

УДК 517.9

Т. І. Зеленьак, д-р фіз.-мат. наук  
(Ін-т математики Сибір. від-ня АН Росії, Новосибірськ)

## До питання про застосування варіаційних методів у теорії параболічних рівнянь

Викладено основні математичні принципи застосування варіаційних методів у теорії параболічних рівнянь.

Изложены основные математические принципы применения вариационных методов в теории параболических уравнений.

Розглянемо задачу

$$u_t = a(x, u, u_x) u_{xx} + b(x, u, u_x), \quad (1)$$

$$\alpha_0 [u_x - \varphi(u)] + \beta_0 u \Big|_{x=0} = \alpha_1 [u_x - \psi(u)] \Big|_{x=1} = 0, \quad (2)$$

$$u \Big|_{t=0} = u_0(x). \quad (3)$$

Припустимо, що  $a(x, \xi, \eta)$ ,  $b(x, \xi, \eta)$ ,  $\varphi(\xi)$ ,  $\psi(\eta)$ ,  $u_0(x)$  — двічі диференційовані функції для  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-\infty < \xi, \eta < \infty$ ,  $\alpha_i \beta_i = 0$ ,  $\alpha_i +$

$\beta_i = 1$ ,  $a \geq a_0 > 0$ ,  $a_0 = \text{const}$ . При цих умовах існування (у «малому» по  $t$ ) і єдиність розв'язку встановлено в [1, 2], якісна теорія для такої задачі побудована в [3—11].

Будемо говорити, що виконана умова  $A$ , якщо розв'язок  $y = \theta(x, x_0, y_0, y_1)$  задачі Коші

$$y'' = -b(x, y, y')/a(x, y, y'), y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_1 \quad (4)$$

визначений для всіх  $0 \leq x, x_0 \leq 1$ ,  $-\infty < y_i < \infty$ .

**Теорема 1** [3—5]. *Розв'язок у задачі (1)—(3), обмежений разом з першими похідними рівномірно відносно  $t$ , стабілізується. Це значить, що існує регулярний стаціонарний розв'язок у задачі (1), (2) такий, що*

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \{ |u(x, t) - v(x)| + |u_x - v_x| + |u_{xx} - v_{xx}| \} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

**Теорема 2** [3—5]. *Нехай виконана умова  $A$ . Існує  $T \leq \infty$  таке, що розв'язок  $u(x, t)$  задачі (1)—(3) визначений для  $0 \leq t < T$  і виконується одне із тверджень:*

1)  $0 < T \leq \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow T} \|u\|_{C(0,1)} = \infty$ ;

2)  $T = \infty$  і розв'язок  $u(x, t)$  стабілізується.

Будемо говорити, що виконана умова  $B$ , якщо існують функції  $\Phi(x, \xi, \eta)$ ,  $\rho(x, \xi, \eta)$ , двічі диференційовані,  $\Phi_{\eta\eta} \geq a_0$ ,  $\rho \geq a_0$  такі, що для всіх розв'язків задачі (1)—(3) і проміжків часу, на яких вони визначені, виконується

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \Phi(x, u, u_x) dx = - \int_0^1 \rho(x, u, u_x) u_t^2 dx. \quad (5)$$

Рівняння (1), після домноження на  $\rho$  приймає вигляд

$$\rho u_t = \frac{d}{dx} \Phi_{u_x} - \Phi_u, \quad (6)$$

а граничні умови у випадку  $\beta_i = 0$  являються умовами трансверсальності для функціоналу

$$J(u) = \int_0^1 \Phi(x, u, u_x) dx.$$

Функціонал  $J(u)$  будемо називати регулярним, якщо виконана умова  $B$  і для всіх диференційованих функцій  $u$ , які задовольняють граничні умови (2), виконано

$$J(u) \geq c_1 \int_0^1 (|u_x|^2 + |u|) dx - c_2$$

з додатніми константами  $c_i$ .

Умова  $A$  являється достатньою (але не являється необхідною) для виконання умови  $B$ .

Будемо говорити, що для функціоналу  $J(u)$  виконана умова  $B$ , якщо для рівняння Ейлера (4) існує перший інтеграл  $Z(x, y, y')$  такий, що  $|Z(x, \xi, \eta)| < \infty$  рівномірно, при кожному  $K$ , на множині  $0 \leq x \leq 1$ ,  $|\xi| \leq K$ .

**Теорема 3.** *Якщо виконані умови  $B$  і  $B$ , то виконуються твердження теореми 2. Якщо додатково відомо, що  $J(u)$  регулярний, то кожний розв'язок задачі (1), (2) стабілізується.*

Із теореми Тонеллі [12] випливає існування абсолютно неперервної функції, на якій реалізується мінімум регулярного функціоналу  $J(u)$ . Із умови  $B$  випливає, що якщо  $y(x)$  — розв'язок рівняння (4) для  $x_1 \leq x \leq x_2$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_1} |y'| = \infty$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_1} |y(x)| = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_2} |y'| = \infty.$$

Таким чином [12], умова  $B$  є достатньою умовою регулярності довільно абсолютно неперервної функції  $v(x)$ , на якій реалізується сильний локальний мінімум регулярного функціоналу  $J(u)$ . Якщо  $\Phi$  не залежить від  $x$  або не залежить від  $u$ , умова  $B$  виконується автоматично. Це значить, що у випадку регулярності  $J(u)$  стабілізується довільний розв'язок задачі (1), (2), а розв'язок варіаційної задачі є регулярним (двічі диференційованим) розв'язком рівняння Ейлера. Як показують приклади, в загальному випадку умова  $B$  не впливає із регулярності  $J(u)$ , варіаційна задача може мати абсолютно неперервні, нерегулярні розв'язки, стабілізація до яких регулярних розв'язків параболічної задачі не можлива навіть в нормі  $C(0, 1)$ .

Слід точніше сформулювати варіаційну задачу. В [13] доведено, що для будь-якої пари функцій обмеженої варіації  $p(x)$ ,  $q(x)$  і неперервної  $\Phi(\xi, \eta)$  можна побудувати послідовність функцій  $\{y_n\}$  обмеженої варіації таку, що

$$\int_0^1 \Phi(y_n, y_n') dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi(p, q) dx.$$

Таким чином, в цьому класі задача зводиться до задачі мінімізації функціоналу, в якому аргументи в лагранжіані не зв'язані операцією диференціювання, і втрачає зміст.

Регулярний функціонал в класі АС абсолютно неперервних функцій досягає мінімуму [12], але можливий ефект Лаврентьєва [13]: не існує мінімізуючої для АС послідовності, що складається з гладких функцій.

В [14—16] побудовані приклади регулярних варіаційних задач з ефектом Лаврентьєва, проте мінімум в класі неперервно диференційованих функцій досягається в цих прикладах на диференційованих функціях. Відповідні рівняння Ейлера не задовольняють умову  $B$ , існують обмежені, з необмеженими похідними розв'язки, та до них не можуть в нормі  $C(0, 1)$  стабілізуватись розв'язки відповідної параболічної задачі. В протилежному випадку легко було б побудувати гладку, мінімізуючу функціонал в АС послідовність. А це суперечить наявності ефекту Лаврентьєва. В [14, 17] ефект Лаврентьєва відсутній, мінімум в класі неперервно диференційованих функцій не досягається, а досягається на функції, похідна від якої безмежна лише у граничній точці (задача з закріпленими кінцями, функціонал регулярний). В [18, 19] ефект Лаврентьєва відсутній, похідна необмежена у внутрішній точці інтервалу, що дало можливість автору вказаних робіт дати негативну відповідь на питання, поставлене Гільбертом в [14], у випадку двох незалежних змінних. М. А. Сичов побудував теж приклад регулярного функціоналу. При цьому рівняння Ейлера має обмежені розв'язки з не обмеженою похідною, але мінімум  $J(u)$  в класі абсолютно неперервних з довільними фіксованими граничними даними функцій досягається лиш на функціях двічі диференційованих.

1. Кружков С. Н. Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Тр. сем. им. Н. Г. Петровского. — 1979. — В. 5. — С. 217—272.
2. Ладьяженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
3. Зеленьяк Т. И. О стабилизации решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка с одной пространственной переменной // Дифференц. уравнения. — 1968. — 4. № 1. — С. 34—45.
4. Зеленьяк Т. И. О качественных свойствах решений квазилинейных смешанных задач для уравнений параболического типа // Мат. сб. — 1977. — 104, № 3. — С. 436—510.
5. Белоносов В. С., Зеленьяк Т. И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. — Новосибирск: Новосибир. ун-т, 1975. — 158 с.
6. Белоносов В. С. Оценка решений параболических систем в весовых классах Гельдера и некоторые их приложения // Мат. сб. — 1979. — 110, № 2. — С. 163—188.
7. Белоносов В. С., Вишневский М. П. Об устойчивости стационарных решений целевых параболических систем // Там же. — 1977. — 104, № 4. — С. 535—558.
8. О качественных свойствах решений параболических уравнений / В. С. Белоносов, М. П. Вишневский, Т. И. Зеленьяк, М. М. Лаврентьев (мл.). — Новосибирск, 1983. — 86 с. — (Препринт / ВЦ, СО АН СССР, № 466).

9. Вишневский М. П. Интегральные множества нелинейных параболических систем // Динамика сплошной среды.— 1982.— Вып. 54.— С. 74—84.
10. Мусиенко Е. И. Управление решением одной параболической задачи в окрестности неустойчивого стационарного решения // Там же.— 1981.— Вып. 51.— С. 68—83.
11. Зеленяк Т. И., Михайлов В. П. Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач математической физики // Дифференц. уравнения с частными производными: Тр. симп., посвященного 60-летию акад. С. Л. Соболева.— М.: Наука, 1970.— С. 96—118.
12. Tonelli L. Fondamenti di Calcolo delle variazioni.— Bologna: Zanichelli, 1921—1923.— 11.— 660 p.
13. Laurentiev M. Sur la quelques problemes du calcul des variations // Ann. mat. pura ed appl.— 1926.— N 4.— P. 7—28.
14. Ball J. M., Mizel V. J. Singular minimizers for regular one-dimensional problems in the calculus of variations // Bull. Amer. Math. Soc.— 1984.— 2, N 1.— P. 143—146.
15. Ball J. M., Mizel V. J. One-dimensional variational problems whose minimizers variational do not satisfy the Euler-Lagrange equation // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1985.— 90, N 4.— P. 325—338.
16. Davil A. M. Singular minimizers in the calculus of variations // Ibid.— 1988.— 101, N 2.— P. 161—177.
17. Clarke F. H., Vinter R. B. Regularity property of solutions to the basic problem in the calculus of variations // Trans. Amer. Math. Soc.— 1985.— 289, N 1.— P. 73—98.
18. Сычев М. А. К вопросу о регулярности решений простейших вариационных задач.— Новосибирск, 1991.— 48 с.— (Препринт / СО АН СССР, Ин-т математики: № 4).
19. Сычев М. А. О регулярности некоторых вариационных задач // Докл. АН СССР.— 1991.— 316, № 6.— С. 1326—1330.

Одержано 12.06.92