УДК 519.21

Р. В. Бобрик, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Про стійкість в середньому квадратичному для гармонійного осцилятора з випадковим параметром

Одержані достатні умови для стійкості в середньому квадратичному гармонійного осцилятора, у якого випадковим параметром є процес Орнштейна — Уленбека.

Получены достаточные условия для устойчивости в среднем квадратическом гармонического осциллятора, случайным параметром которого является процесс Орнштейна — Уленбека.

В [1, с. 197] сформульована гіпотеза про те, що кожний результат відносно стійкості для диференціальних рівнянь з «білим» шумом справедливий і для рівнянь з достатньо регулярними випадковими збуреннями, що є в певному розумінні близькими до «білого» шуму.

Мета даної статті — показати, що існують важливі рівняння, для яких це припущення вірне і без вимоги про близькість збурень до «білого» шуму.

Розглянемо рівняння гармонійного осцилятора

$$d^2x(t)/dt^2 + (k + \beta\xi_\tau(t))\, dx(t)/dt + \omega x(t) = 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

де $k > 0$, $\omega > 0$, а $\xi_\tau(t)$ — процес Орнштейна — Уленбека з кореляційною функцією

$$B(t) = M[\xi_\tau(t+s)\,\xi_\tau(s)] = \tau \exp\{-\tau|t|\}.$$

Як випливає із [2, с. 241], розв'язок рівняння (1) при $\tau \to \infty$ слабко збігається до розв'язку стохастичного диференціального рівняння Іто

$$d\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) + (k+\beta^2)\frac{dy(t)}{dt}\,dt + \omega y(t)\,dt + \sqrt{2}\beta\frac{dy(t)}{dt}\,dw(t) = 0, \tag{2}$$

з тими з самими початковими умовами. Тут $w(t)$ — стандартний вінерівський процес.

Стійкість в середньому квадратичному для рівняння (2) досліджувалась в [1, 3], звідки випливає, що нерівність

$$2\beta^2 \leqslant k \tag{3}$$

є необхідною і достатньою умовою для стійкості тривіального його розв'язку в середньому квадратичному, а строга нерівність — для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному.

Справедлива наступна теорема.

Теорема. *Нерівність* (3) *є достатньою умовою для стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку рівняння* (1) *при будь-яких* $\tau > 0$, $\omega > 0$.

Доведення. Вводячи вектор

$$u(t) = \mathrm{col}\left(\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2, \sqrt{2\omega}\,x(t)\frac{dx(t)}{dt}, \omega(x(t))^2\right),$$

для нього на основі (1) одержуємо рівняння в R^3

$$du(t)/dt = Au(t) + \xi_\tau(t) Cu(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -2k & -\sqrt{2\omega} & 0 \\ \sqrt{2\omega} & -k & -\sqrt{2\omega} \\ 0 & \sqrt{2\omega} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основі формули інтегрування частинами для міри Гаусса [4, с. 79] одержуємо для $Mu(t)$ нескінченний ланцюжок рівнянь з варіаційними похідними [5]:

$$\frac{dMu(t)}{dt} = AMu(t) + C\int_0^t B(t-s) M \frac{\delta u(t)}{\delta\xi_\tau(s)} ds,$$

$$M \frac{\delta^n u(t)}{\delta\xi_\tau(s_1)\ldots\delta\xi_\tau(s_n)} = A\int_0^t M \frac{\delta u(t_1)}{\delta\xi_\tau(s_1)\ldots\delta\xi_\tau(s_n)} dt_1 +$$

$$+ C\int_0^t\int_0^{t_1} B(t_1 - s_{n+1}) M \frac{\delta^n u(t_1)}{\delta\xi_\tau(s_1)\ldots\delta\xi_\tau(s_{n+1})} ds_{n+1}dt_1 + \sum_{i=1}^n \theta(t-s_i) \times$$

$$\times CM \frac{\delta^{n-1} u(s_i)}{\delta\xi_\tau(s_1)\ldots\delta\xi_\tau(s_{i-1})\,\delta\xi_\tau(s_{i+1})\ldots\delta\xi_\tau(s_n),}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

де $\theta(t)$ — функція Хевісайда.

Для функцій

$$v_0(t) = Mu(t), \quad v_n(t) = \int_0^t \ldots \int_0^t \exp\left\{-\tau\sum_{i=1}^n (t-s_i)\right\} \times$$

$$\times M \frac{\delta^n u(t)}{\delta\xi_\tau(s_1)\ldots\delta\xi_\tau(s_n)} ds_1\ldots ds_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

цей ланцюжок можна подати як ланцюжок лінійних диференціальних рівнянь

$$dv_0(t)/dt = Av_0(t) + \tau Cv_1(t), \quad dv_n(t)/dt = -n\tau v_n(t) + Av_n(t) +$$
$$+ \tau Cv_{n+1}(t) + nCv_{n-1}(t), \tag{5}$$
$$v_0(0) = u(0), \quad v_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

Розглянемо банахів простір F нескінченних послідовностей функцій

$$g = \{g_n(t),\ n = 0, 1, 2, \ldots, \sup_n \sup_{t>0} [e^{-\sigma t} d^n \| g_n(t) \|] < \infty\},$$

з нормою

$$|||g||| = \sup_n \sup_t [e^{-\sigma t} d^n \| g_n(t) \|].$$

Тут σ і d — деякі додатні параметри, а $\|\cdot\|$ — норма в евклідовому просторі R^3.

Якщо помножити ліву і праву частини рівняння для $v_n(t)$ в (5) на $\exp\{nt\}$ і перейти до інтегральної форми, то ланцюжок (5) можна зобразити у вигляді лінійного рівняння в просторі F:

$$v = Gv + g_0,$$

де оператор G і вільний член g_0 визначаються правою частиною ланцюжка (5).

На основі (5) для норми оператора G неважко одержати оцінку

$$|||G|||\leqslant \max\left\{\frac{d\|A\|+\tau\|C\|}{d\sigma};\ \sup_n\left(\frac{d\|A\|+\tau\|C\|+d^2n\|C\|}{d(\sigma+n)}\right)\right\}.$$

Звідси видно, що вибором σ і d завжди можна добитись, щоб $|||G|||<1$, а отже у ланцюжка (5) існує єдиний розв'язок із простору F.

Нехай $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в R^3,

$$z_n(t)=\sqrt{\frac{\tau^n}{n!}}\,v_n(t),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Тоді, враховуючи вигляд матриці A і симетричність матриці C, із ланцюжка (5) маємо

$$\frac{1}{2}\frac{d\|z_0(t)\|^2}{dt}=(Dz_0(t),z_0(t))-\|Cz_0(t)\|^2+\sqrt{\tau}\,(Cz_0(t),z_1(t)),$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\|z_n(t)\|^2}{dt}=(Dz_n(t),z_n(t))-n\tau\|z_n(t)\|^2-\|Cz_n(t)\|^2+ \tag{6}$$

$$+\sqrt{(n+1)\tau}\,(z_{n+1}(t),Cz_n(t))+\sqrt{n\tau}\,(Cz_{n-1}(t),z_n(t)),\quad n=1,2,3,\ldots,$$

де D — діагональна матриця, $D=\operatorname{diag}(-2k+4\beta^2,-k+\beta^2,0)$.

Оскільки $v_n(t)$, $n=0,1,2,\ldots$, належить F, то збіжним є ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\|z_n(t)\|^2$, а також з урахуванням (5) і ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d\|z_n(t)\|^2}{dt}$. Із рівностей (6) випливає

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d\|z_n(t)\|^2}{dt}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(Dz_n(t),z_n(t)).$$

Таким чином, якщо виконується умова (3), то

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d\|z_n(t)\|^2}{dt}\leqslant 0.$$

Звідси на основі теорії стійкості Ляпунова, враховуючи вигляд вектора $u(t)$ і те, що $z_0(t)=Mu(t)$, одержуємо твердження теореми.

1. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969.— 367 с.
2. *Стохастическое исчисление* / С. В. Анулова, А. Ю. Веретенников, Н. В. Крылов и др. // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ.— 1989.— **49**.— С. 5—260.
3. *Гихман И. И.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Предельные теоремы и статист. выводы.— Ташкент: Ин-т математики АН УзССР, 1966.— С. 14—45.
4. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М. : Наука, 1983.— 384 с.

4. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М. : Наука, 1983.— 384 с.

5. *Бобрик Р. В.* Об одном свойстве устойчивых систем линейных стохастических уравнений // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 2.— С. 147—152.

Одержано 06.03.92