega$.

Введем оператор $K: H\to H$, определяя разностное выражение

$$(Ku)_j=\sum_{k=-p}^{q} b_{jk}u_{j+k}$$

и граничные условия $u_{-p+1}=\ldots=u_0=0$. Здесь p, q — произвольные натуральные числа и

$$\sum_{j=1}^{\infty}|b_{jk}|\,\rho^{2j}<\infty. \tag{12}$$

Будем изучать оператор $L+K$, рассматривая его образ в L_σ^2. Так как $(U^{-1}u)_i(x)=\widetilde{u}_i(x)$, то оператор $V=U^{-1}KU$ имеет представление

$$(Vf)_i(x)=\sum_{m,n=1}^{r}\int_0^1 K_{im}(x,y)\,f_m(y)\,d\sigma_{mn}(y), \tag{13}$$

где ядро

$$K_{im}(x,y)=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=-p}^{q}P_s(i,x)\,P_{s+k}(m,y)\,b_{sk} \tag{14}$$

голоморфно в Ω в силу (12). Легко видеть, что оператор вида (13) допускает факторизацию $V=A^*B$ где, например,

$$Af=\sum_{j,k=1}^{r}\int_0^1 f_j(x)\,\alpha_k(x)\,d\sigma_{jk}(x)$$

и голоморфные вектор-функции $\alpha_k(x)$ принимают значения в некотором гильбертовом пространстве G. Выражения α_k (соответственно β_k для оператора B) легко выписать, пользуясь (14). Положим $\Phi=A^2(\Omega)\oplus A^2(\Omega)\oplus\ldots$ (r экземпляров) и построим $\widetilde{\Phi}$, W, $\widetilde{B}$ и т.д., последовательно реализуя схему работы [4].

Введем матрицу $\mathscr{L}(\zeta)=\{l_{jk}(\zeta)\}_1^r$, где $l_{jk}(\zeta)=\int\limits_0^1 d\sigma_{jk}(x)/(x-\zeta)$, и положим $\widetilde{\beta}_j(\zeta)=\sum\limits_k \beta_k(\zeta)\,l_{jk}(\zeta)$. Предположим, что выполнены следующие условия.

A. Определитель матрицы $L(\zeta)^{-1}=\{\delta_{jk}+(N(\zeta)^{-1}\widetilde{\beta}_j(\zeta),\ \alpha_k(\overline{\zeta}))\}$ не равен тождественно нулю, т. е. $L(\zeta)$ существует.

B. Если $K(\zeta)=1+BS_\zeta A^*$, то $\det\{\delta_{jk}-(K(\zeta)^{-1}\widetilde{\beta}_j(\overline{\zeta}),\ \alpha_k(\xi)\}\not\equiv 0$.

C. Существуют элементы $l_k,\ \widetilde{l}_k\in\Phi$ такие, что (см. ниже (16) — (17)) $(l_k,\ b_{j\bar\zeta})\equiv\delta_{kj}p_k(\zeta)$, $(a_{i\zeta},\ \widetilde{l}_k)\equiv\delta_{ik}q_k(\zeta)$, где $p_k(\zeta),\ q_k(\zeta)\not\equiv 0$.

D. Если функции $\zeta\to f(\zeta)$ и $\zeta\to\mathscr{X}(\zeta)L(\zeta)f(\zeta)$ одновременно голоморфны в окрестности $[0,\ 1]$, то $f(\zeta)\equiv 0$.

Ясно, что при $r=1$ условия A — D тривиальны. Мы опустим несколько громоздкое доказательство следующей теоремы, так как оно аналогично доказательству теоремы 4.

Теорема 5. *Если* $T_\zeta=(T-\zeta)^{-1}$, *где* $T=S+V$, *то*

$$(T_\zeta\varphi,\ \psi)_{L^2_\sigma}=\sum_{ij=1}^{r}(\varphi,\ b_{j\bar\zeta})(a_{i\zeta},\ \psi)\,m_{ij}(\zeta)+(\widetilde{T}_\zeta\varphi,\ W\psi)_{\widetilde{\Phi}},\quad \varphi,\psi\in\Phi, \tag{15}$$

где

$$(\varphi,\ b_{j\bar\zeta})=\varphi_j(\zeta)-(N(\zeta)^{-1}\widetilde{B}\widetilde{S}_\zeta\varphi,\ \alpha_j(\overline{\zeta}))_G, \tag{16}$$

$$(a_{i\zeta},\ \psi)=\overline{\psi_i(\overline{\zeta})}-(N(\zeta)^{-1}\beta_i(\zeta),\ \widetilde{A}\widetilde{S}_\zeta\psi)_G \tag{17}$$

и $m_{ij}(\zeta)=(L(\zeta)e_j,\ e_i)_{C^r}l_{ij}(\zeta)$, *где* e_j — *координатные орты пространства* C^r. *Выражение* $\widetilde{T}_\zeta=\widetilde{S}_\zeta-\widetilde{S}_\zeta A^*N(\zeta)^{-1}\widetilde{B}\widetilde{S}_\zeta$ — *резольвента оператора* $\widetilde{T}=\widetilde{S}+A^*\widetilde{B}$.

Операторы $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, заданные соотношениями $(\mathscr{A}\varphi)_j(\zeta)=(\varphi,\ b_{j\bar\zeta})\,p_j(\zeta)$, $(\mathscr{B}\psi)_i(\zeta)=(a_{i\zeta},\ \psi)\,q_i(\zeta)$, продолжаются по непрерывности на L^2_σ при соответствующем подборе многочленов $p_j(\zeta)$, $q_i(\zeta)$ и представляют собой T^*- и T- преобразования Фурье.

Вне каждой окрестности непрерывного спектра $c(T)$ оператора T спектр состоит из конечного множества собственных значений. Спектральными особенностями σ будем называть полюса функции $N(\zeta)^{-1}$, содержащиеся в $c(T)$. Для каждого собственного значения $\lambda\notin c(T)$ оператора T положим $P_\lambda=-\operatorname*{Res}_{\zeta=\lambda}T_\zeta$ и для каждой спектральной особенности $P_\sigma=-\operatorname*{Res}_{\zeta=\sigma}\widetilde{T}_\zeta$. Как и раньше, каждая спектральная особенность σ — нормальное L-собственное значение оператора $T:\Phi\to\Phi$, где $L=\{l_k\}$ (см. C).

Пусть Ω — область с достаточно гладким контуром C, содержащая непрерывный спектр $c(T)$ и только те полюса функции $N(\zeta)^{-1}$, которые принадлежат $c(T)$. Пусть $p(\zeta)$ — многочлен такой наименьшей степени, что функция $p(\zeta)N(\zeta)^{-1}$ голоморфна в Ω, и пусть $\widetilde{m}_{ij}(\zeta)=m_{ij}(\zeta)/p^2(\zeta)$. Рассмотрим функционалы

$$\langle\varphi,\ R_{ij}\rangle=-\frac{1}{2\pi i}\oint_C\varphi(\zeta)\,\widetilde{m}_{ij}(\zeta)\,d\zeta$$

и обобщенную спектральную матрицу $R=\{R_{ij}\}$, заданную соотношением $\langle\varphi R\psi\rangle=\sum_{ij}\langle\varphi_i\psi_j,\ R_{ij}\rangle$. Легко видеть, что существует $C>0$ такое, что $|\langle\varphi R\psi\rangle|\leqslant C\,\|\varphi\|_\Phi\,\|\psi\|_\Phi$, $\varphi,\psi\in\Phi$. Имеет место равенство Парсеваля — Марченко

$$(\varphi,\ \psi)_{L^2_\sigma}=\langle\mathscr{A}\varphi R\mathscr{B}\psi\rangle+\sum_{\sigma\in C(T)}(P_\sigma\varphi,\ W\psi)_{\widetilde{\Phi}}+\sum_{\lambda\notin\Omega}(P_\lambda\varphi,\ \psi)_H,\quad \varphi,\psi\in\Phi.$$

Если спектральная мера имеет вид $d\sigma_{jk}(x)=\rho_{jk}(x)dx$, где функции $\rho_{jk}(x)$ допускают голоморфное продолжение в область Ω с разрезами, проведенными, например, вдоль $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$, то относительно спектра справедливы утверждения, аналогичные [4], и равенство Парсеваля имеет тот же вид, что и в [4]. Этот случай возникает, если рассматривать разностные операторы, порожденные выражением

$$(lu)_j = \frac{1}{2}(u_{j-1} + u_{j+1}) + \sum_{k=-p}^{q} b_{jk} u_{j+k} \tag{18}$$

и краевым условием $u_{-p+1} = \ldots = u_0 = 0$. Как известно, спектр невозмущенного оператора, порожденного выражением $(lu)_j = (u_{j-1} + u_{j+1})/2$, однократный и спекгральная мера имеет вид $d\sigma(x) = \sqrt{1 - x^2}\, dx$ [2]. Для этого случая справедливы все результаты, полученные выше. Отметим, что здесь равенство Парсеваля справедливо для всех элементов $u = (u_1, \ldots) \in H$, для которых $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| j^{n+1} < \infty$, где показатель n строится согласно [4].

Отметим, что легко привести примеры разностных выражений (18) (даже 3-го порядка), для которых концы интервала $[-1, 1]$, совпадающего с непрерывным спектром, являются собственными значениями оператора. В этом случае традиционный подход при использовании метода контурного интегрирования встречает трудности из-за ветвления билинейной формы резольвенты в этих собственных значениях. Эти трудности проявляются уже в случае одномерного возмущения (см. [7], где реализован подход, не использующий понятий, связанных с псевдорезольвентой).

Отметим также, что результаты, касающиеся псевдорезольвент и использованные выше, допускают обобщения на случай, когда соответствующие ассоциированные операторы неограничены. Это позволяет рассматривать возмущения оператора S в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ и дополнить работу [1] формулой для кратности собственного значения, находящегося на непрерывном спектре. Соответствующие результаты можно получить в пространствах $L^2(0, 1; G)$ и $L^2(-\infty, \infty; G)$ бесконечномерных вектор-функций, а также при рассмотрении несамосопряженных разностных операторов 2-го порядка с матричными коэффициентами.

1. *Лянце В. Э.* Вполне регулярное возмущение непрерывного спектра. I.— Мат. сб., 1970, 82 (124), с. 126—156. II.— Там же, 1971, **84** (126), с. 141—158.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— К.: Наук. думка, 1965.— 798 с.
3. *Базанов Б. В.* Некоторые вопросы теории симметричных конечноразностных операторов.— Волжск. мат. сб. Теор. сер., 1963, № 1, с. 9—31.
4. *Черемных Е. В.* Спектральный анализ некоторых несамосопряженных операторов.— Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 2, с. 227—233.
5. *Черемных Е. В.* О минимальном продолжении псевдорезольвенты.— Мат. заметки, 1973, **14**, вып. 1, с. 95—99.
6. *Черемных Е. В.* Теорема о вычете псевдорезольвенты.— Мат. заметки, 1979, **25**, вып. 3, с. 445—454.
7. *Черемних Е. В.* Одновимірне збурення оператора множення на незалежне змінне в $L^2(0,1)$.— Доп. АН УРСР, 1971, № 9, с. 795—797.

Львовский
политехнический институт

Поступила в редакцию
06.07.80